新大纲考研数学命题研究

XINDAGANG KAOYAN SHUXUE MINGTI YANJIU

考研数学

常见题型解析及模拟试题

（第5版）

王寿生　主编

西北工業大學出版社

考研数学常见题型解析及模拟试题

（第5版）

主　编　王寿生

王寿生　李云珠
符丽珍　赵选民　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是为报考硕士研究生的考生编写的数学考试复习指导用书。全书分为高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步、考研模拟试题等四篇。

本书有三个特点：(1) 对研究生入学数学考试大纲作了比较详细而简明的诠释；(2) 介绍了各学科专业研究生入学数学考试试题常见题型的众多解题方法与技巧；(3) 根据2003年新大纲和近几年考研命题走向编制了8套模拟试题。各章后均附有练习题与答案。书末附有2003年和2004年全国硕士研究生入学考试数学试题与解答。这些都有助于提高考生的应试能力，有利于读者提高分析综合和灵活运用的能力。

本书供报考理工科、经济学科研究生的考生复习应试之用，也可供大专院校的学生及有志于自学高等数学、线性代数、概率论与数理统计的读者和大专院校教师阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学常见题型解析及模拟试题/王寿生主编．—5版．—西安：西北工业大学出版社，2004.4

ISBN 7-5612-0958-4

Ⅰ．考…　Ⅱ．王…　Ⅲ．高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第010596号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号，邮编710072　　电话：(029) 88493844
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　　1/16
印　　张：36.125
字　　数：880千字
版　　次：1996年7月　第1版　2004年4月第5版第6次印刷
印　　数：31 001～34 000册
定　　价：36.00元

第5版 前 言

本书自1996年首版推出以来，受到了广大读者的好评和欢迎，并于1997年修订推出了第2版，2000年修订推出了第3版，2002年修订推出了第4版。根据读者需求曾多次重印发行。为了使报考研究生的读者能更好地把握国家教育部最新考试大纲的要求，提高全面复习数学的效率和应考能力，经过2002年和2003年对考生考前的指导经验的分析和研究，我们按照教育部2003年新颁布的考研数学大纲及内容要求对本书进行了再一次的修订。这次修订的主要内容有：

1. 根据中华人民共和国教育部制订颁布的《2003年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，重写了各章的考试内容。

2. 根据《2003年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，对"关于考试大纲的若干简明诠释"进行了改写和充实，使现在的这部分内容又符合新考试大纲的要求，更有利于报考研究生的读者把握新考试大纲的精神实质。

3. 对"若干常见题型的例题分析"作了比较大的调整，增加了新的题型，特别增加了近几年研究生考试的若干试题，这对报考研究生的读者了解研究生入学考试的命题规律，提高解题和应试能力无疑是有帮助的。

4. 对考研"数学一"、"数学二"、"数学三"、"数学四"按照新大纲重新设计了8套模拟试题并给出了详解。

本书由王寿生（修订编写第一章至第四章）、李云珠（修订编写第五章至第八章）、符丽珍（修订编写第九章至第十四章）、赵选民（修订编写第十五章至第十八章）分工修订编写，王寿生任主编，编者按篇章顺序署名。

由于水平所限，书中难免疏误，欢迎读者批评指正。

编　者

2004年2月于西北工业大学

前　　言

为了使报考研究生的考生能在较短时间内高效率地对数学进行全面复习，提高应考能力，我们按照国家教委制订的1997年全国工学、经济学硕士和MBA研究生入学考试《数学考试大纲》的精神，并结合编者多年来指导复习数学的实验经验，编写了本书。

本书由高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步、模拟试题四部分组成。前三部分中，编者对考试大纲所要求的内容作了简明扼要的诠释，并对考研试题中的常见题型进行了例题分析。这样既可以帮助读者对考试大纲规定的内容，特别对重点和难点的内容有一个系统而明晰的了解；也可以帮助读者了解解题的规律，掌握解题的方法与技巧，提高解题能力。第四部分，我们共编排了8套试题，其中数学一8套，数学三和数学四各1套，每套题中各部分所占的比例及题型结构均按照考试大纲的要求编排，题目的内容基本上覆盖了考试大纲的要求，且既有基本题，也有一定数量较难的题。通过演练这些试题，无疑可以提高考生的解题应试能力，也可了解国内研究生入学考试的命题结构和动向。

本书可作为考研应试者的复习用书，也可作为正在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计的辅导读物。此外，还可供讲授有关课程的教师及工程技术人员参考。

本书由王寿生（编写第一章至第四章）、李云珠（编写第五章至第八章）、符丽珍（编写第九章至第十四章）、赵选民（编写第十五章至十八章）分工编写，王寿生任主编，编者按篇章顺序署名。模拟试题是先由各编者分别拟题，然后共同讨论确定。

由于水平所限，书中疏误之处，恳请读者指教。

编　者

1996年5月于西北工业大学

目　录

第一篇　高等数学

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计初步

第四篇　模拟试题

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续

考试内容　函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题的函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$　函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

第一节　函　　数

1.1　关于考试大纲的若干简明诠释

1．函数概念是数学中最重要的基本概念之一，也是高等数学主要的研究对象．应当理解函数的概念，掌握函数的表示方法，会建立简单应用问题中的函数关系式．

2．关于函数概念要注意以下几点：

1）函数概念的本质特征，是确定函数的两个要素：定义域和对应法则．定义域是自变量和因变量能相互联系构成函数关系的条件，无此条件，函数就无意义了．对应法则是正确理解函数概念的关键．函数关系不同于一般的依赖关系，“y是x的函数”并不意味着y随x的变化而变化．函数关系也不同于因果关系．例如一昼夜的气温变化与时间变化是函数关系，但时间变化并不是气温变化的实际原因．

2）表示函数对应法则的记号$f(\quad)$有着广泛的涵义，不要认为它只表示某个数学表达式．只要是对应法则，就可以用它来表示．它可以表示一个或几个数学表达式，也可以表示一个图形、一张表格．

3）根据实际问题建立起来的函数$y=f(x)$的定义域往往与它的自然定义域不完全一致．一个函数的定义域可以是一个区间，也可以是几个区间，甚至可以是一些离散的数．例如函数$y=\sqrt{\sin x-1}$的定义域是一些离散的数：$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$（$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$）．

4）两个函数，当其定义域相同，对应法则一样（即对定义域中每一个值都对应着相同的函数值）时，那么这两个函数是相等的或相同的．

3. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，这里指出以下几个问题：

1）并不是函数都具有这些特性，而是在研究函数时，常要研究函数是否具有这些特性．

2）函数是否“有界”或“单调”，与所论的区间是有关系的．

3）具有奇、偶性的函数的定义域关于原点是对称的．如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(0)=0$. 存在着既是奇函数，又是偶函数的函数：$f(x)=0$. $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法．

4）周期函数的周期通常是指其最小正周期，但不是任何周期函数都有最小正周期．

4. 理解复合函数的概念，会将几个相关联的函数正确地复合成一个复合函数；反过来，也会将一个比较复杂的函数分解成几个相关联的简单函数的复合．应注意的是：

1）函数的复合是有条件的，并不是任何几个函数都可以复合成一个复合函数．

2）一个函数是否为复合函数与该函数的对应法则的表示方法有关．例如函数 $y=1$ 和 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 的对应法则相同，但对应法则的表示方法是不相同的，前者不是复合函数，后者可以看成是由 $y=u^2+v^2, u=\sin x, v=\cos x$ 复合而成的复合函数．

3）复合函数的顺序是不能交换的．例如设 $f(x)=\sqrt{1+x}, \varphi(x)=x^2+5$，则 $f[\varphi(x)]=\sqrt{1+(x^2+5)}=\sqrt{x^2+6}, \varphi[f(x)]=(\sqrt{1+x})^2+5=x+6, f[\varphi(x)]\neq\varphi[f(x)]$.

5. 了解反函数的概念．设 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，因为它们是变量 x 与 y 之间的同一个方程，所以在同一坐标面上它们有同一个图形．但习惯上常把自变量记为 x，因变量记为 y，也即常把函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=\varphi(x)$，这时，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形就与直线 $y=x$ 对称．但应当注意，当变量 x 与 y 有特定的实际意义时，$y=f(x)$ 的反函数就不能记作 $y=\varphi(x)$. 例如 $c=2\pi R$，其中 c 表示圆周的长，R 表示圆的半径，这时反函数只能写成 $R=\dfrac{c}{2\pi}$，不能写成 $c=\dfrac{R}{2\pi}$.

6. 理解分段函数的概念，不能因为它在不同的区间由不同的表达式来表示而误认为是几个函数．此外，对分段函数求函数值时，要注意自变量所在的区间，自变量在哪个区间就要从该区间的表达式中去计算．

分段函数往往不是初等函数，因为它没有用一个数学式子来表示．但不能说分段函数都不是初等函数，例如 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是分段函数，也是初等函数，因为它可以用一个数学式子 $y=\sqrt{x^2}$ 表示．

7. 在自然科学和工程技术中，最常见的函数是初等函数．初等函数是由常数与基本初等函数经过有限次的有理运算与有限次的复合所产生且能用一个解析式表出的函数．应掌握基本初等函数的性质及其图形．

初等函数可分为代数函数与超越函数两类．任何一个函数 $y=f(x)$ 如果满足形如 $p_0(x)y^n+p_1(x)y^{n-1}+\cdots+p_n(x)=0$ 的代数方程，其中 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 均为多项式，称为代数函数．可以证明，有理整函数（多项式）、有理分函数（二多项式之商）及无理函数（除含加、减、乘、除外，还含有根式运算）都是代数函数．如果一个函数不是代数函数，就称为

超越函数．例如指数函数 $y=a^x$，$y=a^{x^3-3x+1}$，对数函数 $y=\ln x$，$y=\ln(\sqrt{x^2+1}+1)$，三角函数 $y=\sin x$，$y=\tan(2x+1)$，反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arctan\sqrt{1-x}$ 等都是超越函数．

8. 非初等函数是指除初等函数以外的函数，通常有如下的形式：

1）通过多个式子表示，例如符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

2）通过无穷级数表示，例如

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}+\cdots$$

3）通过积分表示的函数，例如 $f(x)=\int_1^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\ (x>0)$，等等．

9. 几类常见的经济函数．在生产和经营活动中，成本、收入、利润关于产品的产量或销量 x 的函数关系分别称为总成本函数，记为 $C(x)$；总收入函数，记为 $R(x)$；总利润函数，记为 $L(x)$. 一般说来，$C(x)=$ 固定成本＋可变成本；$R(x)=px$，其中 p 为产品的销售单价，x 为销量；$L(x)=R(x)-C(x)$. 商品的市场需求量和市场供给量相对商品价格 p 的函数关系，分别称为商品的需求函数 $Q(p)$ 和供给函数 $M(p)$. 经济活动中的均衡价格是指使商品需求量等于供应量的价格．

10. 复合函数与分段函数是本节的重点，也是考试的热点.

1.2 若干常见题型的例题分析

例 1 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域 $(a>0)$.

解 由 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，得 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$ 故 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，从而当 $a=1-a$ 即 $a=\frac{1}{2}$ 时，函数仅在 $x=\frac{1}{2}$ 一点有定义；当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，函数的定义域为 $[a,1-a]$；当 $a>\frac{1}{2}$ 时无解，即定义域是空集．

关于求函数的定义域的方法应注意：如果函数是一个抽象的数学式子，则其定义域是使这个式子有意义的一切实数．这时应注意到：(1) 分式的分母不能为零；(2) 偶次根号下应大于或等于零；(3) 对数式的真数应大于零；(4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$，其 $|x|\leqslant 1$；(5) 若函数表达式由几项组成，则其定义域是各项定义域的公共部分；(6) 分段函数定义域是各段定义域的并集．

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, x<1\\ x, x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, x<0\\ x^2-1, x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, \varphi(x)<1\\ \varphi(x), \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$

当 $\varphi(x)<1$ 时，或 $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x<-1\end{cases}$，于是 $x<-1$；或 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2<2\end{cases}$，于是 $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

当 $\varphi(x) \geqslant 1$ 时，或 $x < 0, \varphi(x) = x + 2 \geqslant 1$，即 $\begin{cases} x < 0 \\ x \geqslant -1 \end{cases}$，于是 $-1 \leqslant x < 0$；或 $x \geqslant 0$，$\varphi(x) = x^2 - 1 \geqslant 1$，即 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 \geqslant 2 \end{cases}$，于是 $x \geqslant \sqrt{2}$.

综上所述，知

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x+2, & -1 \leqslant x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leqslant x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1, & \sqrt{2} \leqslant x \end{cases}$$

例 3　求下列函数的反函数.

1) $y = \sqrt{\pi + 4\arcsin x}$

2) $y = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^3, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3^x, & 2 < x \end{cases}$

解　1) 所给函数的定义域及值域分别是 $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ 和 $[0, \sqrt{3\pi}]$. 由 $y = \sqrt{\pi + 4\arcsin x}$ 解得

$$x = \sin \frac{1}{4}(y^2 - \pi)$$

故 $y = \sqrt{\pi + 4\arcsin x}$ 的反函数为

$$y = \sin \frac{1}{4}(x^2 - \pi), \quad x \in [0, \sqrt{3\pi}]$$

2) 当 $x < 1$ 时，$y = x$，故反函数为　$y = x, x \in (-\infty, 1)$

当 $1 \leqslant x \leqslant 2$ 时，$y = x^3$，故反函数为　$y = \sqrt[3]{x}, x \in [1, 8]$

当 $x > 2$ 时，$y = 3^x$，故反函数为　$y = \log_3 x, x \in (9, +\infty)$

综上所述，所求的反函数为

$$y = \begin{cases} x, & x < 1 \\ \sqrt[3]{x}, & 1 \leqslant x \leqslant 8 \\ \log_3 x, & 9 < x \end{cases}$$

例 4　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，且对任意 $x, y \in (-\infty, +\infty)$ 有 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$，证明 $F(x) = f(x) + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

证　任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$，且 $x_2 > x_1$，则由题设条件有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$$

而 $f(x_1) - f(x_2) \leqslant |f(x_2) - f(x_1)| < x_2 - x_1$，所以 $f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$，从而

$$F(x_1) < F(x_2)$$

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

例 5　设在 $[1, +\infty)$ 上，$0 < f'(x) < \frac{2}{x^3}$，证明 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界.

证　因 $0 < f'(x) < \frac{2}{x^3}$，根据积分性质得 $\int_1^x 0\mathrm{d}x < \int_1^x f'(t)\mathrm{d}t < \int_1^x \frac{2}{t^3}\mathrm{d}t\ (x > 1)$，即 $0 < f(x) - f(1) < -\frac{1}{x^2} + 1\ (x > 1)$，也即 $f(1) < f(x) < -\frac{1}{x^2} + 1 + f(1)\ (x > 1)$，所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界.

例 6　证明 $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$ 是奇函数 $(x \in R)$.

证　因为

$$f(x) + f(-x) = \frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1} + \frac{\sqrt{1+x^2}-x-1}{\sqrt{1+x^2}-x+1} = \frac{[(1+x^2)-(x-1)^2]+[(1+x^2)-(x+1)^2]}{(\sqrt{1+x^2}+1)^2 - x^2} = 0$$

所以 $f(-x) = -f(x)$，即 $f(x)$ 是奇函数 $(x \in R)$.

例 7　设 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8 = (2x-1)^8$，求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7$.

解　设 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_8x^8 = (2x-1)^8$，则

$$f(0) = a_0 = 1,\quad f(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_7 + a_8 = 1$$

比较原等式两边 x^8 的系数，得 $a_8 = 2^8$，故

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 1 - a_0 - a_8 = -256$$

例 8　某玩具厂每天生产 60 个玩具，其成本为 300 元，若每天生产 80 个玩具，其成本为 340 元，求其线性成本函数，问每天的固定成本和生产一个玩具的可变成本以及平均成本各多少？

解　设该厂每天玩具产量为 x 个，则其线性成本函数为 $C(x) = a + bx$（单位：元），由已知 $C(60) = 300$，$C(80) = 340$，得方程组

$$\begin{cases} a + 60b = 300 \\ a + 80b = 340 \end{cases}，解之得\quad \begin{cases} a = 180 \\ b = 2 \end{cases}$$

因此，该厂生产成本函数为 $C(x) = 180 + 2x$，每天固定生产成本为 $C(0) = a = 180$ 元，生产一个玩具的可变成本为 $b = 2$ 元，每天生产 x 单位玩具的平均成本为 $\frac{C(x)}{x} = \frac{a}{x} + b$.

例 9　设某商品的需求函数为 $Q_d = 15 - 0.4p$，总成本函数为 $C = 12 + 0.3Q_d$，求该商品总利润对于销售价格的函数.

解　当销售量为 Q_d 时，总收入为

$$R(p) = Q_d p = (15 - 0.4p)p$$

于是总利润对于销售价格的函数为

$$L(p) = R(p) - C(Q_d) = (15 - 0.4p)p - [12 + 0.3(15 - 0.4p)] = 15.12p - 0.4p^2 - 16.5$$

第二节　极　　限

2.1　关于考试大纲的若干简明诠释

1. 极限是高等数学的理论基础，要理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念以及极限