高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

2013

考研数学历年真题解析

（数学三适用）

● 全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

● 主审　张宇　王莉

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

考研数学历年真题解析

（数学三适用）

2013

● 全国硕士研究生入学
统一考试辅导用书编委会
● 主审 张宇 王莉

KAOYAN SHUXUE
LINIAN ZHENTI JIEXI (SHUXUE SAN SHIYONG)

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

本书特色

分析历年真题中涉及的数学基本知识和公式、概念，归纳基本运算方法，以利于考生理出知识框架。在试题解析中，指出了试题考查的知识点，以利于备考生明确试题的立意。对部分试题给出了考生的典型运算错误及错误产生的原因，以利于备考生防范。对部分试题给出了特殊解题技巧或试题的可能变化形式，或对试题中某些条件的作用进行解说，或指出某些题目在命制时出于考查知识点或难度等因素而有意放宽题设条件等说明，目的是利于考生深入复习。

适用范围

适合经管类的考生在考研数学的整个复习阶段使用。

图书在版编目（CIP）数据

考研数学历年真题解析／全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编.--北京：高等教育出版社，2012.4

数学三适用

ISBN 978-7-04-034636-7

Ⅰ.①考… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 045282 号

策划编辑 刘 佳 责任编辑 张耀明 封面设计 王凌波 责任校对 杨雪莲

责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	9.5	版 次	2012年4月第1版
字 数	220 000	印 次	2012年4月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	20.00元

物 料 号 34636-00

2010年以来，我国报考硕士研究生的考生呈逐年增加的趋势。另一方面，教育部对硕士研究生的数学知识，能力与素质的要求亦更加明确，表现在数学试题上更加规范化。编者通过从事考研辅导及日常的教学工作中了解到，考生由于所学的专业不同，对数学知识的要求各不一样，使用的教材也参差不齐，给参加考试带来难度，所以希望有一本基础知识系统、讲解精练、重点突出及针对性强的数学复习资料。

本书是为参加全国硕士研究生入学统一考试的考生所编写的一本数学复习资料。其目的旨在帮助考生加强与巩固基础知识、了解试题的变化趋势与动态、掌握解决数学问题的基本手段与方法、总结规律性的论证与运算技巧等。以期达到提高考生的应试能力。

本书内容由两大部分组成，第一部分为2003年至2012年全国硕士研究生入学统一考试数学试题。第二部分为这十年试题的解析，内容包括试题答案、考点、解题思路与步骤、试题解析、解题技巧、典型错误、评注、拓展变化及应试对策等内容。

为提高使用效果，达到编者的预期目的，建议考生在阅读本书时注意如下几方面事项：

1. 考点是按教育部考试中心颁布的《数学考试大纲》的内容与要求编写。通过这部分内容考生一方面要掌握该题所涉及的主要概念、方法与理论，另一方面要根据不同的概念、方法与理论出现的频率熟悉考试的重点内容。

2. 解题思路与步骤方面也应根据两类不同题型的特点区别对待。对于客观性试题(选择题与填空题)，由于只要结果无需过程，对不同的解法、不同角度的处理方法的掌握是更重要的。而对于解答题(计算题、证明题、应用题及综合问题)，对解题的过程与步骤的掌握又显得更为重要。在历年评卷中，这些主要步骤都是采分点。

3. 试题解析与解题技巧方面，读者要善于认识与掌握其规律性，如积分的计算技巧中，关于被积函数的奇偶性及区间(域)的对称性所具有的性质几乎每年试题都涉及，建议考生将这部分的规律性结果，即对于重积分、曲线(曲)积分计算的相应方法归纳总结，系统掌握。

4. 易错点评或典型错误是我们多年参与评卷工作而总结出的问题，值得借鉴。

5. 拓展变化与应试对策方面，本书多以注解的形式给出，这部分内容对提高考生的认识高度与解题能力是非常有效的，应是重点掌握的内容。

我们希望读者能够按上述建议，充分利用好本书，以期达到在短时间内提高效率、了解试题变化动态、提高应试能力的目的。本书也可作为全日制高等学校的低年级本科生学习的课外参考资料。本书在编写过程中得到了张宇老师、王莉老师的悉心指导，以及李播和跨考教育考研团队的支持，在此深表感谢！

编　者

2012年3月

目 录

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题(第 1 ~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.　　(D) $(-1)^n n!$.

(3) 设函数 $f(t)$ 连续,则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)r\mathrm{d}r=$

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$.

(4) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛,则

(A) $0<\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\dfrac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$.　　(C) $1<\alpha\leqslant\dfrac{3}{2}$.　　(D) $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布,则 $P\{X^2+Y^2\leqslant 1\}=$

(A) $\frac{1}{4}$.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{\pi}{8}$.　　(D) $\frac{\pi}{4}$.

(8) 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本,则统计量 $\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为

(A) $N(0,1)$.　　(B) $t(1)$.　　(C) $\chi^2(1)$.　　(D) $F(1,1)$.

二、填空题(第 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$__________.

(10) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x},x\geqslant 1,\\2x-1,x<1,\end{cases}$ $y=f(f(x))$,则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=$__________.

(11) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$,则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$__________.

(12) 由曲线 $y=\frac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=3$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $|\boldsymbol{BA}^*|=$__________.

(14) 设 A,B,C 是随机事件,A 与 C 互不相容,$P(AB)=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{1}{3}$,则 $P(AB|\overline{C})=$__________.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$,$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

(17)(本题满分 10 分)

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10 000(万元). 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x(件)和 y(件),且这两种产品的边际成本分别为 $20+\frac{x}{2}$(万元/件)与 $6+y$(万元/件).

(Ⅰ) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$(万元);

(Ⅱ) 当总产量为 50 件时,甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小? 求最小成本;

(Ⅲ) 求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本,并解释其经济意义.

(18)(本题满分 10 分)

证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

(19)（本题满分10分）

已知函数$f(x)$满足方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$及$f''(x)+f(x)=2e^x$.

（Ⅰ）求$f(x)$的表达式；

（Ⅱ）求曲线$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,dt$的拐点.

(20)（本题满分11分）

设$A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）计算行列式$|A|$；

（Ⅱ）当实数a为何值时，方程组$Ax=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，并求其通解.

(21)（本题满分11分）

已知$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T(A^TA)\boldsymbol{x}$的秩为2.

（Ⅰ）求实数a的值；

（Ⅱ）求正交变换$\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$将$f$化为标准形.

(22)（本题满分11分）

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求$P\{X=2Y\}$；

（Ⅱ）求$\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23)（本题满分11分）

设随机变量X与Y相互独立，且都服从参数为1的指数分布. 记$U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$.

（Ⅰ）求V的概率密度$f_V(v)$；

（Ⅱ）求$E(U+V)$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题(第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求.)

(1) 已知当 $x\to 0$ 时,$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则

(A) $k=1,c=4$.　(B) $k=1,c=-4$.　(C) $k=3,c=4$.　(D) $k=3,c=-4$.

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$.　(B) $-f'(0)$.　(C) $f'(0)$.　(D) 0.

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列,则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.　(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.　(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关系是

(A) $I<J<K$.　(B) $I<K<J$.　(C) $J<I<K$.　(D) $K<J<I$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$,再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第三行得单位矩阵,记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵,$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解,k_1,k_2 为任意常数,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.　(B) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$.　(D) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)$.

(7) 设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数,其相应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 是连续函数,则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \cdots, X_n (n\geqslant 2)$ 为来自总体的简单随机样本,则对应的统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$,

(A) $ET_1>ET_2, DT_1>DT_2$.　　(B) $ET_1>ET_2, DT_1<DT_2$.

(C) $ET_1<ET_2, DT_1>DT_2$.　　(D) $ET_1<ET_2, DT_1<DT_2$.

二、填空题(第 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)

(9) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$,则 $f'(x)=$ ________.

(10) 设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$,则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=$ ________.

(11) 曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

(12) 曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$,直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为________.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1, $\boldsymbol{A}$ 中各行元素之和为 3,则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$,则 $E(XY^2)=$ ________.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数, $f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值, $z=f[(x+y),f(x,y)]$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}$.

(17)(本题满分 10 分)

求 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(18)(本题满分 10 分)

证明 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两实根.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数, $f(0)=1$,且 $\iint\limits_{D_t}f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t}f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D_t=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x, 0\leqslant x\leqslant t\}(0<t\leqslant 1)$,求 $f(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$线性表出.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

(21)(本题满分 11 分)

$\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,即 $r(\boldsymbol{A})=2$,且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

求:(Ⅰ)$\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(22)(本题满分 11 分)

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$P\{X^2=Y^2\}=1$.

求:(Ⅰ)二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)$Z=XY$ 的概率分布;

(Ⅲ)X,Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)服从区域 G 上的均匀分布,其中 G 是由 $x-y=0$,$x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的区域.

(Ⅰ)求边缘概率密度 $f_X(x)$;

(Ⅱ)求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题(第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合试题要求.)

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=1$,则 a 等于

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(2) 设 y_1,y_2是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$是该方程的解,$\lambda y_1-\mu y_2$是该方程对应的齐次方程的解,则

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$.　　(D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$.

(3) 设函数 $f(x),g(x)$ 具有二阶导数,且 $g''(x)<0$. 若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值,则 $f(g(x))$ 在 x_0取极大值的一个充分条件是

(A) $f'(a)<0$.　　(B) $f'(a)>0$.　　(C) $f''(a)<0$.　　(D) $f''(a)>0$.

(4) 设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时有

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$.　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$.　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

(5) 设向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示. 下列命题正确的是

(A) 若向量组 Ⅰ 线性无关,则 $r\leqslant s$.　　(B) 若向量组 Ⅰ 线性相关,则 $r>s$.

(C) 若向量组 Ⅱ 线性无关,则 $r\leqslant s$.　　(D) 若向量组 Ⅱ 线性相关,则 $r>s$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

（7）设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$

（A）0.　　（B）$\frac{1}{2}$.　　（C）$\frac{1}{2}-e^{-1}$.　　（D）$1-e^{-1}$.

（8）设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0,\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}\quad(a>0,b>0)$$

为概率密度，则 a,b 应满足

（A）$2a+3b=4$.　　（B）$3a+2b=4$.　　（C）$a+b=1$.　　（D）$a+b=2$.

二、填空题（第9～14小题，每小题4分，共24分.）

（9）设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt=\int_0^x x\sin t^2dt$ 确定，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________.

（10）设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2x)}}(e\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为________.

（11）设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$ ______.

（12）若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$ ______.

（13）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为3阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ______.

（14）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本. 记统计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $ET=$ ______.

三、解答题（第15～23小题，共94分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

（15）（本题满分10分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

（16）（本题满分10分）

计算二重积分 $\iint\limits_D(x+y)^3dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成.

（17）（本题满分10分）

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

（18）（本题满分10分）

（Ⅰ）比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt(n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

（Ⅱ）记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(19)（本题满分10分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=f(2)+f(3).$$

（Ⅰ）证明存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f(\eta)=f(0)$；

（Ⅱ）证明存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$.

(20)（本题满分11分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在2个不同的解，

（Ⅰ）求 λ,a；

（Ⅱ）求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)（本题满分11分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵. 若 $\boldsymbol{Q}$ 的第1列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求 $a,\boldsymbol{Q}$.

(22)（本题满分11分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23)（本题满分11分）

箱中装有6个球，其中红、白、黑球的个数分别为1,2,3个. 现从箱中随机地取出2个球，记 X 为取出的红球个数，Y 为取出的白球个数.

（Ⅰ）求随机变量 (X,Y) 的概率分布；

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题(第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合试题要求.)

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

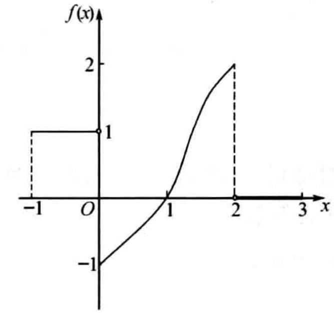
(2) 当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$. (B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$. (C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$. (D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

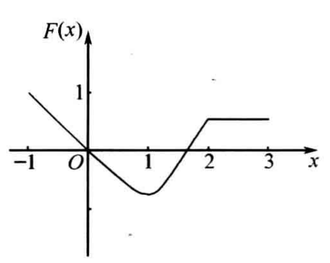
(3) 使不等式 $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>\ln x$ 成立的 x 的范围是

(A) $(0,1)$. (B) $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$. (C) $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$. (D) $(\pi,+\infty)$.

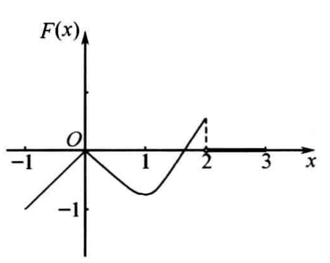
(4) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



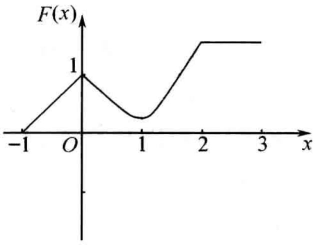
则函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的图形为



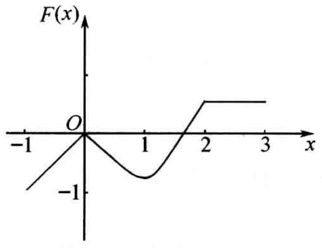
(A)



(B)



(C)



(D)

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵. 若 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为

(A) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(7) 设事件 A 与事件 B 互不相容,则

(A) $P(\bar{A}\bar{B})=0$. (B) $P(AB)=P(A)P(B)$.

(C) $P(A)=1-P(B)$. (D) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$,Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数,则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

二、填空题(第 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$____________.

(10) 设 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$,则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$____________.

(11) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为____________.

(12) 设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$,其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$,则当需求量为 10 000 件时,价格增加 1 元会使产品收益增加____________元.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$. 若矩阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$____________.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 记统计量 $T=\bar{X}-S^2$，则 $ET=$____________.

三、解答题（第15～23小题，共94分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15)（本题满分9分）

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

(16)（本题满分10分）

计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$.

(17)（本题满分10分）

计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.

(18)（本题满分11分）

(Ⅰ) 证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ) 证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

(19)（本题满分10分）

设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$, $x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线的方程.

(20)（本题满分11分）

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$；

(Ⅱ) 对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(21)（本题满分11分）

设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

(Ⅰ) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.