

信号处理的小波导引

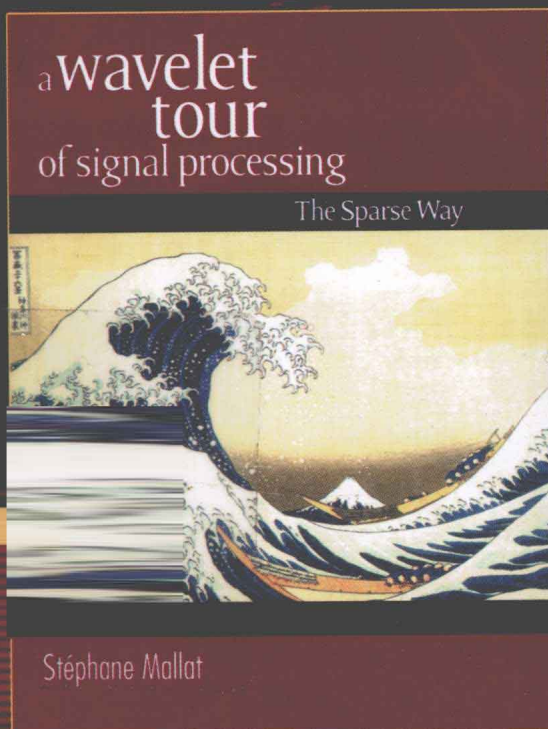
稀疏方法 (原书第3版)

A Wavelet Tour of Signal Processing

The Sparse Way
(Third Edition)

(法) Stéphane Mallat 等著
巴黎综合理工大学

戴道清 杨力华 译



电子与电气工程丛书

信号处理的小波导引

稀疏方法 (原书第3版)

A Wavelet Tour of Signal Processing
The Sparse Way



机械工业出版社
China Machine Press

本书全面论述了稀疏表示的重要概念、技术和应用,反映了该主题在当今信号处理领域所起的关键作用。作者在解释了稀疏的主要概念后将其运用于信号压缩、噪声衰减和逆问题,同时给出了冗余字典、超分辨率和压缩感知中的稀疏表示。

本书既可以让应用数学系的学生了解数学公式的工程意义,也可以让计算机及电子工程系的学生了解工程问题的数学描述。对于小波理论与应用的研究人员,本书更是一本极具价值的参考书。

Stéphane Mallat with contributions from Gabriel Peyré: A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way, Third Edition (ISBN 978-0-12-374370-1).

Copyright © 2009 by Elsevier Inc. All rights reserved.

Authorized Simplified Chinese translation edition published by the Proprietor.

ISBN: 978-981-272-424-3

Copyright © 2012 by Elsevier (Singapore) Pte Ltd. All rights reserved.

Printed in China by China Machine Press under special arrangement with Elsevier (Singapore) Pte Ltd. This edition is authorized for sale in China only, excluding Hong Kong SAR and Taiwan. Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. Violation of this Law is subject to Civil and Criminal Penalties.

本书简体中文版由机械工业出版社与 Elsevier (Singapore) Pte Ltd. 在中国大陆境内合作出版。本版仅限在中国境内(不包括中国香港特别行政区及中国台湾地区)出版及标价销售。未经许可之出口,视为违反著作权法,将受法律之制裁。

封底无防伪标均为盗版

版权所有,侵权必究

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

本书版权登记号:图字:01-2009-5284

图书在版编目(CIP)数据

信号处理的小波导引:稀疏方法(原书第3版)/(法)马拉特(Mallat, S.)等著;戴道清,杨力华译. —北京:机械工业出版社,2012.2

(电子与电气工程丛书)

书名原文: A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way, Third Edition

ISBN 978-7-111-36549-5

I. 信… II. ①马… ②戴… ③杨… III. 调和与分析—应用—信号处理 IV. TN911.7

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第240621号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)

责任编辑:余洁

北京京北印刷有限公司印刷

2012年3月第1版第1次印刷

185mm×260mm·33.75印张

标准书号:ISBN 978-7-111-36549-5

定价:85.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

客服热线:(010) 88378991; 88361066

购书热线:(010) 68326294; 88379649; 68995259

投稿热线:(010) 88379604

读者信箱:hzjsj@hzbook.com

译者序

原书第2版中译本于2002年9月出版，将近十年过去了，该中译本在国内产生了较大的影响，被多所学校选做理工科相关专业的研究生教材和参考书，并对我国小波分析学科的发展起到了十分重要的推动作用。随着该学科的发展和新思想的不断融入，尤其是近几年蓬勃发展的基于压缩感知的稀疏表示理论，为传统的以基表示为主基调的小波分析之研究注入了新的活力，信号的小波稀疏表示及其相关的非线性逼近算法成为该领域的核心问题。英文版第3版即以稀疏表示为主线，并冠书名副标题为 The Sparse Way。

本中译本是在第2版中译本的基础上按英文版第3版翻译的。具体分工是：前言、目录、附录、参考文献以及第4、6、7、9、12章由杨力华承担，第1~3、5、8、10、11、13章由戴道清承担。此次翻译也修改了第2版翻译中的一些讹误。

感谢机械工业出版社编辑迟振春、王春华和余洁女士。她们认真细致，帮助我们修改了一些新发现的讹误，其工作令人钦佩。

部分博士研究生为本书的翻译也提供了帮助，他们是（按拼音排序）：何永滔、黄超、黄健峰、黄可坤、赖兆荣、李洽、李小薪、刘亦书、吴梦云、杨利军、张晓飞、张娜、朱媛，在此向他们表示衷心的感谢。

鉴于我们水平有限，时间仓促，难免出现翻译错误，希望读者批评指正。

本翻译工作得到国家自然科学基金资助（基金号：11071261，11171354，10771220，90920007，60873088）。

译者

2011年8月于中山大学

前言

我总觉得学术团体和鱼群之间有着惊人的相似之处。我们通过会议和论文进行交流、合作并互相影响；当一条全球性的技术轨线从个别人的贡献中浮现出来的时候，我们就往同一个方向“游动”。有些人喜欢待在鱼群的中心，有些人则更乐于到处漫游，还有少数人在前方朝多个方向冲浪。为了避免在日趋狭小和过于专业化的领域中枯萎，学术团体需要不断前进。计算调和分析依然生气勃勃，因为它有小波所不能及之处。撰写这样的书类似于解码鱼群的运动轨迹并沿途收集那些业经发现的珍珠。虽然沿用以前版本的书名，但该版中小波不再是主要话题。和傅里叶变换一样，小波只是一个重要的工具。稀疏表示和处理是该版的核心。

20 世纪 80 年代，许多研究者把注意力放在建立时-频分解上，他们设法避开不确定性障碍，并希望发现信号的最佳表示。在这个过程中，小波正交基出现了，通过和物理学、数学的通力合作，它开辟了崭新的前景。用 Xlet[⊖] 设计正交基应用于压缩和降噪成为一个时髦的研究课题，正交基与逼近、稀疏的联系也变得更为明显。现在，寻求稀疏已接掌了主导地位，并通向一些新领域，在这些领域中，正交基被由某些波函数形成的冗余字典所代替。

在过去的七年中，我曾面临一些工业领域的问题。我曾满怀天真和激情，凭借对 bandlet 的了解和丰富的数学知识，和 Christophe Bernard、Jérôme Kalifa 以及 Erwan Le Pennec 一起开启了我们的工程应用项目。经过一段时间我们才发现，工程领域的良才只需三个月就设计出能实时运作的稳健算法，我们却习惯用三年的时间来著述前途光明的想法。然而，我们挺过来了，因为在工业领域中，数学是信号处理革新的主要源泉。半导体技术提供了惊人的计算能力和适应性；但是，专门算法通常难以适应大规模情况，而数学大大加速了“试验和误差”发展进程。稀疏性减少了计算、所需内存和数据通信。数学带来了美，然而，理解数学并非可望而不可即之事。对于日趋复杂的信息处理设备来说，理解数学是必需的。

新增内容

将稀疏性作为该书的核心意味着重写很多段落并增添章节。第 12 章和第 13 章是新增的，这两章介绍了冗余字典中的稀疏表示、逆问题、超分辨率和压缩感知。下面是第 3 版新增内容：

- Radon 变换和断层影像技术
- 曲面和有界区域上的小波提升和快速计算
- JPEG-2000 图像压缩
- 去噪的块取阈值方法

⊖ 小波、脊小波、bandlet 等。——译者注

- 利用自适应三角剖分、curvelet 和 bandlet 的几何表示
- 冗余字典中的稀疏逼近 (利用追踪算法)
- 冗余字典中的降噪 (利用模型选择)
- 字典中稀疏逼近支集的精确恢复
- 多通道信号表示和处理
- 字典学习
- 逆问题和超分辨率
- 压缩感知
- 盲源分离

教学

本书可作为研究生教材。事实上, 本书是在电子工程系和应用数学系的教学过程中渐次发展和逐步完善的。还有一个新的网站, 它提供了用于重复实验所需的软件和习题解答, 此外, 还有演示文稿等教学材料 (附有插图和 MATLAB 软件), 网址为 <http://wavelet-tour.com>。

每章后面都新增了一些练习题, 练习题按难度分等级: 1 级是课程内容的直接运用; 2 级需要一定的思考; 3 级包括一些技术性推导; 4 级是一些研究层面的课题, 可作为期末课程项目或独立研究的主题。网站中有更多的练习和课题。

稀疏课程纲要

傅里叶变换和通过线性采样逼近实现的模-数转换为所有课程提供了一个共同的基础 (第 2 章和第 3 章)。这两章介绍了基本的信号表示方法并对以后要用到的重要数学工具和算法工具进行复习。之后, 我们可以探究很多学术路线来讲授信号稀疏处理。下面列出若干主题 (它们确定了课程结构的方向) 及其涵盖的要素。

基稀疏表示及应用:

- 线性和非线性基逼近的原理 (第 9 章)
- Lipschitz 正则性和小波系数衰减 (第 6 章)
- 小波基 (第 7 章)
- 线性和非线性小波基逼近的性质 (第 9 章)
- 图像小波压缩 (第 10 章)
- 线性和非线性对角去噪 (第 11 章)

稀疏时-频表示:

- 用于音频处理的时-频小波和窗口傅里叶脊 (第 4 章)
- 局部余弦基 (第 8 章)
- 线性和非线性基逼近 (第 9 章)
- 音频压缩 (第 10 章)
- 音频去噪和块取阈值 (第 11 章)

- 在冗余时-频字典中用最佳基或追踪算法进行压缩和去噪 (第 12 章)

稀疏信号估计:

- Bayes 估计与“极小极大”估计和线性与非线性估计 (第 11 章)
- 小波基 (第 7 章)
- 线性与非线性基逼近 (第 9 章)
- 阈值估计 (第 11 章)
- “极小极大”最优性 (第 11 章)
- 冗余字典中去噪的模型选择 (第 12 章)
- 压缩感知 (第 13 章)

稀疏压缩和信息论:

- 小波正交基 (第 7 章)
- 线性与非线性基逼近 (第 9 章)
- 压缩和基的稀疏变换编码 (第 10 章)
- 冗余字典压缩 (第 12 章)
- 压缩感知 (第 13 章)
- 盲源分离 (第 13 章)

字典表示和逆问题:

- 框架和 Riesz 基 (第 5 章)
- 线性与非线性基逼近 (第 9 章)
- 理想冗余字典逼近 (第 12 章)
- 追踪算法和字典不相干 (第 12 章)
- 线性逆估计和逆问题的阈值估计子 (第 13 章)
- 超分辨率和盲源分离 (第 13 章)
- 压缩感知 (第 13 章)

几何稀疏处理:

- 时-频谱线和脊 (第 4 章)
- 框架和 Riesz 基 (第 5 章)
- 利用小波极大值的多尺度边缘表示 (第 6 章)
- 基的稀疏逼近支集 (第 9 章)
- 利用几何正则性、curvelet 和 bandlet 的逼近 (第 9、12 章)
- 稀疏信号压缩和几何比特预算 (第 10、12 章)
- 稀疏逼近支集的精确恢复 (第 12 章)
- 超分辨率 (第 13 章)

致谢

第 2 版的部分内容在该版中没有变化, 特别是那些我尊为权威的人们留下的印迹。对于 Ruzena Bajcsy 和 Yves Meyer, 我一如既往地心怀感激。

在项目启动伊始的高压中，我与三位才华横溢且友善宽厚的同事共同度过了过去的几年，他们是 Christophe Bernard、Jérôme Kalifa 和 Erwan Le Pennec——这是一段美好的时光。最终的调味汁混合了我们各人所调制的东西，为我们的个性增添了新的风味。我现在依然在发掘并得益于这些风味，衷心感谢他们。

该版也是与 Gabriel Peyré 协力合作的结晶。他不但使风味变化成为可能，而且使变化过程颇有趣味。我衷心感谢他非凡的工作和无私的帮助。

Stéphane Mallat

符 号

$\langle f, g \rangle$	内积 (A. 6)
$\ f\ $	欧几里得或 Hilbert 空间范数
$\ f\ _1$	L^1 或 l^1 范数
$\ f\ _\infty$	L^∞ 范数
$f[n]=O(g[n])$	$f[n]$ 以 $g[n]$ 为阶, 即存在 K 使得 $f[n] \leq K g[n]$
$f[n]=o(g[n])$	高阶无穷小, 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f[n]}{g[n]} = 0$
$f[n] \sim g[n]$	等价于 $f[n]=O(g[n])$ 且 $g[n]=O(f[n])$
$A < +\infty$	A 为有限数
$A \gg B$	A 远大于 B
z^*	$z \in \mathbb{C}$ 的复共轭
$\lfloor x \rfloor$	满足 $n \leq x$ 的最大整数 n
$\lceil x \rceil$	满足 $n \geq x$ 的最小整数 n
$(x)_+$	$\max(x, 0)$
$n \bmod N$	n 模 N 整除的余数

集合

$\mathbb{N}$	非负整数集
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}^+$	正实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$ \Lambda $	集合 Λ 的元素个数

信号

$f(t)$	连续的时间信号
$f[n]$	离散信号
$\delta(t)$	Dirac 分布 (A. 30)
$\delta[n]$	离散 Dirac 分布 (3. 32)
$1_{[a,b]}$	$[a, b]$ 的特征函数, 即函数值在 $[a, b]$ 内为 1, 其他处为 0

空间

C_0	一致连续函数空间 (7. 207)
C^p	p 次连续可微函数空间
C^∞	无穷次可微函数空间
$W^s(\mathbb{R})$	Sobolev 意义下的 s 阶可微函数空间 (9. 8)

$L^2(\mathbf{R})$	满足 $\int f(t) ^2 dt < +\infty$ 的有限能量函数空间
$L^p(\mathbf{R})$	满足 $\int f(t) ^p dt < +\infty$ 的函数空间
$\ell^2(\mathbf{Z})$	有限能量的离散信号集合, 即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] ^2 < +\infty$
$\ell^p(\mathbf{Z})$	满足 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] ^p < +\infty$ 的离散信号集合
$\mathbf{C}^N$	长度为 N 的复信号
$U \oplus V$	两个向量空间的直和
$U \otimes V$	两个向量空间的张量积 (A. 19)
$\text{Null}U$	算子 U 的零空间
$\text{Im}U$	算子 U 的像空间

算子

Id	恒等算子
$f'(t)$	导数 $\frac{df(t)}{dt}$
$f^{(p)}(t)$	p 阶导数 $\frac{d^p f(t)}{dt^p}$
$\vec{\nabla} f(x, y)$	梯度向量 (6. 51)
$f * g(t)$	连续时间卷积 (2. 2)
$f * g[n]$	离散卷积 (3. 33)
$f \circledast g[n]$	循环卷积 (3. 73)

变换

$\hat{f}(\omega)$	傅里叶变换 ((2. 6) 和 (3. 39))
$\hat{f}[k]$	离散傅里叶变换 (3. 49)
$Sf(u, s)$	短时窗口傅里叶变换 (4. 11)
$P_s f(u, \xi)$	谱图 (4. 12)
$Wf(u, s)$	小波变换 (4. 31)
$P_w f(u, \xi)$	量图 (4. 55)
$P_v f(u, \xi)$	Wigner-Ville 分布 (4. 120)

概率

X	随机变量
$E\{X\}$	期望值
$\mathcal{H}(X)$	熵 (10. 4)
$\mathcal{H}_d(X)$	微分熵 (10. 20)
$\text{Cov}(X_1, X_2)$	协方差 (A. 22)
$F[n]$	随机向量
$R_F[k]$	平稳过程的自协方差 (A. 26)

目 录

译者序
前言
符号

第 1 章 稀疏表示	1
1.1 计算调和和分析	1
1.1.1 傅里叶王国	1
1.1.2 小波基	2
1.2 基的逼近与处理	4
1.2.1 线性逼近的采样	5
1.2.2 稀疏的非线性逼近	6
1.2.3 压缩	7
1.2.4 去噪	8
1.3 时-频字典	10
1.3.1 Heisenberg 不确定性	10
1.3.2 窗口傅里叶变换	11
1.3.3 连续小波变换	11
1.3.4 时-频的标准正交基	12
1.4 冗余字典的稀疏性	14
1.4.1 框架分解与合成	14
1.4.2 理想的字典逼近	14
1.4.3 字典中的追踪	15
1.5 逆问题	16
1.5.1 对角逆估计	17
1.5.2 超分辨率和压缩感知	18
1.6 阅读指南	19
1.6.1 可重现的计算科学	19
1.6.2 阅读线路图	19
第 2 章 傅里叶王国	21
2.1 线性时不变滤波	21
2.1.1 脉冲响应	21
2.1.2 传递函数	22
2.2 傅里叶积分	22

2.2.1 $L^1(\mathbf{R})$ 上的傅里叶变换	22
2.2.2 $L^2(\mathbf{R})$ 上的傅里叶变换	24
2.2.3 例子	25
2.3 性质	27
2.3.1 正则性与衰减性	27
2.3.2 测不准原理	28
2.3.3 全变差	30
2.4 二维傅里叶变换	34
2.5 习题	36
第 3 章 数字化革命	38
3.1 模拟信号采样	38
3.1.1 Shannon-Whittaker 采样定理	38
3.1.2 混叠	40
3.1.3 一般采样和线性模拟转换	42
3.2 离散时不变滤波器	46
3.2.1 脉冲响应与传递函数	46
3.2.2 傅里叶级数	47
3.3 有限信号	49
3.3.1 循环卷积	50
3.3.2 离散傅里叶变换	50
3.3.3 快速傅里叶变换	51
3.3.4 快速卷积	52
3.4 离散图像处理	53
3.4.1 二维采样定理	53
3.4.2 离散图像滤波	54
3.4.3 循环卷积与傅里叶基	55
3.5 习题	56
第 4 章 时频会师	59
4.1 时-频原子	59
4.2 窗口傅里叶变换	61
4.2.1 完备性和稳定性	63
4.2.2 窗函数的选取	64
4.2.3 离散窗口傅里叶变换	66

4.3 小波变换	67	6.2 小波变换模极大	142
4.3.1 实小波	67	6.2.1 奇异性检测	142
4.3.2 解析小波	70	6.2.2 二进极大表示	147
4.3.3 离散小波	74	6.3 多尺度边缘检测	150
4.4 瞬时频率的时-频几何	75	6.3.1 图像的小波极大	151
4.4.1 解析瞬时频率	75	6.3.2 快速多尺度边缘计算	156
4.4.2 窗口傅里叶脊	77	6.4 多分形	158
4.4.3 小波脊	84	6.4.1 分形集与自相似函数	158
4.5 二次时-频能量	89	6.4.2 奇异谱	161
4.5.1 Wigner-Ville 分布	89	6.4.3 分形噪声	165
4.5.2 干扰性和非负性	92	6.5 习题	169
4.5.3 Cohen 类	95	第7章 小波基	171
4.5.4 离散 Wigner-Ville 分布的计算	98	7.1 正交小波基	171
4.6 习题	99	7.1.1 多分辨率逼近	171
第5章 框架	101	7.1.2 尺度函数	173
5.1 框架与 Riesz 基	101	7.1.3 共轭镜像滤波器	175
5.1.1 稳定分解与合成算子	101	7.1.4 最终得到哪些正交小波	181
5.1.2 对偶框架与拟逆	103	7.2 小波基类	184
5.1.3 对偶框架分解与合成计算	105	7.2.1 选择小波	184
5.1.4 框架投影子与再生核	108	7.2.2 Shannon、Meyer 和 Battle-Lemarié 小波	188
5.1.5 平移不变框架	110	7.2.3 Daubechies 紧支集小波	190
5.2 平移不变二进小波变换	111	7.3 小波与滤波器组	194
5.2.1 二进小波设计	112	7.3.1 快速正交小波变换	194
5.2.2 α Trous 算法	114	7.3.2 完全重构滤波器组	197
5.3 下采样小波框架	116	7.3.3 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的双正交基	199
5.4 窗口傅里叶框架	118	7.4 双正交小波基	201
5.4.1 紧框架	119	7.4.1 双正交小波基的构造	201
5.4.2 一般框架	120	7.4.2 双正交小波设计	203
5.5 图像的多尺度方向框架	122	7.4.3 紧支集双正交小波	204
5.5.1 方向小波框架	122	7.5 区间上的小波基	207
5.5.2 curvelet 框架	126	7.5.1 周期小波	208
5.6 习题	130	7.5.2 折叠小波	209
第6章 小波聚焦	133	7.5.3 边界小波	211
6.1 Lipschitz 正则性	133	7.6 多尺度插值	214
6.1.1 Lipschitz 的定义与傅里叶分析	133	7.6.1 插值和采样定理	214
6.1.2 小波消失矩	135	7.6.2 插值小波基	218
6.1.3 用小波度量正则性	137	7.7 可分离小波基	221

7.7.1 可分离多分辨率	222	9.1.1 采样和逼近误差	283
7.7.2 二维小波基	223	9.1.2 线性傅里叶逼近	285
7.7.3 快速二维小波变换	227	9.1.3 基于小波的多分辨率逼近误差	287
7.7.4 更高维的小波基	228	9.1.4 Karhunen-Loève 逼近	291
7.8 提升小波	229	9.2 非线性逼近	293
7.8.1 非固定网格上的双正交基	229	9.2.1 非线性逼近误差	294
7.8.2 提升格式	231	9.2.2 小波自适应网格	296
7.8.3 梅花形小波基	235	9.2.3 Besov 空间和有界变差空间 的逼近	299
7.8.4 有界区域与曲面上的小波	238	9.3 图像的稀疏表示	302
7.8.5 用提升进行快速小波变换	241	9.3.1 小波图像逼近	302
7.9 习题	243	9.3.2 几何图像模型和自适应 三角剖分	307
第 8 章 小波包与局部余弦基	247	9.3.3 curvelet 逼近	311
8.1 小波包	247	9.4 习题	312
8.1.1 小波包树	247	第 10 章 压缩	314
8.1.2 时-频局部化	251	10.1 变换编码	314
8.1.3 特殊小波包基	255	10.1.1 现状	314
8.1.4 小波包滤波器组	257	10.1.2 标准正交基下的压缩	315
8.2 图像小波包	258	10.2 量化失真率	316
8.2.1 小波包四叉树	258	10.2.1 熵编码	316
8.2.2 可分离滤波器组	260	10.2.2 标量量化	321
8.3 块变换	261	10.3 高比特率压缩	323
8.3.1 块基	261	10.3.1 比特分配	323
8.3.2 余弦基	262	10.3.2 最优基与 Karhunen-Loève 基	325
8.3.3 离散余弦基	264	10.3.3 透明音频码	327
8.3.4 快速离散余弦变换	265	10.4 稀疏信号压缩	329
8.4 重叠正交变换	267	10.4.1 失真率和小波图像编码	330
8.4.1 重叠投影子	267	10.4.2 嵌入式变换编码	336
8.4.2 重叠正交基	271	10.5 图像压缩标准	338
8.4.3 局部余弦基	273	10.5.1 JPEG 块余弦编码	338
8.4.4 离散重叠变换	276	10.5.2 JPEG-2000 小波编码	341
8.5 局部余弦树	278	10.6 习题	346
8.5.1 余弦基的二叉树	278	第 11 章 去噪	348
8.5.2 离散基的树	280	11.1 加性噪声的估计	348
8.5.3 图像余弦四叉树	280	11.1.1 Bayes 估计	348
8.6 习题	281	11.1.2 极小极大估计	354
第 9 章 逼近	283	11.2 基下的对角估计	356
9.1 线性逼近	283		

11.2.1 使用 Oracle 的对角估计	356	12.4.2 l^1 拉格朗日追踪	433
11.2.2 取阈值估计	359	12.4.3 l^1 极小化的计算	436
11.2.3 阈值加细	363	12.4.4 稀疏合成与分解和全变差 正则化	440
11.3 稀疏表示下的取阈值方法	366	12.5 追踪恢复	443
11.3.1 小波取阈值	366	12.5.1 稳定性和非相干性	443
11.3.2 小波与 curvelet 图像去噪	370	12.5.2 利用匹配追踪恢复支集	444
11.3.3 音频的时-频取阈值去噪	372	12.5.3 利用 l^1 追踪恢复支集	448
11.4 非对角块取阈值	374	12.6 多通道信号	451
11.4.1 基与框架下的块取阈值	374	12.6.1 通过在基中取阈值来逼近和 去噪	451
11.4.2 小波块取阈值	378	12.6.2 多通道追踪	452
11.4.3 时-频音频块取阈值	379	12.7 学习字典	454
11.5 极小极大最优性去噪	380	12.8 习题	455
11.5.1 线性对角极小极大估计	381	第 13 章 逆问题	458
11.5.2 正交对称集合上的取阈值 最优性	383	13.1 线性逆估计	458
11.5.3 用小波估计的近似极小极大	387	13.1.1 二次 Tikhonov 正则化方法	459
11.6 习题	395	13.1.2 奇异值分解	459
第 12 章 冗余字典中的稀疏性	398	13.2 逆问题的取阈值估计子	461
12.1 字典中理想的稀疏处理	398	13.2.1 近奇异向量基下的取阈值	461
12.1.1 最佳 M -项逼近	398	13.2.2 取阈值反卷积	465
12.1.2 通过支集编码进行压缩	400	13.3 超分辨率	468
12.1.3 用字典中的支集选择去噪	401	13.3.1 稀疏超分辨率估计	468
12.2 标准正交基字典	405	13.3.2 稀疏尖峰反卷积	472
12.2.1 最佳基中的逼近、压缩和去噪	405	13.3.3 缺失数据的恢复	474
12.2.2 树状字典中的快速最佳基 搜索	406	13.4 压缩感知	478
12.2.3 小波包和局部余弦最佳基	408	13.4.1 随机观测的不相干性	479
12.2.4 用于几何图像正则性的 bandlet	412	13.4.2 基于压缩感知的逼近	483
12.3 贪婪匹配追踪	419	13.4.3 压缩感知的应用	488
12.3.1 匹配追踪	419	13.5 盲源分离	489
12.3.2 正交匹配追踪	423	13.5.1 盲混合矩阵估计	490
12.3.3 Gabor 字典	424	13.5.2 盲源分离	494
12.3.4 相干匹配追踪去噪	428	13.6 习题	495
12.4 l^1 追踪	430	附录 A 数学知识补充	496
12.4.1 基追踪	430	参考文献	504

第1章 稀疏表示

信号包含了大量的数据，以至于从中找到我们所需要的信息堪比大海捞针。而稀疏表示通过少量的系数来揭示我们要寻找的信息，因此是一种快速简单的信号处理方法。我们可通过在一个称为字典的基本波形里对信号进行分解的方法来构造稀疏表示，但寻找一个适合所有信号的万能的稀疏表示几乎是不可能的。正交小波基和局部时-频字典的发现开启了通往新变换之门。从而，构造与信号性质相适应的稀疏表示并获得有效的处理算子，成为一个必要的生存策略。

若想通过来自某个集合的少数向量来压缩信号能量，则正交基字典是能产生稀疏表示的最小集合。这样的集合提供了信号的一个几何描述，然后通过快速算法计算对角算子来进行有效的信号压缩和去噪。但是这并不总是最优的。

在自然语言中，一个丰富的字典更有益于构造简短精确的句子。类似地，当构造复杂信号的稀疏表示时需要用到比基更大的向量字典。但是这些冗余字典的选择是困难的，且需要更复杂的算法。在冗余字典里进行稀疏表示有助于模式识别、压缩、去噪，但也同时引入了一些新的逆问题的求解，如超分辨率、盲源分离和压缩感知。

第1章是整本书的“稀疏表示”，提供了一些发展历程与主要思想，可作为阅读指南。

1.1 计算调和析

傅里叶基和小波基是旅行的起点。它们以振荡波形的形式分解信号以揭示信号的性质，并且为稀疏表示提供了一种途径。离散的信号往往有非常大的规模，如 $N \geq 10^6$ ，因此只能通过快速的计算方法处理，如通常采用的时间和空间复杂度为 $O(N \log N)$ 的算法。傅里叶和小波变换说明，具有良好结构的数学工具和快速算法之间有着很强的关联性。

1.1.1 傅里叶王国

傅里叶变换可将时不变卷积算子对角化，在物理和数学中都有广泛应用。它在线性时不变的信号处理中占统治地位，也是学习频率滤波算子的基础。

傅里叶分析理论表明：任一有限能量函数 $f(t)$ ，可表示成正弦波 $e^{i\omega t}$ 之和

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.1)$$

每一正弦波 $e^{i\omega t}$ 的振幅等于它与 f 的相关度，也称为傅里叶变换：

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.2)$$

f 越正则，则当频率 ω 增大时，正弦波的振幅 $|\hat{f}(\omega)|$ 衰减得越快。

如果函数 $f(t)$ 只在一个区间（如 $[0, 1]$ ）上有定义，则其傅里叶变换可表示为 $L^2[0, 1]$ 上的傅里叶标准正交基 $\{e^{i2\pi m t}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ 的分解式。如果 $f(t)$ 是一致正则的，则当频率 $2\pi m$ 增加时，其傅里叶系数衰减得很快，故 $f(t)$ 易被少数低频率的傅里叶系数逼近。因此说，傅里叶变换定义了一致正则函数的一种稀疏表示。

对于离散的信号，其傅里叶变换是 $\mathbb{C}^N$ 上离散的傅里叶正交基 $\{e^{i2\pi kn/N}\}_{0 \leq k < N}$ 的分解式，它与函数的傅里叶变换有着相似的性质。其嵌入式的结构，导出快速傅里叶变换（FFT）算

法。FFT 算法计算离散傅里叶系数的运算量为 $O(N \log N)$ 而非 N^2 ，它是处理离散信号的基石。

只要满足线性时不变算子或一致正则的信号这两个条件之一，傅里叶变换就能为大多数问题提供简单答案。傅里叶变换丰富的结果使得它有广泛的应用，如信号传输、平稳信号处理。但是，在描述瞬变现象时，如在特定的时间发音的一个词、位于某图像左上角的一个苹果，傅里叶变换就成了累赘的工具，因为表示这一局部事件需要许多系数。事实上， $e^{i\omega t}$ 的支集覆盖了整个实数轴，因此 $\hat{f}(\omega)$ 依赖于 $f(t)$ 在所有时间 $t \in \mathbb{R}$ 的值。这一信息的全局“混合”使得很难利用 $\hat{f}(\omega)$ 分析或表示 $f(t)$ 的任一局部性质。

1.1.2 小波基

与傅里叶基一样，小波基通过系数的振幅揭示了信号的规律性，且其结构可引导快速计算方法。然而，小波具有很好的局部性，表示局部瞬态结构时只需要很少的系数。相对于傅里叶基，小波基定义了分段正则信号的稀疏表示，其中可能包括瞬态和奇异点。在图像中，大幅值的小波系数位于边缘和不规则纹理附近。

1910 年，Haar[291] 构造了分段常数函数

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{若 } 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & \text{若 } 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

施以伸缩及平移后构成的函数类是 $L^2(\mathbb{R})$ 上有限能量信号

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

的标准正交基

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

$L^2(\mathbb{R})$ 中的内积，记为 $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g^*(t) dt$ 。任一有限能量信号 f 可由其小波内积系数表示

$$\langle f, \psi_{j,n} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{j,n}(t) dt$$

并可以通过对小波标准正交基求和将其恢复：

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n} \quad (1.3)$$

每个哈尔 (Haar) 小波 $\psi_{j,n}(t)$ 在其支集 $[2^j n, 2^j(n+1)]$ 上的平均值为 0。如果 f 是局部正则的，且 2^j 充分小，则 f 在这个区间上几乎为常数，小波系数 $\langle f, \psi_{j,n} \rangle$ 也几乎为 0。这意味着幅值大的小波系数仅存在于尖锐的信号转换处。

一段时间后，于 1980 年，Stromberg[449] 发现分段线性函数 ψ 也可以产生标准正交基，且对光滑函数有更好的逼近性。然而 Meyer 不知道这一结果，受 Morlet 与 Grossmann 在连续小波变换上所取得的成果的启发，Meyer 试图证明不存在能产生标准正交小波基的正则小波 ψ 。他的这个尝试失败了，因为他最终用无限可微的连续函数 ψ 构造出了一组标准正交小波基 [375]。他的这项研究产生了极大的冲击，引起了对新的标准正交小波基的广泛研究，最终得出有紧支撑的著名的 Daubechies 小波基 [194]。

Meyer 与 Mallat 通过对多分辨率信号逼近 [362] 的详细阐述，建立了构造标准正交小

波基的系统理论,我们将在第7章对它作详细叙述。Meyer与Mallat的研究受到了计算机视觉中Burt与Adelson[126]在几种分辨率下分析图像的启发。通过不断地深入研究正交小波基、多分辨率逼近的性质,科学家很惊奇地发现它们与共轭镜像滤波器组、以 $O(N)$ 的运算量分解信号大小为 N 的快速小波变换算法有着密切的联系。

滤波器组

受语音压缩的启发,Croisier、Esteban及Galand[189]在1976年提出了可逆滤波器组的运算法。他们先将一个离散的信号 $f[n]$ 经过两个滤波器滤波后,再做下采样运算,得到两个长度为原来信号长度一半的输出信号。他们也证明了,用名为共轭镜像滤波器的特殊滤波器组通过消除混叠项后,可以由这些下采样信号重建原始信号 $f[n]$ 。这一突破导致了为建立一套完整的滤波器组理论的10年研究。Smith与Barnwell[444]、Vaidyanathan[469]及Vetterli[471]建立了用滤波方法和下采样分量分解信号以及用逆变换重构信号的充分必要条件。

Mallat[362]和Meyer[44]的小波多分辨率分析理论明确地指出共轭镜像滤波器刻画了能产生 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基的小波 ψ ,进一步地,快速离散小波变换可以用共轭镜像滤波器层叠实现[361]。时间连续的小波理论与离散的滤波器组理论的等价,使得数字信号处理与谐波分析有了新的富有成果的结合,首次掀起现已得到很好解决的文化冲击。

连续、离散及有限

起初,很多信号处理专家对把小波和信号视为函数的观点颇为困惑,因为所有的计算都是以共轭镜像滤波器处理离散信号的形式实现的。在实际中,我们只需计算有限个卷积,为什么还要研究无限个卷积层叠的收敛性呢?为了加深理解在这本书中为何时而用连续时间函数的理论观点,时而用应用于有限序列的离散算法,回答这些重要的问题是必要的。

简短的回答可能更简洁有效。在 $L^2(\mathbf{R})$ 中,小波基是对同一个函数 ψ 做伸缩、平移而得到的。许多重要的理论指出了信号 f 的局部正则性与小波系数的幅值间的关系。然而在离散信号中,伸缩变换并没有明确的定义,所以离散小波基的结构更复杂些;同时离散信号的正则性也没有清楚的定义,这使得描述小波系数的幅值也更加困难。我们通常将采样区间不断变小至趋向于零,再用连续时间观点下的函数理论给出离散序列的渐近解。这一理论是有用的,因为这些渐近解对于理解离散算法的性质来说已经足够精确了。

但是连续时间或空间模型对详细描述离散信号处理算法是不充分的。连续信号和离散信号之间的转换必须小心处理以维护其重要性质,如正交性。由于边界问题,将信号的构造限制在有限离散信号上则又增加了另一层复杂性。一旦对基的性质彻底地理解清楚了,也就明白这些边界问题是如何影响数值实现的。

用于图像的小波

图像的标准正交小波基可由一维信号的标准正交小波基表示出来。对三个母小波 $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, $\psi^3(x)$, 伸缩 2^j 倍, 平移 $2^j n$, 其中 $x=(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $n=(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2$, 则得到空间 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 中有限能量函数 $f(x)=f(x_1, x_2)$ 的一组标准正交基

$$\left\{ \psi_{j,n}^k(x) = \frac{1}{2^j} \psi^k\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{j \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}^2, 1 \leq k \leq 3}$$

小波 $\psi_{j,n}^k$ 的支集是一宽度与尺度 2^j 成正比的矩形。可以用二维离散小波基来定义有 N 像素图像的标准正交基。小波系数可由第7章介绍的运算量为 $O(N)$ 的快速算法算出。

与一维情况相似,如果 $f(x)$ 在 $\psi_{j,n}^k$ 的支集上是正则的,则小波系数 $\langle f, \psi_{j,n}^k \rangle$ 有小的