



普通高等教育“十二五”规划教材

# 大学物理 (下册)

主 编 石永锋 叶必卿  
主 审 张晓波



中国水利水电出版社  
[www.waterpub.com.cn](http://www.waterpub.com.cn)



普通高等教育“十二五”规划教材

# 大学物理

## (下册)

主 编 石永锋 叶必卿  
主 审 张晓波



中国水利水电出版社  
[www.waterpub.com.cn](http://www.waterpub.com.cn)

## 内 容 提 要

本书是根据教育部最新制定的《理工科非物理类专业大学物理课程教学基本要求(讨论稿)》，以大众化教育形式下对人才培养的要求为出发点，针对当前学生的特点编写而成。

本书思路清晰、表述简洁，重视物理思想和物理图像的描述，内容通俗易懂。配有丰富的习题，便于知识点的及时巩固。力争做到近代物理与经典物理的有机结合、物理理论与工程技术实际的有机结合。为了提高物理学的亲和力，每章后附有相关物理学家的生平简介。全书采用国际单位制，所有名词均以全国自然科学名词审定委员会 1988 年公布的基础物理学名词为准。全书共十九章，分为上、下两册，本书为下册，共九章。包括：振动和波动，波动光学，热学和近代物理等内容。

本书可作为高等学校理工科非物理类专业大学物理课程的教材或参考书使用，也可供其他专业和社会读者阅读。

### 图书在版编目(CIP)数据

大学物理. 下册 / 石永锋, 叶必卿主编. — 北京 :  
中国水利水电出版社, 2011.3  
普通高等教育“十二五”规划教材  
ISBN 978-7-5084-8463-1

I. ①大… II. ①石… ②叶… III. ①物理学—高等学校—教材 IV. ①04

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第041539号

|      |                                                                                                                                |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 书 名  | 普通高等教育“十二五”规划教材<br><b>大学物理 (下册)</b>                                                                                            |
| 作 者  | 主编 石永锋 叶必卿 主审 张晓波                                                                                                              |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社<br>(北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038)<br>网址: www.waterpub.com.cn<br>E-mail: sales@waterpub.com.cn<br>电话: (010) 68367658 (营销中心) |
| 经 售  | 北京科水图书销售中心(零售)<br>电话: (010) 88383994、63202643<br>全国各地新华书店和相关出版物销售网点                                                            |
| 排 版  | 中国水利水电出版社微机排版中心                                                                                                                |
| 印 刷  | 三河市鑫金马印装有限公司                                                                                                                   |
| 规 格  | 184mm×260mm 16开本 18印张 427千字                                                                                                    |
| 版 次  | 2011年3月第1版 2011年3月第1次印刷                                                                                                        |
| 印 数  | 0001—4000册                                                                                                                     |
| 定 价  | <b>30.00元</b>                                                                                                                  |

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

# 前言

## QIANYAN

物理学是在人类探索自然奥秘的过程中形成的，是研究物质基本结构、基本运动形式以及物质之间相互作用规律的科学。物理学是从研究物体的机械运动规律开始发展起来的，后来又研究了热现象、电磁现象、光现象和辐射现象等。到了19世纪末物理学已经形成完整的体系，被称为经典物理学。在20世纪初的30年中，物理学经历了一场革命，相对论和量子力学诞生了。从此以后形成的物理学体系称为近代物理学。

物理学是一切自然科学的基础，在探讨物质结构和运动基本规律的进程中，每一次重大的发现和突破都会导致新领域的诞生和新方向的出现，同时也会伴随新的分支学科、交叉学科和新的技术学科的问世。在已经过去的100年间，物理学已经形成若干个系统、清晰的分支学科，例如力学、热学、声学、光学和电磁学等，同时也形成了激光、无线电、微电子、原子能等一些独立学科。我们在大学本科时代学到的知识基本上都是100~400年前的发现，尽管如此，这些古老的基础物理知识与今天乃至未来的人类生活和科技发展仍然有着密切的联系，上至航天技术、下到石油勘探，大到宇宙秘密的探索、小到计算机芯片的研制，样样都离不开物理学的基础作用。甚至似乎与自然科学无关的经济、金融、股票、政治等领域，也有人采用物理学的方法和概念进行研究，并取得令人信服的成果。可见，物理学作为所有自然科学中发展最早、最成熟，理论与实验相辅相成的一门定量化的学科，其成就不仅发展了物理学自身，而且已经成为新技术、新学科、新思维的原动力。物理学始终处在自然科学发展的最前列，它推动着技术的进步和创新，极大地影响着经济和社会的进步。2005年被联合国命名为“国际物理年”，这也是有史以来联合国第一次以单一学科命名的国际年。

随着时代的发展，青年人的兴趣和志向越来越多元化。特别是我国随着高等教育大众化步伐的加快，人才培养模式也随之发生了重大变化。因此，在新形势下为了适应21世纪对高素质人才的需要，如何讲授好大学物理这门课，是摆在高校物理教育工作者面前的首要任务。我们要以现代的观点审视传统的物理教学内容，充分利用各种现代化教育技术手段，将传统文本教学

资源与现代化的动画、图形、图片和视频等教学素材进行全面的整合，在教学中将它们有机地结合起来，使学生获得最佳的学习效果。

本书在编写中充分考虑到了学生的物理基础和学习的实际状况，以“基本要求”中的核心内容作为本书的基本框架，通篇贯彻着“少而精”、“理论联系实际”的原则。在基本概念和基本理论的讲述中，力求简单明了、由浅入深、易读易懂、便于掌握。对于一般性的知识只作简单介绍，交代清楚基本的物理观念、给出重要的结论，再通过典型例子加深对这些结论的理解。对于必要的数学推导，在不失严密的情况下尽量从简，而将主要精力放在培养学生使用数学工具解决实际物理问题的能力。

本教材有意侧重例题、习题和问题的基础性、应用性和典型性的训练。部分题目与实际紧密联系，物理原理清楚，难度适中，有较强的实际应用意义和一定的趣味性。相信这些题目在引起学生操作兴趣的同时，可以加深理解本课程的基础知识和基本概念。本书的习题内容和数量选择尽量与教材内容相配合，也有少量有一定难度的习题，以满足对本课程有浓厚兴趣的学生的需要。

本书加强了与中学物理相关内容的衔接，同时也注意到中学物理课程改革对大学物理课程带来的可能影响。学生在浏览本教材的目录后会发现，书中的力学、热学、光学和电磁学等内容在中学已经学过了。其中的牛顿定律等内容在中学曾经做过很多的练习。但是在大学物理课中，我们将使用全新的数学工具（如微积分、矢量等）去研究这些领域。尽管这些内容学生并不陌生，但是他们仍然要以初学者的心态去认真钻研，必要时也得放弃一些中学时期形成的观念。此外，本教材中还有很多公式，但是它们并不具有同等的重要性，最基本的、核心的公式并不很多。学生应该花费一定的精力理解它们所蕴含的深刻物理意义，弄清楚它们适用于什么物理过程，描述了什么物理现象和物理图像。这些公式也不抽象，它们与我们的生活总是密切相关。如果你再能灵活地利用这些公式去解决实际问题，那么你的大学物理课程就学得相当不错了。

本书由浙江理工大学石永锋和浙江工业大学叶必卿主编，浙江理工大学马春生老师绘制了本教材的部分插图，编写了各章后的科学家史话。浙江理工大学杜娟老师编写了本教材的全部习题。

由于作者水平所限，书中难免存在不当和错误之处，恳请同行专家和读者提出宝贵意见，编者将不胜感激。

编者

2010年10月

于杭州西子湖畔

# 目 录

## M U L U

### 前言

|                        |    |
|------------------------|----|
| 第十一章 机械振动              | 1  |
| 第一节 简谐振动               | 1  |
| 第二节 简谐振动的能量            | 11 |
| 第三节 两个同方向、同频率简谐振动的合成   | 12 |
| 第四节 两个相互垂直的、同频率简谐振动的合成 | 15 |
| 第五节 阻尼振动 受迫振动 共振       | 17 |
| 习题                     | 23 |
| 科学家史话 惠更斯              | 26 |
| 第十二章 机械波               | 28 |
| 第一节 机械波的产生和传播          | 28 |
| 第二节 平面简谐波的波函数          | 34 |
| 第三节 波的能量 波的强度          | 40 |
| 第四节 惠更斯原理 波的衍射、反射和折射   | 43 |
| 第五节 波的叠加原理 波的干涉        | 46 |
| 第六节 驻波                 | 50 |
| 第七节 多普勒效应              | 56 |
| 习题                     | 60 |
| 科学家史话 多普勒              | 64 |
| 第十三章 光的干涉              | 65 |
| 第一节 相干光及获得 光程差         | 65 |
| 第二节 杨氏双缝干涉             | 69 |
| 第三节 薄膜干涉               | 77 |
| 第四节 等厚干涉               | 83 |
| 第五节 迈克尔逊干涉仪            | 89 |
| 习题                     | 91 |
| 科学家史话 托马斯·杨            | 93 |

|                      |     |
|----------------------|-----|
| <b>第十四章 光的衍射</b>     | 95  |
| 第一节 光的衍射现象 惠更斯—菲涅耳原理 | 95  |
| 第二节 夫琅禾费单缝衍射         | 97  |
| 第三节 衍射光栅             | 102 |
| 第四节 圆孔衍射 光学仪器的分辨率    | 108 |
| 第五节 X射线的衍射           | 110 |
| 习题                   | 113 |
| 科学家史话 迈克尔逊           | 115 |
| <b>第十五章 光的偏振</b>     | 117 |
| 第一节 自然光和偏振光          | 117 |
| 第二节 起偏与检偏 马吕斯定律      | 119 |
| 第三节 布儒斯特定律           | 122 |
| 第四节 光的双折射            | 124 |
| 第五节 偏振光的干涉           | 130 |
| 第六节 旋光现象             | 134 |
| 习题                   | 136 |
| 科学家史话 玻尔             | 139 |
| <b>第十六章 气体动理论</b>    | 141 |
| 第一节 气体动理论的基本概念       | 141 |
| 第二节 气体的状态参量 理想气体状态方程 | 143 |
| 第三节 理想气体的压强公式        | 146 |
| 第四节 能量均分定理 理想气体的内能   | 151 |
| 第五节 气体分子速率分布规律       | 156 |
| 第六节 玻尔兹曼分布律          | 160 |
| 第七节 分子碰撞             | 162 |
| 习题                   | 164 |
| 科学家史话 开尔文            | 166 |
| <b>第十七章 热力学</b>      | 169 |
| 第一节 功 热量 内能          | 169 |
| 第二节 热力学第一定律          | 172 |
| 第三节 气体的热容            | 177 |
| 第四节 理想气体的绝热过程        | 180 |
| 第五节 循环过程 卡诺循环        | 185 |
| 第六节 热力学第二定律          | 193 |
| 第七节 卡诺定理             | 195 |
| 第八节 熵 热力学第二定律的统计意义   | 196 |

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| 习题·····                     | 201 |
| 科学家史话 卡诺·····               | 206 |
| <b>第十八章 狭义相对论基础</b> ·····   | 208 |
| 第一节 伽利略相对性原理 经典力学时空观 ·····  | 208 |
| 第二节 狭义相对论的基本原理及其时空观 ·····   | 211 |
| 第三节 洛伦兹坐标变换及其速度变换 ·····     | 219 |
| 第四节 狭义相对论动力学基础 ·····        | 224 |
| 习题·····                     | 229 |
| 科学家史话 爱因斯坦·····             | 231 |
| <b>第十九章 量子物理基础</b> ·····    | 233 |
| 第一节 热辐射 普朗克量子假设 ·····       | 233 |
| 第二节 光电效应 爱因斯坦方程 ·····       | 236 |
| 第三节 康普顿效应 ·····             | 242 |
| 第四节 氢原子光谱 玻尔的氢原子理论 ·····    | 246 |
| 第五节 实物粒子的波动性 ·····          | 252 |
| 第六节 不确定关系 ·····             | 256 |
| 第七节 波函数 薛定谔方程 ·····         | 257 |
| 第八节 一维定态问题 ·····            | 261 |
| 第九节 氢原子的量子力学处理介绍 ·····      | 266 |
| 第十节 多电子原子 原子的壳层结构 ·····     | 268 |
| 习题·····                     | 270 |
| 科学家史话 薛定谔、海森伯·····          | 273 |
| <b>附录 原子中电子按壳层排布表</b> ····· | 276 |
| <b>参考文献</b> ·····           | 279 |



# 第十一章 机械振动

物体在一定位置附近来回往复的运动称为机械振动 (mechanical vibration)。例如钟摆的来回摆动、活塞在气缸中的往复运动、拍皮球时皮球的上下运动等都是机械振动。其实振动现象很普遍, 不仅仅限于机械振动。振荡电路中电流、电容器极板上的电量等的变化, 电磁波中电场强度、磁场强度的变化, 与机械振动相比, 它们的物理本质完全不同, 但是它们的变化规律和数学描述却非常相似, 所以, 只要描述物体运动状态的某一个物理量在某一数值附近做周期性的变化, 都称为振动 (vibration)。在所有振动中, 最简单、最基本的振动是简谐振动, 任何复杂的振动都可以认为是由几个简谐振动合成的。

本章主要介绍有关简谐振动和简谐振动合成的一些基本知识, 在此基础上, 简要介绍一下阻尼振动和受迫振动。

## 本章学习要点

- (1) 熟练掌握描写简谐振动的各个物理量的物理意义、相互关系以及计算方法。熟练掌握简谐振动的基本特征, 能根据给定的初始条件建立一维简谐振动方程, 充分理解其物理意义。
- (2) 熟练掌握简谐振动的旋转矢量分析法, 并能用其分析、解决有关问题。
- (3) 掌握简谐振动的能量特点。
- (4) 掌握两个同方向、同频率简谐振动的合成规律和合振动出现振幅最大和最小的条件。了解两个互相垂直的同频率简谐振动的合成规律。
- (5) 了解阻尼振动、受迫振动和共振的基本知识, 知道发生共振的条件, 会用它们解释相关的实际现象。

## 第一节 简谐振动

### 一、简谐振动

#### 1. 简谐振动的描述

物体在运动过程中, 如果离开平衡位置的位移 (或角位移等) 按余弦函数 (或正弦函数) 的规律随时间变化, 就称这种运动为简谐振动 (simple harmonic oscillation)。将作简谐振动的物体叫做谐振子 (harmonic oscillator)。弹簧振子的运动是简谐振动的典型例子。如图 11-1 所示, 一根质量可以忽略的轻弹簧的一端固定, 另一端拴一个物体, 物体可以在光滑水平面上左右运动, 这样的力学系统就是弹簧谐振子系统, 简称弹簧振子。



下面以弹簧振子为例,研究简谐振动的运动规律。弹簧没有任何形变时,物体位于 $O$ 点。物体在这个位置时,在水平方向不受力,是物体的平衡位置。在研究简谐振动时,通常取平衡位置为选定坐标系的坐标原点,在物体振动方向上建立坐标系。在图 11-1 中,物体在水平方向振动,因此建立了正方向向右的 $x$ 坐标系。

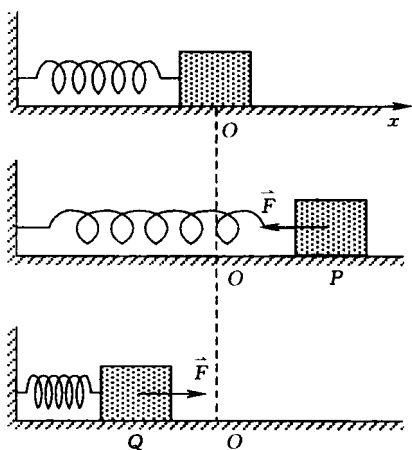


图 11-1

下面先来定性地分析一下物体的运动规律。将物体向右稍微拉离平衡位置到 $P$ 点,然后释放,在弹性力作用下物体向平衡位置 $O$ 运动的过程中,弹力不断减小,速度不断增大,在到达平衡位置之前,物体受到的弹力方向始终指向平衡位置 $O$ 。物体到达平衡位置时,尽管弹力减小到零,但由于惯性物体并没有停下来,而是继续向前运动,不过这时弹力是阻碍物体运动的,使物体的速度越来越小,在 $Q$ 点减小为零,物体在离开平衡位置到达 $Q$ 点之前,受到的弹力方向也是始终指向平衡位置 $O$ 的。接着物体又在弹力作用下,沿着相反的方向重复上述运动过程。在返回至出发点时,物体完成了一次全振动,以后又开始下一次振动。这样,物体就在弹力的作用下,在平衡位置附近往复运动。

物体作上述运动的根本原因,在于物体在运动过程中受到了弹簧弹力的作用。现在就从这个角度出发,定量地研究弹簧振子的运动规律。

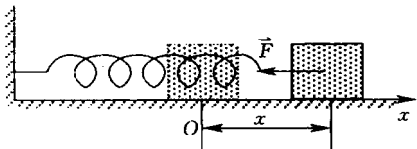


图 11-2

如图 11-2 所示,物体在任意时刻所处的位置相对于坐标原点 $O$ 的位移为 $x$ ,物体在这个位置受到的胡克力 $F$ 与位移 $x$ 成正比,方向始终与位移 $x$ 的方向相反,并且指向平衡位置,因此

$$F = -kx \quad (11-1)$$

公式中 $k$ 为弹簧的劲度系数,在下一章我们将会谈到,弹簧的劲度系数 $k$ 与弹簧的材料、长度和横截面积有关。公式中的负号表示物体受到的弹力方向与物体的位移方向相反。通常称式(11-1)为简谐振动的动力学特征。

物体的质量为 $m$ ,设其在弹力 $F$ 的作用下产生的加速度为 $a$ ,由牛顿第二定律得

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x \quad (11-2)$$

对于给定的弹簧振子, $k$ 与 $m$ 均为常量,令

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad (11-3)$$

式(11-2)可以写成

$$a = -\omega^2 x \quad (11-4)$$

式(11-4)表明,作简谐振动的物体的加速度大小与位移成正比,方向与位移方向相反。可见,简谐振动是一种变速直线运动。通常称式(11-4)为简谐振动的运动学



特征。

在第一章中曾讲过，物体只在  $x$  轴上运动时，其加速度可以表达为  $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$ ，将其代入式 (11-4)，得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (11-5)$$

式 (11-5) 称为简谐振动的微分方程。它是二阶常系数齐次线性微分方程，其解为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (11-6)$$

式中： $A$ 、 $\omega$  为积分常数。

式 (11-6) 称为简谐振动方程。

由于  $\cos(\omega t + \varphi) = \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ ，如果令  $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$ ，则式 (11-6) 可以改写为

$$x = A \sin(\omega t + \varphi')$$

因此简谐振动方程也可以用正弦函数表达。为了说明问题方便，本教材采用余弦函数表达简谐振动方程。

## 2. 简谐振动的速度和加速度

物体的简谐振动既然是一种变速直线运动，将简谐振动方程式 (11-6) 对时间  $t$  求一阶导数和二阶导数就可以得到振动物体的速度和加速度，即

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = -v_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (11-7)$$

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -a_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (11-8)$$

$$v_m = \omega A$$

$$a_m = \omega^2 A$$

式中： $v_m$  为速度的最大值； $a_m = \omega^2 A$  为加速度的最大值。

将式 (11-7) 和式 (11-8) 改写为

$$v = v_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = a_m \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

由式 (11-6) 和以上两式可以看出，作简谐振动的物体的位移、速度和加速度都是关于时间  $t$  的余弦函数。以时间  $t$  为横坐标，位移  $x$ 、速度  $v$  和加速度  $a$  为纵坐标，并且设  $\varphi = 0$ ，即可作出如图 11-3 所示的  $x-t$ 、 $v-t$  和  $a-t$  曲线。由曲线可以看出，物体作简谐运动时，其位移、速度和加速度都作周期性变化，不过变化步调不一致，当位移  $x$  达到正最大值  $A$  时，速度  $v = 0$ ，加速度  $a$  为负的最大值  $-\omega^2 A$ ；而位移  $x = 0$  时，速度的绝对值  $|v|$  最大，等于  $\omega A$ ，加速度  $a = 0$ 。特别注意到，式 (11-4) 和式 (11-8) 其实是等价的，即作一维简谐振动的物体的加速

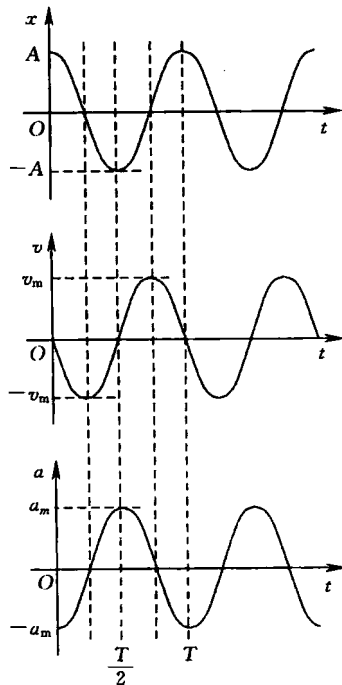


图 11-3



度与位移成正比，而方向相反，这一点在图 11-3 中明显地表达出来了。

## 二、简谐振动的特征量

### 1. 振幅

在简谐振动方程式 (11-6) 中，由于  $-1 \leq \cos(\omega t + \varphi) \leq 1$ ，因此  $-A \leq x \leq A$ ，或  $|x| \leq A$ 。可见， $A$  表示振动物体离开平衡位置的最大位移的绝对值，称为简谐振动的振幅 (amplitude)。其国际 (SI) 单位为 m。

振幅是描述谐振子振动强弱的物理量。

### 2. 周期、频率和角频率

谐振子作一次完全振动所需要的时间称为简谐振动的周期 (period)，用符号  $T$  表示。其 SI 单位为 s。余弦函数的周期为  $2\pi$ ，由于

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi + 2\pi) = \cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right]$$

周期性函数的定义为  $f(x) = f(x + X)$ ，因此简谐振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (11-9)$$

谐振子在单位时间内作完全振动的次数称为简谐振动的频率 (frequency)，用符号  $\nu$  表示。由于谐振子作一次完全振动用的时间为  $T$ ，因此在单位时间内谐振子作完全振动的次数为  $1/T$ ，即

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (11-10)$$

在 SI 单位中，频率的单位为 Hz (赫兹)， $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$ 。

由式 (11-10) 可以看出， $\omega$  与频率  $\nu$  成正比，因此  $\omega$  也具有频率的意义。它表示谐振子在  $2\pi\text{s}$  内作全振动的次数，称为简谐振动的角频率 (angular frequency) 或圆频率 (circular frequency)。显然

$$\omega = 2\pi\nu \quad (11-11)$$

在 SI 单位中，角频率的单位为 rad/s (弧度每秒) 或  $\text{s}^{-1}$ 。

周期、频率和角频率是描述谐振子振动快慢程度的物理量。周期越小、频率和角频率越大，谐振子振动的越快。

在已知弹簧的劲度系数  $k$  和谐振子质量  $m$  的情况下，由式 (11-3) 得谐振子振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11-12)$$

对应一定的振动系统， $k$  和  $m$  是确定的，对应的角频率也就唯一确定了，与外界因素无关，因此称为固有角频率 (natural angular frequency)。与之对应的固有周期 (natural period) 和固有频率 (natural frequency) 分别为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (11-13)$$



$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11-14)$$

考虑到角频率与周期和频率存在关系式 (11-9)、式 (11-11), 简谐振动方程的还可以写成如下两种形式:

$$x = A \cos(2\pi\nu t + \varphi) \quad (11-15)$$

$$x = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) \quad (11-16)$$

### 3. 相位

在第一章讨论过, 物体在某一位置或在某一时刻的运动状态是由位置矢量和运动速度确定的。由简谐振动方程式 (11-6) 和简谐振动速度表达式 (11-7) 可以看出, 一旦  $(\omega t + \varphi)$  确定了, 谐振子的位置  $x$  和运动速度  $v$  也就唯一确定下来, 因此可以用  $(\omega t + \varphi)$  来描述谐振子的运动状态,  $(\omega t + \varphi)$  称为谐振子在  $t$  时刻的相位 (phase)。在谐振子作一次全振动的过程中, 在不同时刻运动状态不同, 每一个运动状态都有相应的相位值与之对应。

$t=0$  时的相位值为  $\varphi$ , 称为初相位 (initial phase), 简称初相。初相决定于谐振子开始时刻的运动状态。

## 三、振幅及初相的决定

谐振子在  $t=0$  时的位移  $x_0$  和速度  $v_0$  称为谐振子作简谐振动的初始条件。由式 (11-6) 和式 (11-7) 可容易得到

$$x_0 = A \cos \varphi$$

$$v_0 = -A\omega \sin \varphi$$

对于一个确定的振动系统, 其角频率  $\omega$  是已知的, 由以上两式容易得到简谐振动的振幅为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (11-17)$$

初相  $\varphi$  要通过以下两个步骤求出。首先由  $\cos \varphi = \frac{x_0}{A}$  求得  $\varphi$  的两个可能值, 然后再由  $\sin \varphi = -\frac{v_0}{A\omega}$  的符号决定  $\varphi$  的取舍。

通常初相  $\varphi$  的取值范围为  $0 \leq \varphi < 2\pi$  或  $-\pi \leq \varphi < \pi$ , 在实际运算中, 由三角函数的知识很容易判断出, 采用  $-\pi \leq \varphi < \pi$  的取值方法更为方便。

**【例 11-1】** 有一个质量为 0.25kg 的物体, 在弹簧弹力作用下沿着  $x$  轴运动, 平衡位置在  $x$  轴的坐标原点。已知弹簧的劲度系数为 25N/m:

(1) 求振动角频率和周期。

(2) 如果振幅等于 0.15m, 开始时物体位于 0.075m 处, 并且物体沿着  $x$  轴的反向运动, 求初速度和初相。

(3) 写出简谐振动方程。

**解:** (1) 简谐振动的角频率为



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad/s}$$

简谐振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.63 \text{ s}$$

(2) 由式  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$  得

$$v_0 = \pm \omega \sqrt{A^2 - x_0^2}$$

由题意可知,  $A = 0.15 \text{ m}$ , 在  $t = 0$  时,  $x_0 = 0.075 \text{ m}$ ,  $v_0 < 0$ , 因此初速度为

$$v_0 = -1.3 \text{ m/s}$$

由于

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{A} = \frac{1}{2}$$

因此

$$\varphi = \pm \frac{1}{3}\pi$$

由于  $v_0 < 0$ ,  $\sin\varphi = -\frac{v_0}{A\omega} > 0$ , 因此初相为

$$\varphi = \frac{1}{3}\pi$$

(3) 简谐振动方程为

$$x = 0.15 \cos\left(10t + \frac{1}{3}\pi\right) \text{ m}$$

#### 四、简谐振动的旋转矢量描述法

前面采用微积分的方法描述了简谐振动, 现在将采用另外一种数学方法——旋转矢量描述法描述简谐振动。

如图 11-4 所示, 首先建立  $x$  坐标轴, 其坐标原点为  $O$ 。从  $O$  点出发作矢量  $\vec{A}$ , 使其

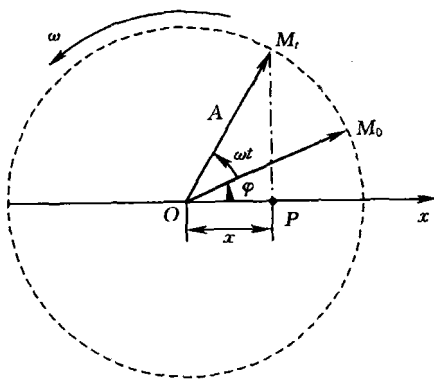


图 11-4

长度等于简谐振动的振幅。使矢量  $\vec{A}$  以匀角速度  $\omega$  沿逆时针方向做圆周运动。矢量  $\vec{A}$  刚刚开始转动 ( $t = 0$ ) 时与  $x$  轴的夹角为  $\varphi$ , 使这个角度等于简谐振动的初相。经过时间  $t$  矢量  $\vec{A}$  转过的角度为  $\omega t$ 。将这样的矢量  $\vec{A}$  称为**旋转矢量** (rotating vector)。旋转矢量  $\vec{A}$  绕  $O$  点旋转时, 其末端点  $M$  的运动轨迹是以  $O$  点为圆心、以  $A$  为半径的圆周, 称为**参考圆**。

当旋转矢量  $\vec{A}$  绕  $O$  点沿逆时针作匀速圆周运



动时，其末端点  $M$  在  $x$  轴上的投影点  $P$  在  $O$  点附近往复运动，在任意时刻  $P$  点相对于  $O$  点的位移为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

上式恰好等于简谐振动方程。也就是说， $P$  点以  $O$  点为平衡位置，在  $x$  轴上作简谐振动。这种研究简谐振动的方法称为简谐振动的**旋转矢量描述法**。

综上所述，简谐振动的旋转矢量描述法将简谐振动的特征量直观地表示出来了。旋转矢量的长度等于简谐振动的振幅，旋转矢量的角速度等于简谐振动的角频率，旋转矢量与  $x$  轴的夹角等于简谐振动的相位， $t=0$  时旋转矢量与  $x$  轴的夹角等于简谐振动的初相。

旋转矢量描述法既然是描述简谐振动的另外一种数学方法，当然可以用这种方法直接得出简谐振动的速度和加速度表达式，有兴趣的读者可以动手尝试一下。

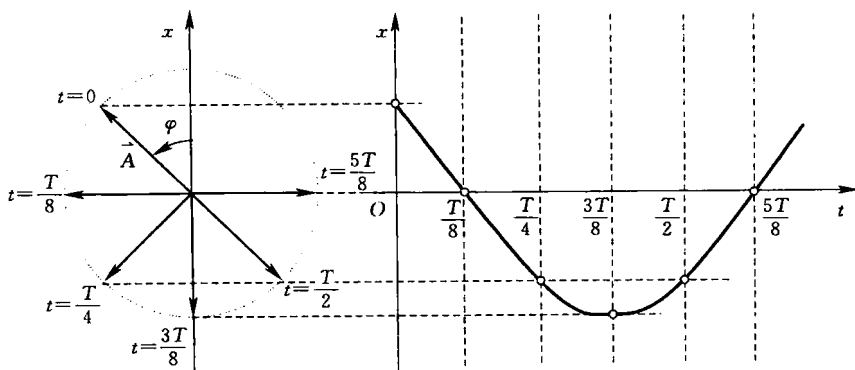


图 11-5

利用旋转矢量可以绘制简谐振动曲线，如图 11-5 所示。理解好简谐振动曲线的绘制方法，对利用旋转矢量解决实际问题非常有帮助。在图 11-6 中，给出了谐振子在四个特殊初始位置的初相值，以及与之对应的旋转矢量图和简谐振动曲线。事实上，在求解

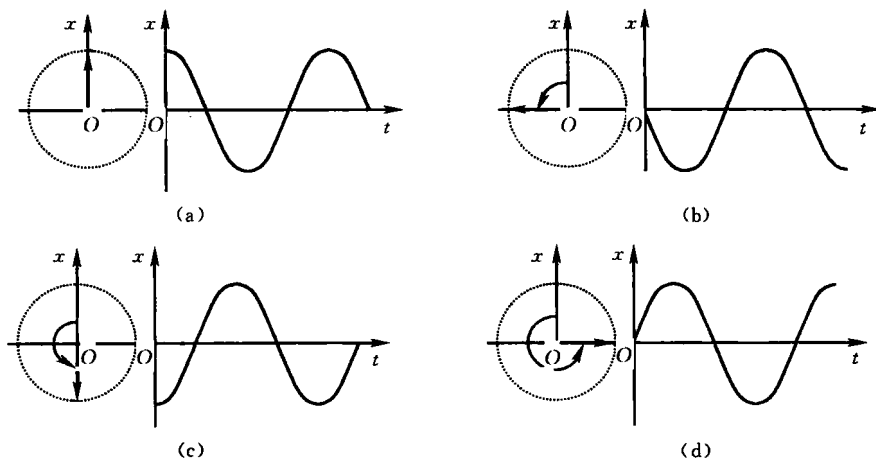


图 11-6

(a)  $\varphi=0$ ; (b)  $\varphi=\pi/2$ ; (c)  $\varphi=\pi$  (或  $\varphi=-\pi$ ); (d)  $\varphi=3\pi/2$  (或  $\varphi=-\pi/2$ )



简谐振动的初相时,利用旋转矢量求解比用公式法求解要直观、简单,在后面的例题中读者注意体会这一点。

**【例 11-2】** 一个质量为  $0.01\text{kg}$  的物体作简谐运动,其振幅为  $0.04\text{m}$ ,周期为  $4\text{s}$ ,开始时物体处在  $x=0.02\text{m}$  处,并且正向  $x$  轴的负方向运动。试求:

- (1) 在  $1.0\text{s}$  时物体所处的位置和所受的力。
- (2) 物体由初始位置运动到  $x=-0.02\text{m}$  处所需要的最短时间。

**解:** (1) 先来求解简谐振动方程。由于已知了振幅  $A=0.04\text{m}$  和周期  $T=4\text{s}$ , 因此只要解出初相就可以得到简谐振动方程。

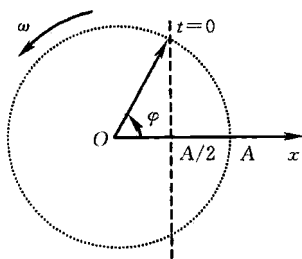


图 11-7

根据题意画出如图 11-7 所示的旋转矢量, 因为

$$\cos\varphi = \frac{A/2}{A} = \frac{1}{2}$$

所以初相为

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

由式 (11-16) 得该简谐振动的振动方程为

$$x = 0.04\cos\left(2\pi\frac{t}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 0.04\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)\text{m}$$

1.0s 时物体所处的位置为

$$x_1 = -0.04\sin\frac{\pi}{3} = -0.035\text{m}$$

由式 (11-4) 得 1.0s 时该谐振子的加速度为  $a_1 = -\omega^2 x_1$ , 因此, 此刻谐振子所受的力为

$$F_1 = ma_1 = -m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x_1 = 8.55 \times 10^{-4}\text{N}$$

力  $F_1$  的方向沿  $x$  轴正方向指向平衡位置。

(2) 设谐振子由起始位置运动到  $x=-0.02\text{m}$  处所需的最短时间为  $\Delta t$ 。根据题意画出如图 11-8 所示的旋转矢量。由图容易得出谐振子第一次到达  $x=-0.02\text{m} = -A/2$  处时, 旋转矢量转过的角度为  $\pi/3$ , 因此

$$\omega\Delta t = \frac{\pi}{3}$$

所以谐振子由起始位置运动到  $x=-0.02\text{m}$  处所需的最短时间为

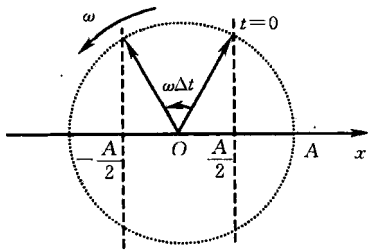


图 11-8

$$\Delta t = \frac{\pi/3}{\omega} = \frac{\pi}{3} \frac{T}{2\pi} = \frac{T}{6} = 0.67\text{s}$$

你能求出该谐振子由起始位置第二次、第三次、……运动到  $x=-0.02\text{m}$  处所需的时间吗?

**【例 11-3】** 如图 11-9 (a) 所示, 卷扬机上吊着一个质量为  $3 \times 10^3\text{kg}$  的重物, 正以  $3\text{m/s}$  的匀速度上升, 钢绳的上端因故突然被卡住。已知钢绳的劲度系数为  $27 \times 10^5\text{N/m}$ , 忽略钢绳的质量, 求重物此后的运动方程。

**解:** 钢绳上端刚被卡住时重物受到平衡力, 选择此处为  $x$  坐标的原点, 向上为坐标





的正方向,如图 11-9 (b) 所示。

重物在竖直方向作简谐振动。由式 (11-12) 得重物振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 30 \text{ rad/s}$$

重物在平衡位置的速度最大,由于  $v_0 = A\omega$ , 因此重物作简谐振动的振幅为

$$A = \frac{v_0}{\omega} = 0.1 \text{ m}$$

由于初始时刻重物处在平衡位置,并且正在向  $x$  坐标轴的正方向运动,因此重物作简谐振动的初相为

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

由式 (11-6) 得重物此后的运动方程为

$$x = 0.1 \cos\left(30t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

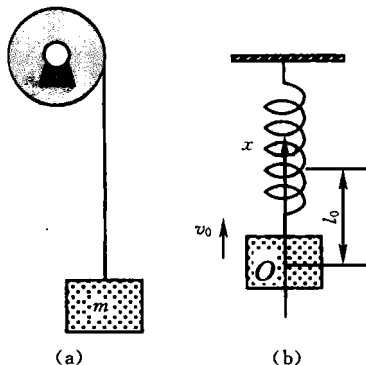


图 11-9

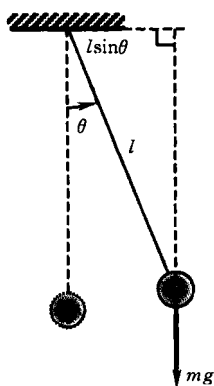


图 11-10

**【例 11-4】** 如图 11-10 所示,一根不可伸长的绳上端固定,下端悬挂一个小球。使小球稍稍偏离平衡位置后释放,小球就在铅直平面内在平衡位置附近来回摆动。这一系统称为单摆 (simple pendulum)。证明单摆的运动为简谐振动,并求其振动的周期。

**证明:** 运用刚体定轴转动的转动定律  $M = J\alpha$  证明本题题。

小球在任意位置所受的力矩为

$$M = -mgl \sin \theta$$

式中负号表示重力矩阻碍小球向正角位移方向摆动。由于小球作小角度摆动,因此  $\sin \theta \approx \theta$ , 上式可以改写为

$$M = -mgl\theta$$

小球对悬点的转动惯量为

$$J = ml^2$$

在刚体定轴转动定律中,  $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , 因此

$$-mgl\theta = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{或} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

令

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

上式可以改写为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

可见,小球的小角度摆动满足简谐振动微分方程,因此单摆的运动是简谐振动。其振动的周期为