高职高专规划教材

高等数学

于红霞　李先记　李庆芳　主编

Advanced Mathematics

化学工业出版社

高职高专规划教材

高等数学

于红霞　李先记　李庆芳　主编

化学工业出版社
·北京·

本书共分十二章，主要内容包括函数、极限、连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，二重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数、微分方程。书后附有习题答案与提示。本书特别注重培养学生用数学概念、思想、方法消化吸收各种典型的习题和证明题。

本书内容全面，由浅入深，循序渐进，语言叙述简练，例题选择精准，章节后习题的份量较大，每章后面配有总复习题，以保证对基本知识点的训练、掌握、延伸。为加强读者对内容知识点的掌握，每章后面还对本章的基本概念、基本定理、疑点解答、基本题型四个方面进行了小结。

本书可作为高职高专院校理工类高等数学通用教材，也可供工科类相关专业专升本辅导教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/于红霞，李先记，李庆芳主编. —北京：化学工业出版社，2015. 9

高职高专规划教材

ISBN 978-7-122-24657-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①于…②李…③李… Ⅲ. ①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 162092 号

责任编辑：高 钰　　文字编辑：李 曦

责任校对：边 涛　　装帧设计：刘丽华

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）

印 装：大厂聚鑫印刷有限责任公司

787mm×1092mm 1/16 印张 21 字数 513 千字 2015 年 10 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899

网 址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定 价：39.00 元

前　　言

本书是根据专科教学大纲以及最新专升本考试基本内容与要求，由教学经验丰富的教师结合教学体会编写完成的，其宗旨是使在校工科大学生能较快、较好地掌握高等数学这门课程，另外，通过该书的学习能够强化基本概念的掌握、扩大课程信息量，延伸运算与证明问题的处理技巧，增强数学科学能力的培养，为想深入学习并参加专升本的同学提供一本系统精练的入门资料。

本书共十二章。内容有函数、极限、连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，二重积分，曲线积分，无穷级数和微分方程。每章内容后面有本章小结、复习题。每节的内容有基本概念、基本定理、疑点解答、基本题型，最后有参考答案。

本书每章的内容有四大部分，第一部分是根据专科和升本内容要求给出的基本内容与要求；第二部分是课程的内容精析，它是对课程的重点、难点、要点的小结和补充，起着画龙点睛的作用；第三部分为典型例题，是根据不同的知识点选出的有较强概念、运算或证明价值的例题，通过这些例题的学习能够使学生较快地掌握知识点，完成课程学习；第四部分为复习题，着重测试对本章基本概念、定理和方法的掌握情况，建议学习完本章内容后再使用。

本书为专科和升本两用的教材和指导书，在内容上比目前专科教科书有所加深和拓展，因此对专科不要求的内容均用 * 号给予标注，但对准备升本的同学来说是简捷、必要的参考材料。

本书是在河南化工职业学院赵玉奇院长的大力支持和鼓舞下，由一线数学教师，根据多年的数学教学经验和辅导专升本的经验编写而成的。本书由于红霞、李先记、李庆芳主编，其中第一章、第二章由于红霞老师编写，第三章、第七章由李先记老师编写，第四章由胡平和刘喜明老师编写，第五章、第六章、第九章由李庆芳老师编写，第八章由饶明贵老师编写，第十章由郭文豪老师编写，第十一章由刘红江老师编写，第十二章由李雷民老师编写。全书的构思和结构由主编共同商定，最后由于红霞统稿、定稿完成。

由于笔者的经验和水平所限，难免出现疏漏，恳请读者批评指正。

编者

2015 年 7 月

目　录

第一章　函数、极限、连续 …… 1
第一节　集合与函数 …… 1
一、集合、区间、邻域 …… 1
二、函数的概念 …… 3
三、函数的性质 …… 5
四、初等函数的概念与应用 …… 7
五、函数的应用 …… 11
第二节　极限 …… 14
一、数列的极限 …… 14
二、函数的极限 …… 15
三、极限的性质 …… 18
四、无穷小量与无穷大量 …… 18
第三节　极限的运算 …… 20
一、极限的两个常用公式 …… 20
二、极限的运算法则 …… 21
第四节　无穷小的性质及应用 …… 25
一、极限与无穷小之间的关系 …… 25
二、无穷小的运算性质 …… 25
三、无穷小的比较 …… 26
第五节　函数的连续性 …… 27
一、连续函数的概念 …… 27
二、函数的间断点及其类型 …… 29
三、连续函数的基本性质 …… 30
四、闭区间上连续函数的性质 …… 31
本章小结 …… 33
复习题一 …… 34

第二章　导数与微分 …… 37
第一节　导数的概念 …… 37
一、导数的定义 …… 37
二、左导数和右导数 …… 39
三、求导数的步骤 …… 39
四、导数的几何意义 …… 40

五、可导与连续的关系 …… 41
六、导数的应用 …… 42
第二节 导数的运算 …… 43
一、基本初等函数的导数公式 …… 43
二、导数的四则运算法则 …… 44
三、复合函数的求导法则 …… 45
四、高阶导数 …… 47
第三节 隐函数及参数方程所确定的函数的导数 …… 50
一、隐函数求导法 …… 50
二、由参数方程所确定的函数的求导法 …… 52
第四节 微分及其计算 …… 53
一、微分的概念 …… 53
二、微分的几何意义 …… 54
三、微分的公式与运算法则 …… 54
四、微分在近似计算中的应用 …… 56
本章小结 …… 58
复习题二 …… 60

第三章 导数的应用 …… 63
第一节 微分中值定理及其应用 …… 63
一、微分的中值定理 …… 63
二、洛必达法则 …… 65
第二节 函数的单调性及其极值 …… 68
一、函数单调性的判定 …… 68
二、一元函数的极值及求法 …… 70
第三节 最大值与最小值及其应用 …… 73
一、最大值和最小值的求法 …… 73
二、极值在经济中的应用 …… 75
第四节 曲线的凹凸与拐点、函数图形的描绘 …… 77
一、曲线的凹凸与拐点 …… 77
二、函数图形的描绘 …… 79
本章小结 …… 82
复习题三 …… 83

第四章 不定积分 …… 85
第一节 不定积分的概念 …… 85
一、原函数与不定积分 …… 85
二、不定积分与导数或微分的关系 …… 87
三、基本积分公式 …… 87
四、不定积分的运算性质和计算 …… 89

五、不定积分的几何意义 …… 90
第二节 换元积分法 …… 92
一、第一类换元积分法（凑微分法） …… 92
二、第二类换元积分法 …… 95
第三节 分部积分法 …… 100
本章小结 …… 103
复习题四 …… 104

第五章 定积分 …… 106
第一节 定积分的概念和性质 …… 106
一、定积分的概念 …… 106
二、定积分的几何意义 …… 109
三、定积分的性质 …… 110
第二节 微积分的基本公式 …… 113
一、变上限积分 …… 113
二、牛顿-莱布尼茨公式 …… 115
第三节 定积分的换元法与分部积分法 …… 117
一、定积分的换元积分法 …… 117
二、定积分的分部积分法 …… 120
第四节 广义积分 …… 123
一、无穷区间的广义积分 …… 123
二、无界函数的广义积分 …… 125
本章小结 …… 127
复习题五 …… 128

第六章 定积分的应用 …… 131
第一节 定积分的微元法 …… 131
第二节 定积分的几何应用 …… 132
一、平面图形的面积 …… 132
二、立体的体积 …… 136
三、平面曲线的弧长 …… 138
*第三节 定积分在物理方面的应用 …… 140
一、引力 …… 140
二、变力做的功 …… 141
三、液体的压力 …… 142
四、平均值 …… 142
第四节 定积分在经济中的应用 …… 144
本章小结 …… 145
复习题六 …… 146

第七章 向量代数与空间解析几何 …… 148
第一节 空间直角坐标系和向量的基本知识 …… 148
一、空间直角坐标系 …… 148
二、空间两点间的距离公式 …… 149
三、向量的概念及其坐标表示法 …… 150
第二节 向量的数量积与向量积 …… 155
一、向量的数量积 …… 155
二、向量的向量积 …… 156
第三节 空间的平面方程 …… 159
一、平面的点法式方程 …… 159
二、平面的一般方程 …… 160
三、两平面的夹角 …… 161
第四节 空间直线的方程 …… 162
一、空间直线的点向式方程和参数方程 …… 162
二、空间直线的一般方程 …… 164
三、空间两直线的夹角 …… 164
第五节 二次曲面与空间曲线 …… 167
一、曲面方程的概念 …… 167
二、常见的二次曲面及其方程 …… 167
三、空间曲线的方程 …… 169
四、空间曲线在坐标面上的投影 …… 171
本章小结 …… 172
复习题七 …… 173

第八章 多元函数微分学 …… 176
第一节 二元函数的概念、极限、连续 …… 176
一、二元函数的概念 …… 176
二、二元函数的极限 …… 179
三、二元函数的连续性 …… 180
第二节 偏导数 …… 181
一、偏导数的概念及其运算 …… 181
二、高阶偏导数 …… 184
第三节 全微分及其应用 …… 186
一、全微分的概念 …… 186
二、全微分的应用 …… 187
第四节 多元复合函数与隐函数的微分法 …… 189
一、多元复合函数的求导法则 …… 189
二、隐函数的求导公式 …… 192
第五节 偏导数的应用 …… 195
一、偏导数的几何应用 …… 195

二、二元函数的极值 ………………………………………………………………………… 197
三、二元函数的最值 ………………………………………………………………………… 200
四、条件极值 ……………………………………………………………………………… 201
本章小结 …………………………………………………………………………………… 202
复习题八 …………………………………………………………………………………… 204

第九章　二重积分 ……………………………………………………………………… 208
第一节　二重积分的概念与性质 ………………………………………………………… 208
一、二重积分的概念 ………………………………………………………………………… 208
二、二重积分的性质 ………………………………………………………………………… 210
第二节　二重积分的计算方法 …………………………………………………………… 211
一、直角坐标系中的累次积分法 …………………………………………………………… 212
二、极坐标系中的累次积分法 ……………………………………………………………… 216
第三节　二重积分的应用 ………………………………………………………………… 220
一、几何上的应用 …………………………………………………………………………… 220
*二、物理上的应用 ………………………………………………………………………… 221
本章小结 …………………………………………………………………………………… 224
复习题九 …………………………………………………………………………………… 224

***第十章　曲线积分** ……………………………………………………………………… 226
第一节　对弧长的曲线积分 ……………………………………………………………… 226
一、对弧长曲线积分的概念 ………………………………………………………………… 226
二、对弧长的曲线积分的计算法 …………………………………………………………… 227
第二节　对坐标的曲线积分 ……………………………………………………………… 228
一、对坐标的曲线积分的概念 ……………………………………………………………… 228
二、对坐标的曲线积分的计算法 …………………………………………………………… 231
三、两类曲线积分间的联系 ………………………………………………………………… 233
第三节　格林公式、平面上曲线积分与路径无关的条件 ……………………………… 234
一、格林（Green）公式 …………………………………………………………………… 234
二、平面上曲线积分与路径无关的条件 …………………………………………………… 236
本章小结 …………………………………………………………………………………… 240
复习题十 …………………………………………………………………………………… 241

第十一章　无穷级数 …………………………………………………………………… 243
第一节　数项级数的概念及其基本性质 ………………………………………………… 243
一、数项级数的概念 ………………………………………………………………………… 243
二、数项级数的基本性质 …………………………………………………………………… 245
第二节　数项级数的审敛法 ……………………………………………………………… 247
一、正项级数及其审敛法 …………………………………………………………………… 247
二、交错级数及其审敛法 …………………………………………………………………… 251

三、任意项级数的敛散性 …… 252
第三节　幂级数 …… 254
一、函数项级数的概念 …… 254
二、幂级数及其收敛性 …… 255
三、幂级数的运算 …… 257
第四节　函数的幂级数展开 …… 259
一、泰勒级数和麦克劳林级数 …… 259
二、函数展开成幂级数的方法 …… 260
第五节　幂级数在近似计算上的应用 …… 264
一、函数值的近似计算 …… 264
二、用幂级数表示函数 …… 265
本章小结 …… 265
复习题十一 …… 267

第十二章　微分方程 …… 270
第一节　一阶微分方程 …… 270
一、微分方程的概念 …… 270
二、可分离变量的微分方程 …… 271
三、一阶线性微分方程 …… 273
第二节　可降阶的二阶微分方程 …… 277
一、$y''=f(x)$ 型的微分方程 …… 277
二、$y''=f(x, y')$ 型的微分方程 …… 278
三、$y''=f(y, y')$ 型的微分方程 …… 279
第三节　二阶常系数的线性微分方程 …… 280
一、二阶线性微分方程解的结构 …… 280
二、二阶常系数齐次线性方程的解法 …… 282
三、二阶常系数非齐次线性方程的解法 …… 283
本章小结 …… 286
复习题十二 …… 287

习题参考答案 …… 289
参考文献 …… 321

第一章 函数、极限、连续

【教学目标】 应用集合的理论，理解函数的概念，掌握五种基本初等函数的图像和性质，理解函数极限和连续的概念，掌握极限的四则运算法则和两个重要极限公式，理解无穷小与无穷大两个概念，并会应用到实际中去.

函数是近代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 极限是研究函数变化的理论工具，连续则是函数的一个重要性态. 本章将在复习集合与函数基础上学习函数极限、连续的基本知识.

第一节 集合与函数

本节在熟悉集合的基础上，复习函数的概念、性质及应用.

一、集合、区间、邻域

集合是中学里常用的基本概念，是学习函数和方程的基础，我们先回顾集合的有关概念和运算，进而引入邻域的概念.

1. 集合的概念与运算

定义 1 我们把具有某种特定性质的对象组成的全体叫做**集合**，把构成集合的每个对象叫**元素**，集合通常用大写的英文字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 表示，元素用小写字母 a，b，c 表示、集合中的元素有**确定性**、**互异性**和**无序性**.

元素与集合的关系是属于与不属于的关系. 如：a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A 记作：$a \in A$；相反 a 不属于集合 A 记作：$a \notin A$.

集合的表示方法有**列举法**和**描述法**.

列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在一个大括号内. 如：集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

描述法：将集合中元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示，例：不等式 $x-3>2$ 的解集，描述法为 $\{x \mid x-3>2\}$ 或 $\{x \mid x>5\}$.

集合分为有限集合、无限集合和空集.

含有有限个元素的集合叫**有限集合**；含有无限个元素的集合叫**无限集合**；不含任何元素的集合叫**空集**，用字母 $\varnothing$ 表示. 如：$\{x \mid x^2=-1\}=\varnothing$.

常用数集有非负整数集（即自然数集）$\mathbf{N}$、正整数集 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}^+$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$ 和实数集 $\mathbf{R}$.

集合间的基本关系是包含与不包含以及相等的关系.

“包含”关系：若集合 A 中的所有元素都是集合 B 的元素，则集合 A 就叫集合 B 的**子集**.

表示为 $A \subseteq B$．若 $A \subseteq B$ 且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A，则 B 叫 A 的**真子集**. 记作 $A \subset B$．如 $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ 也可以写成 $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$；再如：有理数集是实数集的真子集，可以写作：$Q \subset \mathbf{R}$.

“相等”关系：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作：$A = B$．如：集合 $\{1, 2\} = \{2, 1\}$；再如 $\{x \mid x^2 = -1, x \in \mathbf{R}\} = \{$两点间白距离是$-1$ 的点$\} = \varnothing$.

集合的运算有“交”、“并”运算.

交集：所有既属于 A 且属于 B 的元素组成的集合叫做集合 A 与 B 的交集. 记作 $A \cap B$．则 $A \cap B = \{x \mid x \in A, 且 x \in B\}$.

并集：所有属于集合 A 或集合 B 的元素组成的集合叫做集合 A 与 B 的并集. 记作 $A \cup B$．则

$$A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{或} x \in B\}.$$

例 1 用描述法表示下列集合

(1) 不等于零的所有实数；(2) 自然数中所有的奇数.

解 (1) $\{x \mid x \in \mathbf{R} 且 x \neq 0\}$；

(2) $\{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbf{N}\}$.

2. 区间与邻域

区间是数轴的一部分，是数集的一种表示形式. 因此，区间的表示形式是集合的另一种表示方法，具体表述如下.

有限区间（设 a, b 为实数，且 $a < b$）：

(1) 开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$；(2) 闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；

(3) 半开区间 $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$ 或 $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$

这里的实数 a 与 b 都叫做**区间的端点**；两端点间的距离叫做**区间长度**.

无限区间：

(1) $[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$； (2) $(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$；

(3) $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$； (4) $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$；

(5) 实数集 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

定义 2 数轴上以 a 为中心，δ 为半径的开区间称为 a 的 **δ 邻域**. 记作 $U(a, \delta)$．即

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$

若以 a 为中心，δ 为半径但不包括中心点 a 的开区间称为 a 的**去心邻域**. 记作 $U(\hat{a}, \delta)$．即

$$U(\hat{a}, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

邻域的几何意义：就是数轴上与点 a 的距离小于 δ 的所有点的集合.

例 2 把下面的邻域表示为集合：

(1) $U(0, \frac{1}{2})$； (2) $U(\hat{1}, 0.01)$； (3) $U(x_0, 0.02)$.

解 (1) 以 0 为中心，$\frac{1}{2}$ 为半径的开区间，即 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$；也可以描述法表示为 $\left\{x \,\middle|\, |x| < \frac{1}{2}\right\}$.

(2) 以 1 为中心，0.01 为半径的去心邻域，用区间表示为

$$(1-0.01, 1) \cup (1, 1+0.01) \text{ 即 } (0.99, 1) \cup (1, 1.01).$$

也可以用描述法表示为

$$\{x \mid 0 < |x - 1| < 0.01\}.$$

(3) 以 x_0 为中心，0.02 为半径的邻域，其几何意义是：与点 x_0 的距离小于 0.02 的所有点的集合. 即 $\left\{x \,\middle|\, |x - x_0| < 0.02\right\}$.

二、函数的概念

函数是高等数学研究的对象，是学习微积分的基础

1. 函数的定义

定义 3 设 D 是一个非空实数集合，若对 D 内任意一个实数 x，按照一定的对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，则称**变量 y 是 x 的函数**，记为：

$$y = f(x),\ x \in D$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为函数（也称为**因变量**），自变量的取值范围 D 称为函数的**定义域**.

若对于确定的 $x_0 \in D$，通过对应规律 f，函数 y 有唯一确定的值 y_0 相对应，则称 y_0 为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**. 记为：

$$y_0 = f(x_0) \text{ 或 } y\big|_{x=x_0} = f(x_0)$$

函数值的集合 M 称为函数的**值域**.

若函数在某个区间上的每一点都有意义，则称这个函数在该**区间上有定义**. 若 $x_0 \notin D$，则称该函数在 x_0 点无定义.

例 3 已知函数 $y = f(x) = 3x^2 - 2x + 4$，求其定义域并求 $f(1)$，$f(a)$，$f(-x)$ 的函数值.

解 该函数是一个多项式，所以函数的定义域为一切实数，用区间表示 $(-\infty, +\infty)$. 已知函数的表达式，求指定点的函数值时，就是把函数中的自变量 x，换成指定点的值计算出即可. 所以

$$f(1) = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 4 = 5$$

或表示为 $y\big|_{x=1} = (3x^2 - 2x + 4)\big|_{x=1} = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 4 = 5$

同理可得 $f(a) = 3a^2 - 2a + 4$ 或 $y\big|_{x=a} = 3a^2 - 2a + 4$

同理可求 $f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x) + 4 = 3x^2 + 2x + 4$

例 4 求函数 $g(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{x-2}$ 的定义域，并求 $g(3)$ 和 $g(x+1)$.

解 该函数由两项构成，其定义域应该是各项自变量取值范围的公共部分. 所以要使函数有意义，就必须满足

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

解之，得 $x \geqslant -1$ 且 $x \neq 2$

所以函数的定义域用集合表示为 $\{x \mid x \geqslant -1 \text{ 且 } x \neq 2\}$，或用区间表示为 $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

当自变量 $x = 3$ 时，其函数值

$$g(3) = \sqrt{3+1} + \frac{1}{3-2} = 3;$$

当自变量为 $x + 1$ 时，所对应的函数值

$$g(x+1)=\sqrt{x+1+1}+\frac{1}{x+1-2}=\sqrt{x+2}+\frac{1}{x-1}.$$

2. 确定函数的两个要素

函数是由**定义域和对应法则**两个要素确定的. 因此，对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时，才表示同一个函数. 而与自变量及因变量用什么字母表示无关，例如 $y=x^2$，$x\in R$ 和 $y=t^2$，$t\in R$ 是同一个函数.

例 5 下列各对函数是否相同?

(1) $y=x^2$ 与 $y=t^2$； (2) $y=1$ 与 $y=\frac{x}{x}$；

(3) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$； (4) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos x^2}$.

解 (1) 两个函数的定义域相同，函数关系式也相同，所以表示的是同一个函数.

(2) 函数 $y=1$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $y=\frac{x}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，两个函数的定义域不同，所以不表示同一个函数.

(3) 两个函数的定义域都为 $(-\infty,+\infty)$，但对应法则不同，故它们不是同一个函数.

(4) $y=\sqrt{1-\cos x^2}=|\sin x|$，两个函数的定义域相同，但对应法则不同，所以不表示同一个函数.

3. 函数的表示方法

函数的表示方法常用的有三种：**表格法**、**公式法**、**图像法**.

(1) **表格法** 是以表格形式把一系列自变量与其对应的因变量表示出来的方法。如大家熟悉的三角函数表、对数表等。表格法的优点是所求的函数值容易查到，一目了然，多用在自然科学和工程技术上.

(2) **公式法 也叫做解析法**，就是用数学式表示函数的方法。上面例 3、例 4 中的函数都是用公式法表示的，公式法的优点是便于推导和计算，表达清晰、紧凑.

(3) **图像法** 就是在坐标平面上用图形表示函数的方法。这种方法在工程技术上应用比较普遍，图像法的优点是直观形象，且可看到函数的变化趋势.

函数用公式法表示时，经常遇到这样的情形：自变量在定义域的不同取值范围内具有不同的解析式，我们把这种函数叫做**分段函数**. 分段函数经常在数学和工程技术上遇到. **分段函数的定义域是自变量的各个不同取值范围的并集**.

例 6 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}\text{（如图 1-1 所示）},$$

求 $f(-3)$，$f(2)$ 的函数值，并求函数的定义域.

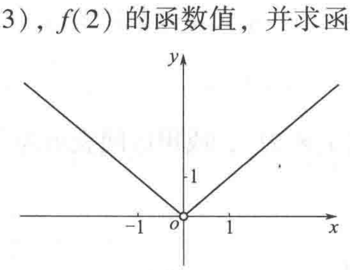


图 1-1

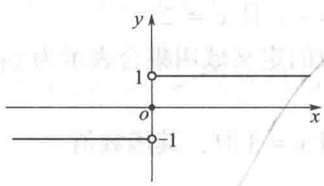


图 1-2

解 因为 $-3<0$，所以其函数值 $f(-3)=-(-3)=3$；

又因为 $2>0$，所以其函数值 $f(2)=2$.

原函数的定义域为：$\{x|x\geqslant 0\}\cup\{x|x<0\}=(-\infty,+\infty)$.

例 7　符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}\quad（如图 1-2 所示），$$

求 $f(-3)$，$f(2)$ 的函数值，并求函数的定义域.

解　因为 $-3<0$，所以其函数值 $f(-3)=-1$；又因为 $2>0$，所以其函数值 $f(2)=1$.

原函数的定义域为

$$\{x|x>0\}\cup\{x|x=0\}\cup\{x|x>0\}=(-\infty,+\infty).$$

4. 反函数的概念

定义 4　设 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的函数，其值域为 M. 若对于 M 中的每个 y，数集 D 中都有唯一一个 x 与之对应，这时变量 x 是 y 的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 其定义域为 M，值域为 D.

习惯上，自变量用 x 表示，所以反函数 $x=f^{-1}(y)$ 可以写成 $y=f^{-1}(x)$.

函数与反函数图像之间是关于直线 $y=x$ 对称的.

例 8　求下列函数的反函数：

(1) $y=2x-1$；　　(2) $y=x^2$，$x\in(0,+\infty)$.

解　(1) 由函数解出 x，得 $x=\dfrac{y+1}{2}$，x 与 y 互换得 $y=\dfrac{x+1}{2}$.

所以，原函数的反函数是

$$y=\frac{x+1}{2},\ x\in R.$$

(2) 因为 $x\in(0,+\infty)$，由函数解出 x 得 $x=\sqrt{y}$，x 与 y 互换得 $y=\sqrt{x}$.

所以，原函数的反函数是

$$y=\sqrt{x},\ x\in(0,+\infty).$$

注意：(1) 求出函数的反函数时，要写出反函数的定义域；

(2) $y=f(x)$ 和反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在这样关系 $f^{-1}(f(x))=x$ 和 $f(f^{-1}(x))=x$.

三、函数的性质

函数的几何特性包括奇偶性、单调性、周期性和有界性.

1. 奇函数和偶函数

若函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对定义域中的任意 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**；**奇函数的图像关于原点对称.**

若函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，且对定义域中的任意 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；**偶函数的图像关于 y 轴对称.**

如果函数 $y=f(x)$ 的图像，既不关于原点对称，也不关于 y 轴对称，那么称函数 $y=f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

用描点法画出函数 $y=x^2-1$，$y=x^3$，$y=\sqrt{x}$ 的图像，如图 1-3~图 1-5 所示，可以看出：图 1-3 中函数的图像关于 y 轴对称，即取一对相反的自变量，所对应的函数值相等，如

$f(-1)=f(1)$，所以函数 $y=x^2-1$ 是偶函数.

图 1-4 中，函数的图像关于原点对称，即取一对相反的自变量，所对应的函数值相反，如 $f(-1)=-f(1)$，所以函数 $y=x^3$ 是奇函数.

图 1-5 中，函数的图像既不关于 y 轴对称也不关于原点对称，所以函数 $y=\sqrt{x}$，是非奇非偶函数.

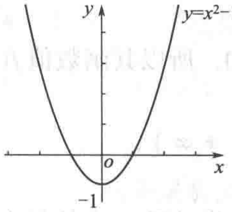


图 1-3

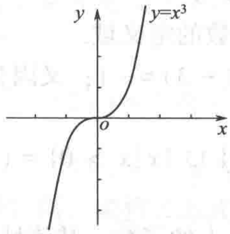


图 1-4

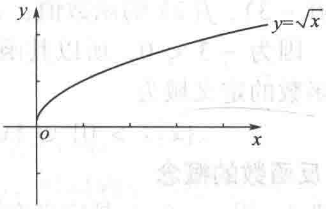


图 1-5

注意：奇函数、偶函数所在的区间必须是对称区间.

2. 函数的单调性

如果对函数 $y=f(x)$ 的定义区间 (a, b) 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 成立，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内**单调增加**，如果等号恒不成立即 $f(x_1)<f(x_2)$，则称为**严格单调增加**，相应的区间 (a, b) 为**单调增区间**；如果对函数 $y=f(x)$ 的定义区间 (a, b) 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 成立，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内**单调减少**，如果等号恒不成立即 $f(x_1)>f(x_2)$，则称为**严格单调减少**，相应的区间 (a, b) 为**单调减区间**.

由图 1-3 可以直观地看出，函数 $y=x^2-1$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 在区间 $(-\infty, 0)$ 内，函数值 y 随着自变量 x 的增加而减少，因此是减函数，在区间 $(0, +\infty)$ 内，函数值 y 随着自变量 x 的增加而增加，因此是增函数；其中 $(-\infty, 0)$ 称为单调的减区间，$(0, +\infty)$ 称为单调的增区间.

注意：函数 $y=x^2-1$ 在其定义域内不是单调函数，但有单调区间.

3. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，对 $\forall x\in D$（注："$\forall$"读作"任意的"，D 表示定义域），均有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，并把**最小的正数 T 称为 $f(x)$ 的周期**.

如图 1-6，函数 $y=\sin x$，对于 $\forall x\in D$，都有 $\sin(x+2k\pi)=\sin x k\in\mathbf{Z}$，可以看出 2π、4π、8π、…都是正弦函数 $y=\sin x$ 的周期，通常把最小的正数 2π 作为正弦函数的周期.

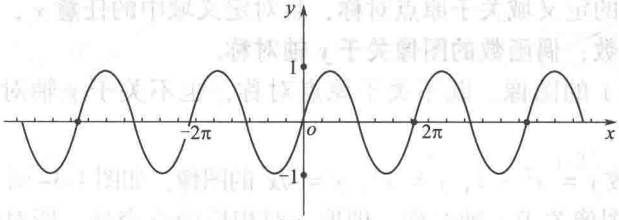


图 1-6

所以，在三角函数中，正弦和余弦的周期是 2π，正切和余切的周期是 π.

注意：$y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $\dfrac{2\pi}{\omega}$，$y=\tan(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $\dfrac{\pi}{\omega}$.

4. 函数的有界性

若对于一个函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**有界函数**；否则，$f(x)$ 在区间 I 上是**无界函数**.

如，因为 $|\sin x|\leqslant 1$，所以正弦函数 $y=\sin x$ 在定义域中是有界函数；又如，$y=x^3$ 的值域是 $\mathbf{R}$，如图 1-4 所示，所以 $y=x^3$ 在定义域中是无界函数.

今后在研究函数时，就从奇偶性、单调性、周期性和有界性四个方面进行研究.

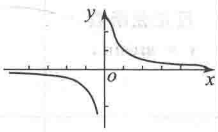
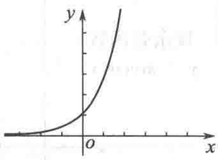
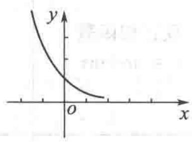
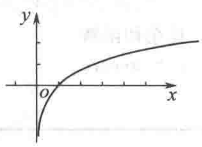
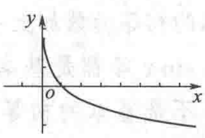
四、初等函数的概念与应用

1. 五种基本的初等函数

我们在高中学习的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为**五种最基本的初等函数**.

五种基本初等函数的定义域、性质和图形，表 1-1 给出。

表 1-1

函数名称	函数类型	定义域	图像	性质
幂函数 $y=x^{\alpha}$ ($\alpha\in\mathbf{R}$ 是常数)	$y=\dfrac{1}{x}$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数
指数函数 $y=a^{x}$ $a>0$ 且 $a\neq 1$	$a>1$	$(-\infty,+\infty)$		增函数
	$0<a<1$	$(-\infty,+\infty)$		减函数
对数函数 $y=\log_a x$ $a>0$ 且 $a\neq 1$	$a>1$	$(0,+\infty)$		增函数
	$0<a<1$	$(0,+\infty)$		减函数