现代数学译丛 19

随机微分方程

导论与应用

（第6版）

〔挪〕Bernt Øksendal 著
刘金山　吴付科 译

科学出版社

现代数学译丛 19

随机微分方程

导论与应用

(第 6 版)

〔挪〕 Bernt Øksendal 著

科学出版社

北京

图字：01-2012-1460 号

内 容 简 介

本书的主要内容包括 Itô 积分和鞅表示定理、随机微分方程、滤波问题、扩散理论的基本性质和其他的论题、在边界值问题中的应用、在最优停时方面的应用、在随机控制领域中的应用及数理金融中的应用.

本书可供理工和金融管理类的高年级本科生及研究生阅读，也可作为数学系高年级本科生及研究生的教材或科研工作者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

随机微分方程导论与应用/(挪)Bernt Øksendal(厄克森达尔)著；刘金山，吴付科译. —6 版. —北京：科学出版社，2012
(现代数学译丛；19)
ISBN 978-7-03-033763-4
Ⅰ. 随… Ⅱ. ①B… ②刘… ③吴… Ⅲ. 随机微分方程 Ⅳ. O211.63
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 039163 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：朱光兰
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2012 年 4 月第一次印刷 印张：21 1/2
字数：398 000
定价：68.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

第 6 版第 4 次印刷前言

在这一次校正中, 基本上所有的修改都要归功于 Ralf Forster. 作者十分感激他对本书所作的有益的改进. 同时也很感谢 Jerome Stein, 他与作者进行了令人兴奋的讨论, 从而在本书中加入了新的习题 8.18.

作者也要感谢 Dina Haraldsson, 她用专业的打字技术帮助了作者.

Bernt Øksendal

2007 年 2 月于 Blindern

第 6 版第 3 次印刷前言

在这个校正版中, 对某些打印错误进行了校正, 另外进行了某些改进 (在本书后面), 提供了 (部分或全部) 解答的练习都标注了一个星号. 作者希望感谢下列人员的有益的评论, 他们是 (按字母排序): Holger Van Bargen, Catriona Byrne, Mark Davis, Per-Ivar Faust, Samson Jinya, Paul Kettler, Alex Krouglov, Mauro Mariani, John O'Hara, Agnes Sulem, Bjørn Thunestvedt 和 Vegard Trondsen.

作者对 Dina Haraldsson 仔细和熟练的打字特别表示感谢.

Bernt Øksendal

2005 年 8 月于 Blindern

第 6 版前言

这一版包括了某些习题的详细解答. 许多读者要求这样, 因为它使本书更适合于自学, 同时增加了一些新的练习 (没有解答). 为了方便使用这一版和先前的版本, 把它们都放在每章的最后面.

有几个错误进行了修改, 并对几个公式作了改进. 这些得益于下列人员的有益的评论. 他们是 (按字母排序): Jon Bohlin, Mark Davis, Helge Holden, Patrick Jaillet, Chen Jing, Keigo Osawa, Bjørn Thunestvedt, Jan Ubøe 和 Yngve Williassen. 作者感谢他们帮助改进了本书.

作者也再次感谢 Dina Haraldsson, 她又一次完成了打印工作并娴熟地画了图.

Bernt Øksendal

2002 年 9 月于 Blindern

第 5 版校正印刷前言

这个校正版主要对第 12 章进行了校正和改进. 作者从很多有益的评论中受益颇多, 这些议论者是 (按字母顺序): Fredrik Dahl, Simone Deparis, Ulrich Haussmann, Yaozhong Hu, Marianne Huebner, Carl Peter Kirkebø, Nikolay Kolev, Takashi Kumagai, Shlomo Levental, Geir Magnussen, Anders Øksendal, Jurgen Potthoff, Colin Rowat, Stig Sandnes, Lones Smith, Setsuo Tamiguchi 和 Bjørn Thunestvedt.

作者感谢他们帮助作者使本书变得更好, 同时也要感谢 Dina Haraldsson 高效的打字技术.

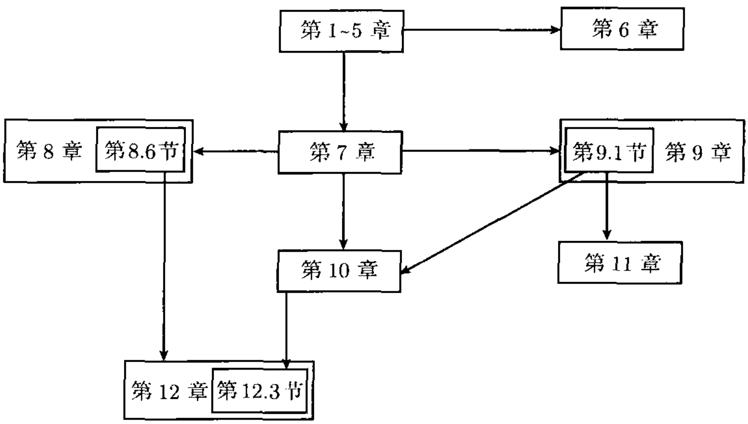
Bernt Øksendal

2000 年 5 月于 Blindern

第 5 版前言

第 5 版的主要特色是增加了一章新的内容, 即第 12 章: 在数理金融中的应用. 由于在最近 10~20 年中, 这个领域得到了飞速的发展, 作者发现把它看成是随机分析的另一个主要的应用是十分自然的事. 而且, 在这个领域, 理论成果和应用之间紧密的结合是引人注目的. 比如, 今天几乎没有企业进行期权交易而不利用 Black & Scholes 公式.

与第 4 版相比, 前 11 章几乎没有什么变化, 但作者仍继续致力于改善和校对误印与错误, 增加了一些新的习题. 而且, 为了方便本书的使用, 每章都分成了几小节. 如果不想 (或没有时间) 阅读所有的章节, 可选择性地进行阅读. 下图表示章节之间的依赖关系. 比如, 新的第 12 章的前两节需要用到第 1~5 章、第 7 章和第 8.6 节. 第 12.3 节, 特别是关于美式期权的部分, 需要附加必要的背景知识, 因此第 10 章, 从而第 9.1 节是必须用到的.



在这一版中, 作者从许多有益的建议中受益匪浅, 建议者包括 (依字母顺序): Kunt Aase, Luis Alvarez, Peter Christensen, Kian Esteghamat, NilsChristian Framstad, Helge Holden, Christian Irgens, Saul Jacka, Naoto Kunitomo 和他的小组, Sure Mataramvura, Trond Myhre, Anders Øksendal, Nils Øvrelid, Walter Schachermayer, Bjarne Schielderop, Atle Seierstad, Jan Ubøe, Gjermund Vage 和 DanZes. 作者感谢他们对本书的改进所作出的贡献.

Dina Haraldsson 再一次证明了她打印手稿的优秀技能 —— 在复杂的 LATEX

第 4 版前言

在这一版中, 作者增加了一些内容, 它们在应用时特别有用, 即鞅表示定理 (第 4 章), 对应于最优停时问题的变分不等式 (第 10 章) 和带终端条件的随机控制 (第 11 章), 增加了某些习题的提示和解法. 而且, 对 Girsanov 定理的证明和讨论作了改进以使它在经济学中更便于应用. 为了使该书更好和更有用, 对正文也作了修正.

在这个工作中, 作者从下列人员的有益的评论中受益良多: Knut Aase, Sigmund Berntsen, Mark H.A. DAvis, Helge Holden, Yaoahong Hu, Tom Lindstrøm Trgve Nilsen, Paulo Ruffino, Isaac Saias, Clint Scovel, Jan Ubøe, Suleyman Ustunel, Qinghua Zhang, Tusheng Zhang 和 Vitor Daniel Zurkowski. 作者对他们给予的帮助表示十分的感谢.

作者特别感谢 Hakon Nyhus, 他仔细地阅读了大部分手稿, 提出了许多改良之处和许多有用的建议. 最后, Tove Møller 和 Dina Haraldsson 打印手稿的熟练程度令人印象深刻, 作者在此对他们表示感谢.

Bernt Øksendal

1995 年 6 月于 Oslo

第 3 版前言

第 3 版主要的新特色是在第 2~11 章中都包括了很多的习题. 这些习题有助于读者对正文更好的理解. 某些习题是很常规的, 其目的是为了说明正文中的结论. 但有的练习较难, 更具有挑战性, 有些是正文中理论的延伸.

作者从 Mark H.A. Davis, Håkon, Gjessing, Torgny Lindvall 和 Hakon Nyhus 的有价值的建议和评论中获益良多, 在此对他们表达最衷心的感谢.

一个十分引人注目的非数学的改进是该书用 TEX 打印. Tove Lieberg 做了很多的打印工作 (如通常一样), 作者对她的努力和无限的耐心表示十分的感激.

Bernt Øksendal

1991 年 6 月于 Oslo

第 2 版前言

在第 2 版中作者把关于扩散过程的那一章分成了两章, 即新的第 7 章和第 8 章. 第 7 章仅处理扩散的一些基本的性质, 在最后三章的应用中, 它们是必须要用到的. 读者们迫切地想从第 7 章直接跳到第 9~11 章, 让它们尽可能快地得到应用.

在第 8 章, 对扩散的其他重要性质进行了讨论, 尽管在本书的剩余部分中它们并非是必要的, 但那些性质是当今随机分析理论的中心点, 也是其他许多应用的关键点.

希望这种改变能使本书对不同目的的人更具有灵活性. 作者也致力于对某些方面进行改进, 对所知道的讹误和打印错误进行了校正, 希望没有带来新的错误. 作者感谢收到的关于该书的反馈. 对于 Henrik Martens 的有益的评论, 作者在此特别表示感谢.

Tove Lieberg 准确快速的打印技术给作者留下了深刻的印象. 作者感谢她的帮助和耐心, 同时也感谢 Dina Haraldson 和 Tone Rasmussen 在打印方面给予的帮助.

Bernt Øksendal

1989 年 8 月于 Oslo

第 1 版前言

书中的注解基于作者在 1982 年春季给 Edinburgh(爱丁堡) 大学的研究生讲解的随机微分方程课程. 该课程不需要多少预备知识, 只需有一点测度论的背景即可.

有几点理由说明为什么要学习随机微分方程. 随机微分方程在数学领域之外有着广泛的应用, 与其他数学学科有着许多联系, 另外, 作为一个迷人的研究领域, 该学科本身存在许多有趣的悬而未决的问题, 具有快速发展的生命力.

不幸的是, 绝大部分关于随机微分方程的文献似乎都更注重内容的严谨性和完整性, 而缺少许多非专家的方法. 本书中的附注试图用非专家的观点来解读该学科. 如果对一门学科一无所知, 你首先最想知道的是什么? 你的回答可能是:

(1) 在什么情形下产生该学科?

(2) 它的本质特征是什么?

(3) 它有什么应用及与其他领域有什么联系?

作者并不注重更一般情形的证明, 而宁愿对特殊情形作更容易的证明, 因为它更能体现论证的基本思想. 本书引入了某些基本结果而不证明, 从而有更多的篇幅来说明它们的基本应用. 附注反映了这个观点, 这种方法能使我们更快更容易地进入理论的精彩部分. 希望那些附注可以填补现存文献中的空白. 这门课程是很吸引人的, 如果它能唤起你更大的兴趣, 读者会有大量优秀的文献可供选择利用, 那些文献都列在书末.

在导言中叙述了 6 个问题, 随机微分方程扮演着本质的角色. 在第 2 章介绍上述问题中的数学模型所需的一些基本的数学概念. 由此引出第 3 章中的 Itô 积分. 在第 4 章发展到随机分析 (Itô 公式), 第 5 章则用它解某些随机微分方程, 包括在导言中介绍的前面两个问题, 在第 6 章利用随机分析介绍线性滤波问题的解 (问题 3 作为一个例子). 问题 4 是 Dirichlet 问题, 尽管它是纯确定性的. 在第 7 章和第 8 章介绍如何引入辅助的 Itô 扩散 (即随机微分方程的解) 来得到一个简单的、直观的、有用的随机解, 它是随机位势论的基石. 问题 5 是一个最优停时问题. 第 9 章介绍用 Itô 扩散来表示在 t 时刻对策的状态, 解相应的最优停时问题, 它的解包含了位势论中的概念. 比如, 在第 8 章 Dirichlet 问题的解的广义化调和扩张. 问题 6 是 Ramsey 于 1928 年提出的经典的控制问题的随机版本. 第 10 章依据随机微分方程求解一般的随机控制问题, 应用第 7 章和第 8 章的结果证明该问题可归纳成解 (确定性的)Hamilton-Jacobi-Bellman 方程. 作为一个例子, 求解了关于最优证券组合选择问题.

在 1982 年于 Edinburgh 大学第一次开了这门课程之后, 在 Agder 学院 Kristiansand(克里斯蒂安桑) 和 Oslo(奥斯陆) 大学讲学时对书稿进行了修改和扩充. 每次大约有一半的听众来自于应用领域, 其余的来自于所谓的 "纯" 数学领域. 这种丰富的组合产生了一个广泛的、多样的、宝贵的评论, 对此作者十分感谢. 特别感谢 K.K. Aase, L. Csink 和 A.M. Davie, 他们与作者进行了很多次有益的讨论.

作者感谢英国科学与工程研究协会和挪威的 Norges Almenvitenskapelige Forskningsrad (NAVF) 的资助. 特别感激 Ingrid Skram, Agder 学院和 Inger Prestbakken, Oslo 大学, 在那两年中, 我对手稿进行过无数次的改动, 而他们一如既往地给予支持.

注意, 第 1 版的第 8~10 章变成了第 2 版的第 9~11 章.

Bernt Øksendal

1985 年 6 月于 Oslo

目　　录

第1章　导　　言

为了使读者确信随机微分方程是一门重要的学科, 先提出下面的一些问题.

1.1　典型微分方程的随机模拟

如果认为微分方程的某些系数是随机的, 则可得到更为现实的数学模型.

问题 1　考虑简单的人口增长模型

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t), \quad N(0) = N_0(\text{常数}), \tag{1.1.1}$$

这里 $N(t)$ 是 t 时刻的人口数量, $a(t)$ 是 t 时刻的相对人口增长率. 在某些随机的环境影响下, $a(t)$ 可能并不是完全知道的. 故此可设

$$a(t) = r(t) + \text{“噪声”},$$

这里我们并不知道噪声项的具体表现, 但知道它的概率分布, 而函数 $r(t)$ 假定为非随机的. 在这个情形, 如何求解方程 (1.1.1)?

问题 2　在一个电路中, 某一固定点在 t 时刻的电荷 $Q(t)$ 满足下面的微分方程:

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = F(t), \quad Q(0) = Q_0, \quad Q'(0) = I_0, \tag{1.1.2}$$

这里 L 是感应系数, R 是电阻, C 是电容, $F(t)$ 是 t 时刻的电势. 同理, 在某些情形下, 某些系数, 比如说 $F(t)$ 并不是确定性的, 而有下面的形式:

$$F(t) = G(t) + \text{“噪声”}, \tag{1.1.3}$$

这时如何解 (1.1.2)?

更一般地, 在微分方程的系数随机化后得到的方程称为随机微分方程. 以后有更精确的定义. 显然, 一个随机微分方程的任何解都一定包含某种随机性, 因此, 我们仅希望能对解的概率分布做点事情.

1.2　滤 波 问 题

问题 3　为了更深入了解关于问题 2 的解的知识, 假设在 $s \leqslant t$ 时, 通过观察得到 $Q(s)$ 的监测值 $Z(s)$, 然而, 由于测量的不精确性, 不能真正地测量到 $Q(s)$, 只