报考研究生复习资料

理工科教学参考用书

高等数学

莫嘉琪 编

安徽师范大学学报编辑部

高 等 数 学

（第二版）

莫嘉琪 编

安徽师范大学学报编辑部

1985.4

序　　言

本书是为报考理工科研究生的学生而编写的，它也可作为在校学生学习“高等数学”，“数学物理方法”，“工程数学”等课程时的教学参考用书.

本书仅是高等数学的一本辅佐资料，它本身不构成完整的独立系统．对于一些常用的定义的叙述，定理的证明和公式的推导一般从略或从简，侧重于提高解题能力方面，通过典型的例题启发读者的解题思路．为此，对于比较浅显的或单纯代公式性的题目一般不予编入.本书也并非对所有内容都面面俱到，而是着重对重点、难点之处分立篇目加以阐述，各部分之间尽量做到相对独立，以便读者取舍.

本书由安徽省数学会副理事长、安徽师范大学名誉系主任雷　垣教授审订.

本书是在安徽省数学会理事长单粹民教授和安徽师范大学学报（自然科学版）编委会以及数学系各位领导同志的关心和主持之下出版的，数学系办公室、资料室和微分方程教研室的许多同志在本书的出版、发行等方面做了大量的工作，在此一并致谢.

由于编者学识肤浅，水平有限，必然有许多缺点和错误，恳望读者指正.

编　　者

1983.7

再 版 序 言

本版对原版本作了某些修正。另外，增加了第十六讲：典型例题综合选编，其中包括近年来各校招收硕士研究生的入学试题中具有代表性的题目。

编　　者

1985.4.

目　　录

前　言

开　篇　预考……………………………………………（1）

高等数学预考试题（A卷）(1)

高等数学预考试题（B卷）(2)

试题A（答卷）(4)

试题B（答卷）(6)

第一讲　求极限…………………………………………（12）

(1)用不等式"夹挤"(13)　(2)用求解方程的方法(14)　(3)利用变量变换法(15)　(4)利用已知极限的结果(16)　(5)用先取对数的方法(17)　(6)利用有关公式、恒等式(18)　(7)利用有关定理(20)　(8)利用求等价量的方法(23)　(9)其它(23)

第二讲　导数的应用……………………………………（24）

一、求导数(24)

二、在分析中的应用(28)

(1)用洛必达法则求极限(28)　(2)利用函数的单调性讨论问题(30)　(3)利用中值定理解决问题(30)　(4)求极值(32)

三、在几何中的应用(34)

(1)作图(34)　(2)曲线(面)的法线和切线(面)(37)　(3)曲率(39)

四、在物理中的应用(41)

第三讲　求不定积分……………………………………（43）

一、有理函数的不定积分(44)

二、换元法(46)

(1)用换元法求无理函数的不定积分（(a) $f(x)=R(x,$

$\sqrt[m]{\frac{Ax+B}{Cx+D}}$) (b) $f(x)=R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ (c) $f(x)=x^m(a+bx^n)^p$)(46) (2)用换元法求超越函数的不定积分((a) $f(x)=R(\cos x,\ \sin x)$ (b)其它)(52)

三、分部积分法(54)

(1)直接求法(54) (2)递推型(55) (3)循环型(56) (4)其它((a) $\varphi(x)$为有理函数，$\varphi'(x)=f(x)$ (b) $\varphi(x)$为无理函数，$\varphi'(x)=f(x)$)(58)

四、不能表达为一个初等函数的不定积分(59)

(1)无理函数的情形(59) (2)超越函数的情形(60)

第四讲 无穷级数……………………………………………(61)

一、正项级数收敛性的判别法(61)

(1)比较判别法(61) (2)达朗贝尔判别法(62) (3)柯西判别法(63) (4)积分判别法(67) (5)一个特殊的判别法(69) (6)两个著名的级数不等式((a)荷尔德不等式 (b)闵可夫斯基不等式)(71)

二、级数的一致收敛性(74)

(1)级数的一致收敛性概说(74) (2)级数一致收敛的判别法((a)外尔斯特拉斯判别法 (b)狄利克莱判别法)(78) (3)级数一致收敛的性质与应用((a)级数和的连续性 (b)逐项求极限 (c)逐项求积分 (d)逐项求导数)(80)

三、幂级数(84)

(1)幂级数概述((a)基本概念 (b)收敛半径的求法)(84) (2)函数按幂级数展开((a)泰勒展开 (b)利用幂级数的代数运算进行展开 (c)利用幂级数的分析运算进行展开)(87)

第五讲 广义积分与含参变量积分……………………………(93)

一、无穷区间广义积分(93)

(1)与无穷级数的联系(94) (2)无穷区间广义积分收敛性的判别法((a)比较判别法 (b)柯西判别法 (c)另一个判别法)(96)

二、无界函数广义积分(98)

(1)无穷区间广义积分与无界函数广义积分的联系(98)　(2)无界函数广义积分的收敛性((a)柯西判别法　(b)平方可积的性质　(c)荷尔德不等式与闵可夫斯基不等式)(99)

三、广义积分的求法(101)

四、含参变量的积分(103)

(1)含参变量积分一致收敛的判别法(103)　(2)含参变量积分的性质与应用((a)交换极限与积分次序　(b)连续性　(c)交换积分次序　(d)交换微分与积分次序)(105)

五、欧拉积分(108)

(1)B-函数的性质(109)　(2)Γ-函数的性质(109)

第六讲　留数及其在定积分计算中的应用 ……………(110)

一、留数定理(110)

(1)留数(110)　(2)留数定理(111)　(3)$z=\infty$的留数(111)　(4)留数的计算方法((a)在极点处的留数　(b)m阶极点的判定　(c)在本性奇点处的留数)(112)

二、留数定理在定积分计算中的应用(115)

(1)有关引理((a)引理1　(b)引理2　(c)引理3　(d)引理4)(115)

(2)几种计算定积分的模型和特例((a) $\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)\,dx$ (b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ (c) $\int_0^{+\infty} F(x)\mathrm{com}x\,dx,\int_0^{+\infty} G(x)\sin mx\,dx$ (d)几个特例)(118)

第七讲　重积分，曲线、曲面积分的计算及应用 ……(129)

一、重积分(130)

(1)用直角坐标计算重积分(130)　(2)用极坐标计算二重积分(132)　(3)用圆柱坐标计算三重积分(136)　(4)用球坐标计算三重积分(139)

二、第一类曲线积分(140)

(1)第一类曲线积分的计算（(a)$\overset{\frown}{AB}$用参数来表示　(b)$\overset{\frown}{AB}$用直角坐标来表示）(140)　(2)在几何、物理中的应用(141)

三、第二类曲线积分(143)

(1)第二类曲线积分的计算（(a)$\overset{\frown}{AB}$用参数来表示　(b)$\overset{\frown}{AB}$用直角坐标来表示）(143)　(2)在几何、物理中的应用(144)

四、曲线积分的两点注记(146)

(1)两类曲线积分的联系(146)　(2)曲线积分与路径无关的条件(146)

五、第一类曲面积分(149)

(1)第一类曲面积分的计算(149)　(2)应用(150)

六、第二类曲面积分(152)

(1)第二类曲面积分的计算(152)　(2)应用(154)　(3)两类曲面积分的联系(154)

七、曲线积分，曲面积分，重积分的联系(155)

(1)三个基本定理((a)格林定理　(b)奥斯特洛格拉特斯基—高斯定理　(c)斯托克斯定理）(155)　(2)几个重要公式（(a)由格林定理可以导出的公式　(b)由奥—高定理可以导出的公式）(156)

第八讲　矢量分析 ……………………………（158）

一、矢量分析概说(158)

(1)矢量的导数(158)　(2)空间曲线几何学(159)　(3)微分算子∇(163)　(4)微分算子公式(164)

二、正交曲线坐标系下的拉普拉斯算子(165)

(1)梯度、散度、旋度的表示式(165)　(2)拉普拉斯算子的表示式（(a)柱坐标系（ρ,φ,z）　(b)极坐标系（ρ,φ）　(c)球坐标系(r,θ,φ)　(d)椭圆—双曲柱坐标系（η,ψ,z））(166)

第九讲　解微分方程 ……………………………（169）

一、几种初等积分法(169)

(1)分离变量法（(a)可分离变量方程　(b)齐次方程　(c)可化为齐次方程的方程）(169)　(2)可化为一阶线性的方程（(a)一阶

线性方程 (*b*)贝努里方程 (*c*)黎卡提方程)(172) (3)恰当方程(全微分方程)((*a*)恰当方程 (*b*)求解方法 (*c*)积分因子)(173) (4)一阶隐式方程($(a)\,y=f(x,y')$型 $(b)\,x=f(y,y')$型 $(c)\,F(x,y')=0$型 $(d)\,F(y,y')=0$型)(178) (5)高阶方程($(a)\,y^{(n)}=f(x)$型 $(b)\,F(x,y^{(n)})=0$型 $(c)\,F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$型 $(d)\,F(y^{(n-2)},y^{(n)})=0$型)(182)

二、线性常微分方程(184)

(1)常系数方程((a)若$f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ (b)若$f(x)=b_0e^{\alpha x}$ (c)若$f(x)=e^{\alpha x}(b_0\cos\beta x+b_1\sin\beta x)$ (d)若$f(x)=e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$(184) (2)变系数方程(186) (3)幂级数解法($(a)\,x=x_0$为方程的解析点 $(b)\,x=x_0$为方程的正则奇点)(188)

三、一阶微分方程组(192)

四、一阶偏微分方程(193)

(1)线性齐次方程(193) (2)拟线性方程(194)

第十讲 富里埃级数展开 ……………………………………(196)

一、正交函数族(196)

二、周期函数的富里埃级数展开(199)

(1)周期为 $2l$ 的函数(199) (2)偶的周期函数(205) (3)奇的周期函数(206)

三、在有限区间上定义的函数展开(208)

(1)在$(-l,l)$上定义的函数(208) (2)在$(0,l)$上定义的函数(210)

四、复数形式的富里埃级数(213)

五、广义富里埃级数(215)

(1)二阶线性常微分方程的本征值问题(215) (2)本征函数族的例(218) (3)按本征函数族展开的例(220)

第十一讲 富里埃变换与拉普拉斯变换及其应用 ……(223)

一、富里埃变换(223)

(1)富里埃积分(223)　(2)富里埃变换(227)　(3)δ-函数(229)
二、富里埃变换的性质(231)
三、富里埃变换的应用(233)
(1)在频谱分析中的应用(233)　(2)在常微分方程中的应用(235)
(3)在数学物理方程中的应用(237)
四、拉普拉斯变换(238)
五、拉普拉斯变换的性质(240)
六、拉普拉斯变换的反演公式(244)
七、拉普拉斯变换的应用(247)
(1)在常微分方程中的应用(247)　(2)在数学物理方程中的应用(250)
第十二讲　解数学物理方程定解问题 ……………………(257)
一、定解问题(257)
二、分离变量法(259)
(1)分离变量法的求解步骤(259)　(2)非齐次方程((a)利用本征函数族展开　(b)利用积分形式转化)(266)　(3)非齐次边界条件的处理(274)　(4)高维的情形((a)拉普拉斯方程　(b)波动方程及热传导方程)(275)
三、达朗贝尔解法(276)
(1)无限长弦的自由振动问题(281)　(2)行波(282)　(3)半无限长弦的自由振动问题(283)　(4)有界弦的振动问题(287)
四、格林函数解法(290)
(1)非齐次波动方程与热传导方程(290)　(2)拉普拉斯方程与泊松方程((a)基本积分公式　(b)泊松方程与拉普拉斯方程第一边值问题的求解公式　(c)格林函数的求法)(294)
第十三讲　保角变换及其应用 ……………………………(308)
一、保角变换(308)
(1)拉普拉斯算符(308)　(2)解析函数变换的保角性(316)　(3)几种常见的保角变换((a)线性变换　(b)分式线性变换　(c)幂

函数变换 (d)根式函数变换 (e)指数函数变换 (f)对数函数变换)(312) (4)许瓦兹——克利斯多菲变换(319)

二、举例与应用(320)

(1)举例(320) (2)应用(325)

第十四讲 特殊函数 ……………………………… (331)

一、勒让德方程及其应用(332)

(1)勒让德方程(332) (2)本征值问题((a)勒让德多项式 (b)正交性 (c)模 (d)按勒让德多项式广义富里埃级数展开)(336)

二、勒让德多项式的母函数及递推公式(339)

(1)母函数(339) (2)递推公式(340) (3)勒让德多项式在解数学物理方程问题中的应用(342)

三、缔合勒让德函数与球函数(344)

(1)缔合勒让德函数(344) (2)按球函数展开(345)

四、贝塞耳方程及其本征值问题(347)

(1)贝塞耳方程(347) (2)本征值问题((a)问题的提出 (b)正交性 (c)模 (d)按贝塞耳函数广义富里埃级数展开)(348)

五、贝塞耳函数的母函数与递推公式(353)

(1)母函数(353) (2)贝塞耳函数的积分形式(353) (3)递推公式(354)

六、虚宗量贝塞耳函数与球贝塞耳函数(356)

(1)虚宗量贝塞耳函数(356) (2)球贝塞耳函数(359)

第十五讲 矢量空间的线性变换与二次型 ……………… (362)

一、矢量空间的线性变换(362)

(1)线性变换(362) (2)解析表达式(364) (3)性质(365)

二、线性变换的特征根理论(366)

(1)线性变换的化简(366) (2)在解微分方程组中的应用(374)

三、内积空间(376)

(1)几个特殊的矢量空间((a)线性赋范空间 (b)内积空间 (c)酉空间 (d)欧几里德空间)(376) (2)酉空间与欧几里德

空间的性质(378) (3)酉变换与正交变换((a)定义 (b)酉方阵(实对称阵)的对角化)(382)
四、实二型的化简(384)
第十六讲 典型例题综合选编……………………………(387)
一、极限(387)
二、一元函数微分(392)
三、一元函数积分(401)
四、多元函数微积分(406)
五、级数(412)
六、微分方程(416)
七、线性代数(419)
八、复变函数与积分变换(423)
九、数学物理方程(428)

开 篇　预 考

下面一套题目，分 A，B 两卷，A 卷 30 分钟完卷，B 卷 120 分钟完卷．本预考主要使您衡量一下您目前所处的数学水平，特别是解题的能力．

高等数学预考试题（A卷）

（30 分钟完卷，共七题，每题 5 分，计 35 分）

一、设 $f(x)$在实轴上定义，$f(x)\neq 0$，$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$，试求 $f(1983)$．

二、已知$f(x)=(x^2-x-2)^9$，试求$\left.\dfrac{d^{10}f(x)}{dx^{10}}\right|_{x=-1}$．

三、设 $\xi=\xi(x,\ y)$，$\eta=\eta(x,\ y)$为$(x,\ y)\to(\xi,\ \eta)$的非奇异变换，$\xi(x,\ y)$，$\eta(x,\ y)$，$u(x,\ y)$均具有直到二阶连续偏导数，试将$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$用新变量$\xi$，$\eta$的偏导数表示．

四、计算定积分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx$，其中 n 为正整数．

五、求复变函数$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2z^3}$在$z=1$邻域的罗朗(Laurant)级数的负一次幂项的系数a_{-1}．

六、求解微分方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2y}{x^2}$．

七、设 a_1，a_2，…，a_n 为互不相等的常数，求证

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

高等数学预考试题（B卷）

（120 分钟完卷，共六题，计 65分）

一、（10分） 计算 泊松(Poisson)—欧拉(Euler)积分：

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

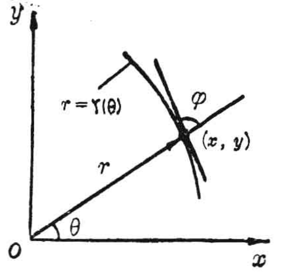
二、（10 分） 设$p>1$， $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，证明不等式：

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geqslant xy \quad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0).$$

（提示：考虑曲线 $y=x^{p-1}$）.

三、（10 分） 设平面上光滑曲线的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，试证曲线上任一点切线与矢径延长线的夹角 φ（如图）满足：

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{r}{r'_\theta}.$$



四、（10分） 试证均匀球内任一定点所受该球的引力与包含此点的球的大小无关（用数学计算方法证明）．

五、（12分） 试求一个正交变换，将实二次型 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 化为归范形式．

六、（13分） 试用电象法求平面上第一象限内拉普拉斯(Laplace)算子在第一边界条件下的格林(Green)函数．

试 题 A（答卷）

（**本答卷要求**：基本概念清楚，方法选择性强，反应快，果断）

一、〔**解**〕 令 $x=1983$，$y=0$，有：

$$f(0)=f(1983)\cdot f(0),$$

便得 $f(1983)=1$.

二、〔**解**〕 $f(x)=(x+1)^9(x-2)^9$， 由莱卜尼兹(Leibniz)求导法则：

$$\left.\frac{d^{10}f(x)}{dx^{10}}\right|_{x=-1}=\left\{[(x+1)^9]^{(10)}(x-2)^9\right.$$

$$\left.\left.+10[(x+1)^9]^{(9)}[(x-2)^9]'\right\}\right|_{x=-1}$$

$$=10\times 9!\times 9\times(-3)^8=3^{10}\times 10!.$$

三、〔**解**〕 $u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x$,

$$u_{xy}=[u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x]_y$$

$$=(u_{\xi\xi}\xi_y+u_{\xi\eta}\eta_y)\xi_x+u_\xi\xi_{xy}$$

$$+(u_{\eta\xi}\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_y)\eta_x+u_\eta\eta_{xy}$$

$$=(\xi_x\xi_y)u_{\xi\xi}+(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)u_{\xi\eta}+(\eta_x\eta_y)u_{\eta\eta}$$

$$+\xi_{xy}u_\xi+\eta_{xy}u_\eta.$$

四、〔**解**〕

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x(\cos x)'dx$$

$$=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\cos^2xdx=2n(I_{n-1}-I_n).$$

故 $$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \cdots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_0.$$

又 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$，因此

$$I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

五、〔**解**〕 $f(z)$ 在 $z=1$ 为二阶极点，故：

$$a_{-1} = \lim_{z \to 1} [(z-1)^2 f(z)]' = \lim_{z \to 1} (-3) z^{-4} = -3.$$

六、〔**解**〕 令 $x = e^t$，即 $t = \ln x$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt},$$

代入原方程，化简得：

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 0.$$

其通解为 $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$，故原方程的通解为：

$$y(x) = C_1 x^{-1} + C_2 x^2.$$

七、〔**证**〕 用反证法.若行列式等于零，则存在不全为零的 C_i $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$，使得：

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_i d_i = 0,$$

其中 $d_i = (a_1^i, a_2^i, \cdots, a_n^i)$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$.故有

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_i a_j^i = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

这与 $n-1$ 次方程 $\sum_{i=0}^{n-1} C_i x^i = 0$ 最多只有 $n-1$ 个单根相矛盾.

所以原行列式不等于零.（证毕）