常微分方程

CHANGWEIFEN FANGCHENG

主 编 张 谋 舒永录 张万雄

重庆大学出版社

http://www.cqup.com.cn

常微分方程

主　编　张　谋　舒永录　张万雄

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是在参考国内外一些优秀教材，以培养学生的创新思维及应用能力为目标，并在总结多年的实践教学经验的基础上编写而成的.全书主要内容包括绪论，线性微分方程，非线性微分方程初步，解的存在唯一性定理，定性理论初步.另外在附录中还给出了拉普拉斯变换简表.

本书可作为高等院校的数学及应用数学专业的常微分方程课程教材，也可为从事常微分方程及动力系统理论研究的科研人员提供参考，还可作为高等院校数学模型课程的参考教材.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/张谋，舒永录，张万雄主编.—重庆：重庆大学出版社，2011.9

ISBN 978-7-5624-6330-6

Ⅰ.①常… Ⅱ.①张… ②舒… ③张… Ⅲ.①常微分方程—高等学校—教材 Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第179712号

常微分方程

主 编 张 谋 舒永录 张万雄

策划编辑：曾显跃

责任编辑：李定群 姜 凤 版式设计：曾显跃

责任校对：姚 胜 责任印制：张 策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：邓晓益

社址：重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编：400030

电话：(023) 65102378 65105781

传真：(023) 65103686 65105565

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：10 字数：250千

2011年9月第1版 2011年9月第1次印刷

印数：1—2 000

ISBN 978-7-5624-6330-6 定价：19.80元

前言

微分方程是连接理论数学与应用科学的桥梁，是研究自然科学、工程技术及社会生活中一些确定性现象的有力工具. 自 Newton(1642—1727)、Leibniz(1646—1716)创立微积分以来，人们就开始研究微分方程. Newton 最早采用数学方法研究二体问题，其中需要求解的运动方程是常微分方程，他以积分的技巧求解方程，从而在理论上证明了地球绕太阳的运动轨道是一个椭圆. Leibniz 曾专门研究了利用变量变换解决一阶微分方程的求解问题，而 Euler 则试图用积分因子统一解决常微分方程的求解问题. Bernoulli、Riccati 等数学家都对早期微分方程的求解作出了贡献.

随着非线性科学理论的深入及其他应用科学如天文计算、自动控制等的推动，从 19 世纪末以来，庞加莱(Poincaré)和李雅普诺夫(Laypunov)分别创立了常微分方程定性理论和稳定性理论. 庞加莱直接根据方程的特点分析轨道的拓扑结构；而李雅普诺夫则提出运动稳定性理论，用于研究方程的解在初值扰动下的趋向问题. 这些理论在天文、物理及工程技术中得到了广泛的应用. 本世纪初，伯克霍夫(Birkhoff)继承并发展了庞加莱在天体力学中的分析方法，创立了拓扑动力系统理论，把常微分方程的研究提高到新的水平.

在微分方程理论中，无论从应用的角度或者从理论的角度来看，线性微分方程理论是其中非常值得重视的一部分内容. 线性微分方程的一般理论主要是研究解的代数结构问题. 其中心问题是研究齐次线性微分方程组的基解矩阵. 有了基解矩阵，齐次线性微分方程组的任一解可由基解矩阵表示，而非齐次线性微分方程组的任一解亦可通过积分由基解矩阵表示，这就是贯穿线性理论始终的常数变易公式. 对于常系数的线性微分方程组的求解来说，其最终归结到基解矩阵的计算. 我们在第 2 章讲述基本理论的同时，对基解矩阵的计算方法如利用根子空间、Jordan 标准形、Cayley-Hamiltion 定理以及 Laplace 变换等作了全面的阐述和归纳. 由于采用向量及矩阵等工具，高阶线性微分方程可通过变换化为线性方程组来处理. 因此，对高阶线性微分方程的解的结构问题可由线性微分方程组得到，在理论上就不再重复. 同时，我们也注意到高阶线性微分方程自身的特点，一些特殊类型的求解不必先过渡到方程组，特别是高阶常系数线性齐次或部分非齐次方程，可用代数方法求出其解，这样更便于读者掌握特殊类型方程的求解问题.

对于非线性常微分方程，除了极少数特殊类型的微分方程可求出解析解外，绝大多数的方程（如 Riccati 方程）都没有初等解法. 在第 3 章中我们以变量分离方程和恰当微分方程为基本类型，对一些可化为变量分离型及恰当微分方程的其他类型也作了较为详细的阐述，目的是训练读者利用变量变换的技巧来求解方程. 同时，对于一阶隐式微分方程及高阶方程也作了详细的分析. 读者在学习时，既要熟悉已知类型的方程以及通过变量变换化为已知类型的微分方程，也要注意各种不同类型方程之间的内在联系.

解的存在唯一性定理作为微分方程的基本定理，无论其结论还是证明方法都在微分方程理论及应用中起着十分重要的作用，我们将其放在第 4 章中讲述. 除此之外，Peano 存在定理及 Osgood 唯一性定理、比较定理及 Gronwall 不等式，解对初值及参数的连续依赖性定理及可微性定理等内容，对读者学习常微分方程的基础理论是十分必要的. 读者在学习时，要注意理解和掌握其中蕴含的基本思想.

在第 5 章我们较详细地介绍了平面自治系统的奇点的性质、极限环理论、Lyapunov 稳定性及动力系统的一些基础知识. 它是学习近代常微分方程理论的基础，对有志于从事常微分方程进一步学习和研究的读者来说是十分重要的.

本书是在参考国内外一些优秀教材，并总结多年实践教学经验的基础上编写而成的，内容可在 54 学时左右完成. 其中，第 1、2 章由张万雄副教授编写，第 3、4 章由张谋副教授编写，第 5 章由舒永录副教授编写. 全书由张谋副教授统稿.

本书由重庆市工业与应用数学学会副理事长、重庆大学数学与统计学院博士生导师穆春来教授审定.

由于编者水平有限，书中错误和不当之处难免，恳请读者批评指正.

编　者

2011 年 7 月

目录

第 1 章 绪论

微积分是人类划时代的重大发现，而微积分的产生和发展，与人们求解微分方程的需要是密切联系的. 所谓微分方程，就是含有未知函数的导数(或微分)的方程. 若未知函数是一元的，称为常微分方程. 若未知函数是多元的，称为偏微分方程.

1.1 常微分方程模型及其基本概念

1.1.1 常微分方程模型

在反映客观现实世界运动过程的量与量之间的关系中，大量存在满足常微分方程关系式的数学模型. 人们通过求解常微分方程来了解未知函数的性质，因此常微分方程是解决实际问题的重要工具. 下面通过一些实例来详细说明.

例 1.1 数学摆

如图 1.1 所示，在一根长度为 l 细线上挂着一个质量为 m 的质点 M，在重力的作用下，它在垂直于地面的平面上沿圆周运动，确定质点的运动方程.

建立力学模型主要依据是牛顿(Newton)第二定律，即

$$F = ma$$

其中，m 为该运动物体的质量，a 为其加速度，F 为作用在该物体上的总外力，它一般为时间 t、位移 x 和速度$\frac{dx}{dt}$的已知函数.

设摆动线与铅垂线的夹角为 φ，且取逆时针方向为正，反之为负. 质点沿圆周切向速度可表示为 $v=l\frac{d\varphi}{dt}$. 作用在质点 M 上的重力 mg 在圆周运动的法向分力 $mg\cos\varphi$ 与线的拉力大小相等、方向相反，相互抵消. 因为质点 M 总是沿着圆周向平衡位置 A 的方向运动，即当角 φ 为正时向减小 φ 的方向运动；当角 φ 为负时，向增大 φ 的方向运动. 所以质点 M 沿圆周切线方向的分力为 $f=-mg\sin\varphi$. 因此，质点 M 的运动方程为

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\varphi$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1.1.1}$$

这就是单摆的运动方程.

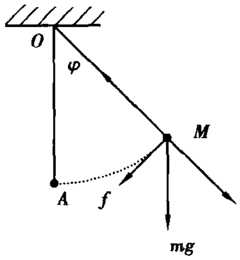

图 1.1

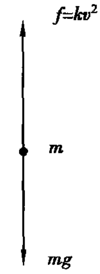

图 1.2

①如果摆只作微小振动,即 φ 比较小时,可取 $\sin\varphi\approx\varphi$,式(1.1.1)可变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\varphi=0$$

②如果沿着摆的运动方向恒有一个外力 $F(t)$ 作用于它,这时就得强迫振动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=\frac{1}{ml}F(t)$$

例 1.2　有空气阻力时的落体运动

质量为 m 的物体从高度为 h 的高空下落,除受重力作用外,还受到空气阻力的作用,在速度 v 不太大的情况(低于音速的 $\frac{4}{5}$),假设空气阻力与速度的平方成正比,空气阻力系数为 k,试求物体的运动规律.

如图 1.2 所示,若物体在时刻 t 的位移为 $x(t)$,则在时刻 t 时物体的速度为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,由于在时刻 t 物体所受的力为

$$F=mg-k\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

根据牛顿第二定律有

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2-mg=0,\text{且 }x(0)=h,v(0)=\frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}t}=0$$

例 1.3　物体冷却模型

解决物体冷却过程的数学模型需要了解有关热力学的一些基本规律.主要用到牛顿(Newton)冷却定律:在一定的温度范围内,一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在的介质温度的差值成比例.

如将某物体放置于空气中,在时刻 $t=0$ 时,测量得它的温度为 $u_0=150$ ℃,10 min 后测量得温度为 $u_1=100$ ℃.求此物体的温度 u 和时间 t 的关系,并计算 20 min 后物体的温度(假设空气的温度保持为 $u_a=24$ ℃).

设物体在时刻 t 的温度为 $u=u(t)$,则温度的变化速度为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.注意到热量总是从温度高的

物体向温度低的物体传导，因而 $u_0>u_a$ 时温差 $u-u_a$ 恒正；又因物体将随时间而逐渐冷却，故温度变化速度$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 恒负. 应用牛顿冷却定律得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-k(u-u_a)$$

其中，k 为比例常数. 此微分方程的解为

$$u=u_a+c\mathrm{e}^{-kt}$$

注意到

$$u(0)=150\ ℃\ 及\ u(10)=100\ ℃$$

从而

$$u=24+126\mathrm{e}^{-0.051t}$$

其中

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{u_0-u_a}{u_1-u_a}=\frac{1}{10}\ln 1.66\approx 0.051$$

例 1.4　RLC 电路

考虑一个 RLC 电路，如图 1.3 所示，用 i_R, i_L, i_C 和 v_R, v_L, v_C 分别表示流过电阻 R. 线圈 L 及电容 C 的电流（方向如图 1.3 所示）和产生的电压差，试分析 i_L, v_C 的变化规律.

根据 Kirchhoff 电流定律和电压定律，有

$$i_R=i_L=-i_C, v_R+v_L=v_C$$

又由欧姆定律和 Faladay 定律有

$$f(i_R)=v_R,\ L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=v_L$$

其中，$L>0$ 为线圈的电感，f 为电阻特性曲线，如图 1.4 所示.

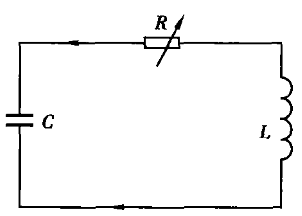

图 1.3

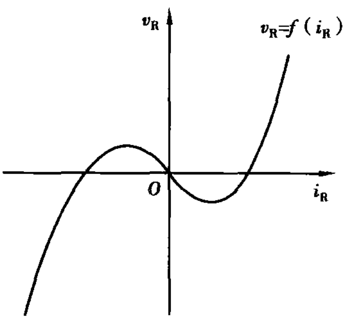

图 1.4

对于电容器 C，由 $Cv_C=q_C$，可以得到

$$C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=i_C$$

其中，$C>0$ 是电容器的电容.

由此得到 6 个变量满足的 6 个方程，用 i_L 和 v_C 表示其他的变量

$$i_R=i_L, i_C=-i_L$$
$$v_R=f(i_R)=f(i_L), v_L=v_C-v_R=v_C-f(i_L)$$

于是可以得到 RLC 电路所满足的微分方程组

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = v_{\mathrm{C}} - f(i_{\mathrm{L}}) \\ C\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} = -i_{\mathrm{L}} \end{cases} \tag{1.1.2}$$

为简单起见，取 $L=1, C=1$. 又记 $i_{\mathrm{L}}=x, v_{\mathrm{C}}=y$. 则可得 $x-y$ 平面上的一个微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - f(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x \end{cases} \tag{1.1.3}$$

消去方程组(1.1.3)中的变量 y 有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + f'(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0$$

同理，可消去方程组(1.1.3)中的变量 x 而得到 y 满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - f\left(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + y = 0$$

例 1.5 弹簧振动

在图 1.5 中，质量为 m 的物体沿 x 方向作水平直线运动，它除了受弹簧系数(使弹簧伸长或缩短单位长度所需要的力)为 k 的弹簧力作用外，还受到底部摩擦力(设摩擦系数为 μ)的作用，求弹簧上物体的运动方程.

由于弹力的方向总是指向平衡位置 $x=0$，而摩擦力的方向总是与运动速度$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$相反，于是有

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\mu mg\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx$$

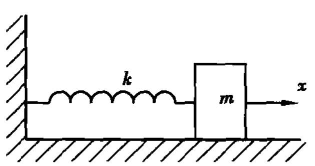

图 1.5

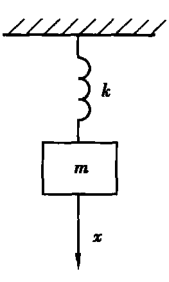

图 1.6

在图 1.6 中，若物体所受到的空气阻力与速度成正比，阻尼系数为 n，则弹簧上物体的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + mg$$

一般地，单自由度[①]的振动方程为

① 完全确定一个物体在空间位置所需要的独立坐标数目，叫做这个物体的自由度.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=0 \tag{1.1.4}$$

其中，$g(x)$是力，$f(x)\dot{x}$ 是阻力. 这个方程亦称为 **Lienard** 方程，而著名的 **van der pol** 方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0\ (\mu>0)$$

则是方程(1.1.4)的一个特例.

令$\frac{dx}{dt}=y$，则可以将方程(1.1.4)化为如下等价方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-g(x)-f(x)y\end{cases} \tag{1.1.5}$$

还可作如下变换：即令 $y=\frac{dx}{dt}+F(x)$，其中 $F(x)=\int_0^x f(x)dx$. 则可将方程组(1.1.5)化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-F(x)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-g(x)\end{cases} \tag{1.1.6}$$

比较方程组(1.1.3)与方程组(1.1.6)，可以看出，方程组(1.1.3)是方程组(1.1.6)的特殊情形.

例 1.6　增长率问题

设 $x(t)$为某类生物种群的数量，$b(t)$为瞬时出生率(在时刻 t 该类生物每单位时间每单位种群增加的数量)，$d(t)$为瞬时死亡率(在时刻 t 该类生物每单位时间每单位种群减少的数量)，则有微分方程

$$\frac{dx(t)}{dt}=(b(t)-d(t))x(t)$$

这里假设 $x(t)$可微，$b(t)-d(t)=\mu(t)$称为该生物种群数量的**纯增长率**，它往往与种群数量有关，即 $\mu=\mu(t,x)$. 于是，上面的微分方程可改写为

$$\frac{dx(t)}{dt}=\mu(t,x)x(t) \tag{1.1.7}$$

这就是纯增长率问题的数学模型.

①当 $\mu(t,x)=k$ 为常数时，将"某类生物种群"设想为"某地区的人口"就得到**马尔萨斯(Malthus)人口发展方程**，此时，式(1.1.7)可变为

$$\frac{dx(t)}{dt}=kx(t)$$

设某地区人口的初始数量为 $x(0)=x_0$，方程的解为

$$x(t)=x_0e^{kt}$$

因此，当 t 取离散值 1,2,3,…,时，人口数量是以 e^k 为公比的几何级数增长.

②设 $x(t)$是某池塘中某种鱼群数量，池塘中能够容纳生存该种鱼的最大数量为 M，这时该鱼类种群数量的纯增长率可取为

$$\mu = rx\left(1 - \frac{x}{M}\right)$$

方程(1.1.7)可变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{M}\right) \tag{1.1.8}$$

其中,$r>0$ 为该鱼种的固有增长率,方程(1.1.8)称为 **Logistic 方程**,它比方程(1.1.7)更准确地反映了生物种群数量在其食物、生存空间受到约束情况下的增长过程.

注意:对某种耐用商品的销售量 $x(t)$ 也可用 Logistic 方程来描述,即该商品的销售速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与销售量 x 和消费者持有该种商品的饱和程度 $a-x$ 的乘积 $x(a-x)$ 成正比,即有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(a-x)$$

其中,$k>0$ 为比例常数,a 为消费者可能购买该种商品的最大数量.

从前面的例子大致可以看出,微分方程模型的特点是反映客观现实世界中量与量的变化关系,并且往往与时间有关,是一个动态(力)系统.构造常微分方程的数学模型最常用的方法是从物理、力学、生物等确定的自然规律出发,考虑其主要因素,忽略次要因素,提炼出状态变量,然后根据实际情况应用相应的规律得到这些变量满足的微分方程.并且从前述例子中不难发现,完全无关的,本质上不同的自然现象有时可以用同类型的微分方程来描述,因此微分方程是我们处理实际问题的有力工具.

1.1.2 常微分方程基本概念

所谓微分方程,就是含有未知函数的导数(或微分)方程.当未知函数是一元实变量函数时,称为实值常微分方程,当未知函数是复值时,称为复值常微分方程,当未知函数是多元函数时,称为偏微分方程.本书若无特别说明时,限于讨论实值常微分方程.

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的**阶**,一般的 n 阶常微分方程具有如下形式

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0 \tag{1.1.9}$$

其中,$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right)$ 是 $x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 的已知函数,$y(x)$ 是未知函数,而且一定含有 $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.如果方程(1.1.9)的左端为 y 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 的一次有理整式,则称方程(1.1.9)为 n 阶**线性常微分方程**.即具有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n(x)y = f(x) \tag{1.1.10}$$

不是线性的微分方程称为**非线性常微分方程**.

例 1.7 单摆的运动方程 $\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0$ 是二阶线性微分方程.

贝努利方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)y^n$,$(n\neq 0,1)$ 是一阶非线性微分方程.

Riccati 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ 是一阶非线性微分方程.

波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f(t,x,y,z)$ 是二阶偏微分方程.

拉普拉斯方程 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 是二阶偏微分方程.

如果函数 $y=\varphi(x)$ 代入方程(1.1.9)后,能使它变为恒等式,则称函数 $y=\varphi(x)$ 为方程(1.1.9)的**显式解**. 如果关系式 $\Phi(x,y)=0$ 决定的隐函数是方程(1.1.9)的解,则称 $\Phi(x,y)=0$ 为方程的**隐式解**. 为简单起见,我们把显式解和隐式解统称为方程的解. 把含有 n 个独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n) \tag{1.1.11}$$

称为 n 阶微分方程(1.1.9)的**通解**.

通常情况下,微分方程只描述了某个过程的一般规律,为了把一个具体过程的进展情况完全确定下来,还需要知道这个过程发生的具体条件,这就是所谓的**定解条件**. 常见的定解条件是初值条件和边值条件. n 阶微分方程(1.1.9)的初值条件是指如下的 n 个条件:当 $x=x_0$ 时

$$y=y_0,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y_0^{(1)},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y_0^{(2)},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}=y_0^{(n-1)} \tag{1.1.12}$$

其中,$y_0,y_0^{(1)},\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是已知常数.

求微分方程满足定解条件的解,就是所谓**定解问题**. 当定解条件为初值条件时,相应的定解问题,就称为**初值问题**也称为 **Cauchy 问题**. 本书主要讨论初值问题,这里把满足初值条件的解称为微分方程的**特解**①. 一般来说初值条件不同,对应的特解也不同.

1.2　常微分方程的求解思想与几何解释

常微分方程的求解思想有 3 个主要方向:解析方法,是把微分方程的解看作由该方程所定义的一种函数(包括特殊函数);数值方法,是求微分方程满足一定定解条件的解之近似值的各种方法;几何方法(定性方法),是把微分方程的解看成充满平面或空间的曲线族,通过所给方程画出曲线族的大致图形,借助某些工具研究其几何性质,进而得到有用的结论.

1.2.1　计算与近似计算

下面通过一些具体的实例来阐明微分方程的求解过程及近似逼近的思想.

例 1.8　设有一质量为 m 的质点 B 作自由落体运动,试建立质点的运动方程.

解　取坐标轴 y 从地面垂直向上,水平轴为 x 轴,$y=y(t)$ 表示质点 B 在时刻 t 的位置坐标,则由 Newton 第二定律可得一个二阶微分方程.

$$y''=-g \tag{1.2.1}$$

其中,g 为重力加速度(一般取常数为 $9.8\ \mathrm{m/s^2}$).

为了得到质点 B 的运动规律,需要求解方程(1.2.1),将方程(1.2.1)积分两次可得

$$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2 \tag{1.2.2}$$

① 特解是指某一特定的解,特别地,初值问题的解是特解.

其中，c_1, c_2 为任意常数.

通解表达式(1.2.2)给出了自由落体的运动规律，为了确定某个具体的运动过程，还需给出质点 B 在初始时刻的运动状态. 即初始时刻($t=0$)的位置(高度)y_0 和初速度 v_0

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = v_0$$

将其代入通解表达式(1.2.2)可解得 $c_1 = v_0, c_2 = y_0$. 因此得到质点 B 在某个具体过程中运动规律

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

然而在一些实际问题中，一般不能以解析形式给出方程的通解. 为了适应科学技术的发展，研究高精度和高效率的微分方程的数值解变得越来越重要，特别是现代计算机技术的飞速发展为微分方程的数值计算提供了强大的工具. 例如将初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

化为其满足的等价的积分方程形式

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau$$

这样可以迭代地构造一个函数序列来逼近其初值问题的特解.

$$\begin{aligned} &x_0(t) \equiv x_0 \\ &x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))\mathrm{d}\tau \qquad n = 1,2,\cdots \end{aligned}$$

在保证收敛性的条件下，对较大的 n，函数 $x_n(t)$ 就是一个近似解，这就是我们将在第 4 章中介绍的 Picard 逐步逼近法，除此之外，还将在第 4 章进一步介绍 Euler 折线法，它们的思想是微分方程数值解的基础.

1.2.2 解的几何解释

一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \tag{1.2.3}$$

的解 $y=\varphi(x)$ 表示 xOy 平面上的一条曲线，称为微分方程(1.2.3)的积分曲线，而通解 $y=\varphi(x,c)$ 表示平面上的一族曲线，称为微分方程(1.2.3)的积分曲线簇. 特解则表示过 xOy 平面上的定点(x_0, y_0)的一条积分曲线. 易知，积分曲线上的每一点(x,y)及该点的斜率$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$满足方程(1.2.3)，反之，满足方程的$(x_0, y_0)$及$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x_0, y_0)$均在积分曲线上.

设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D. 在每一点$(x,y)\in D$ 处画上一个小线段，其斜率等于 $f(x,y)$. 这样的区域 D 称为是由方程(1.2.3)所定义的**线素场**. 因此，积分曲线就是一条每个点的切线都与线素场一致的光滑曲线. 微分方程的求解就是寻找这样的光滑曲线.

积分曲线的分布状况，可以由先求出一些**等倾线**来分析，所谓“等倾线”就是线素场中斜率相同的曲线，它由

$$f(x,y) = k$$

确定. 特殊情况，当 $k=0$ 时，称相应的等倾线为水平等倾线；当 $k=\infty$ 时，即 $\dfrac{1}{f(x,y)}=0$ 时，称相应的等倾线为竖直等倾线.

例 1.9 考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x-t}{x+t} \tag{1.2.4}$$

解 斜率为 k 的等斜线满足

$$\frac{x-t}{x+t}=k$$

即

$$x=\frac{1+k}{1-k}t$$

因此，过原点的直线都是等倾线. 其中 $x=t$ 和 $x=-t$ 分别为水平等倾线和竖直等倾线. 设 α_i,α_v 分别表示等倾线和线素场的方向与 t 轴的夹角. θ 表示等倾线同线素场的方向的夹角，则 $\theta=\alpha_i-\alpha_v$，又由

$$\tan\theta=\frac{\tan\alpha_i-\tan\alpha_v}{1+\tan\alpha_i\tan\alpha_v}=\frac{\dfrac{1+k}{1-k}-k}{1+\dfrac{1+k}{1-k}k}=1$$

因此，这些等倾线同线素场的方向成 45°角. 容易看出方程的积分曲线是围绕坐标旋转的螺线而且是沿顺时针方向由里向外. 在直线 $x=-t$ 上方程(1.2.4)是没有意义的，但从线素场来看，在直线 $x=-t$ 上每一点线素场的方向都是垂直的，这时可用方程

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x+t}{x-t}$$

来代替原方程(1.2.4). 并且在竖直等倾线 $x=-t$ 附近，可以把积分曲线看成是 t 关于 x 的函数. 方程的积分曲线如图 1.7 所示.

例 1.10 考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=x(2-x) \tag{1.2.5}$$

解 它有水平等倾线 $x=0$ 和 $x=2$. 其中导数 $\dfrac{dx}{dt}$ 在区域 $x<0$, $0<x<2$ 和 $x>2$ 上分别是 <0, >0 和 <0，因此，积分曲线在对应区域上分别是递减、递增和递减. 易知水平等倾线 $x=0$ 和 $x=2$ 本身也是积分曲线，它们是方程(1.2.5)的常数解，称为**平衡解**①. 其他的积分曲线以它们为渐近线，进一步地有

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2(1-x)\frac{dx}{dt}=2x(x-1)(x-2)$$

因此，还可以得到积分曲线的凹凸性等方面的信息，据此可得积分曲线的大致分布，如图 1.8 所示.

从上述例子可以看出，平衡解对于从几何上分析微分方程解的性质是十分重要的. 除此之外，我们还关心方程的周期解及极限环等，以及周期的积分曲线的变化趋势. 这些问题仅用线素场来判断就不够了，尤其是对于形式较复杂的方程，将在最后一章阐述这一问题.

---

① 参见第 5 章.