



# 小波分析基础

Fundamental Wavelet Analysis



曹怀信 郭志华 编著



科学出版社

# 小波分析基础

曹怀信 郭志华 编著



科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书旨在系统介绍小波分析的基础理论, 主要内容包括: Banach 空间中的广义级数理论、Hilbert 空间中的框架理论、Banach 空间中的框架理论、窗口 Fourier 变换与小波变换、Hilbert 空间中的多分辨率分析, 是作者长期从事小波分析理论研究的成果之总结. 本书内容深入浅出、层次分明, 理论体系严谨、逻辑推导详尽. 在介绍小波理论基本知识的基础上, 体现该学科的最新研究成果, 书后提供了丰富的参考文献, 对相关领域的研究人员有很好的参考价值.

本书可供具有泛函分析与算子理论基础的研究生及教师作为教材使用, 也可作为工程技术人员及其他对小波分析感兴趣的读者的参考资料.

---

### 图书在版编目(CIP)数据

小波分析基础/曹怀信, 郭志华编著. —北京: 科学出版社, 2016.3  
ISBN 978-7-03-047937-2

I. ①小… II. ①曹… ②郭… III. ①小波分析—理论  
IV. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 061179 号

---

责任编辑: 王胡权 / 责任校对: 邹慧卿  
责任印制: 徐晓晨 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号  
邮政编码: 100717  
<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2016 年 4 月第 一 版 开本: 720×1 000 B5

2016 年 4 月第一次印刷 印张: 12

字数: 230 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前 言

小波分析是 20 世纪 80 年代初发展起来的一个应用数学分支，它是传统 Fourier 分析的改进与发展，在图像压缩、信号分析、数据处理、信噪过滤、边缘检测等方面都有广泛而有效的应用。本书在系统介绍 Banach 空间中的广义级数理论的基础上，应用抽象积分理论和算子理论为工具，重点介绍框架理论、小波变换与多分辨分析理论，以期丰富小波分析的基础理论，并为小波分析的应用研究与进一步的发展奠定基础。

本书的学术思想是以泛函分析与算子理论为工具、以传统小波分析理论为背景，建立抽象小波分析理论，体现小波分析与算子理论的密切关系。内容范围包括：广义级数理论、框架理论、小波变换与多分辨分析理论。写作特点为：内容深入浅出、层次分明，理论体系严谨、逻辑推导详尽，在介绍小波理论的基本知识的基础上，体现该学科的最新研究成果。

本书的读者对象为具有泛函分析与算子理论基础的研究生、教师、工程技术人员及其他对小波分析感兴趣的读者。本书主要介绍小波分析领域的基础理论，内容深入详尽，可作为读者了解该理论的入门读物，也可供相关专业研究生自学使用，提供丰富的参考文献，对相关领域的研究人员也有很好的参考价值。

全书分为 5 章：第 1 章讲述 Banach 空间中的广义级数理论，为后面的章节提供必要的理论依据；第 2 章详尽介绍 Hilbert 空间中的框架理论，包括 Bessel 族、框架、Riesz 基、框架算子与框架的扰动；第 3 章介绍 Banach 空间中的框架理论，包括  $X_d$  Bessel 列、 $X_d$  框架、 $p$  阶 Bessel 列、 $p$  阶框架、 $X_d$ -Bessel 列、 $X_d$ -框架、 $p$ -框架、框架展开及其 Banach 空间上的算子框架与  $(p, Y)$  算子框架；第 4 章包括窗口 Fourier 变换与小波变换，分别介绍窗口 Fourier 变换、窗口函数、短时 Fourier 变换、小波、小波变换与各种反演公式；第 5 章介绍 Hilbert 空间中的多分辨分析，介绍  $L^2(\mathbf{R})$  中的正交小波与多分辨分析，最后给出抽象 Hilbert 空间中的正交小波向量与抽象多分辨分析。

本书作者是学习泛函分析出身的，近年来也关注了小波分析这一新兴学科，因此，在学习与教学中，应用泛函分析和算子论方法对小波分析的数学理论作了一些研究，经过多年的积累，形成了数学专业的一本研究生讲义，本书正是在授课讲义的基础上经过不断修改整理而成。

本书的出版得到了陕西师范大学一流学科建设经费资助。感谢陕西师范大学数学与信息科学学院领导与同仁的大力支持。

由于我们能力和兴趣的局限，本书内容难免有疏漏和不妥之处，诚挚欢迎读者批评指正！

曹怀信 郭志华

2015年8月

## 主要符号表

$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{R}^*$	全体非零实数之集
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{F}$	实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$
$\delta_{i,j}$	Kronecker $\delta$ 函数: $\delta_{i,i} = 1, \delta_{i,j} = 1 (i \neq j)$
$\chi_E$	集合 $E$ 的特征函数: $\chi_E(x) = 1 (x \in E), \chi_E(x) = 0 (x \notin E)$
$X^*$	赋范空间 $X$ 的共轭空间
$\bar{E}$	赋范空间 $X$ 的子集 $E$ 的闭包
$\bar{A}$	集合 $A$ 的基数
$B(X, Y)$	赋范空间 $X$ 到赋范空间 $Y$ 中的全体有界线性算子构成的赋范空间
$B(X)$	Banach 空间 $X$ 上的全体有界线性算子构成的算子代数
$B(H)$	Hilbert 空间 $H$ 上的全体有界线性算子构成的 $C^*$ -代数
$\sigma(T)$	算子 $T \in B(X)$ 的谱
$T^*$	算子 $T \in B(X, Y)$ 的伴随算子
$\ker(T)$	算子 $T \in B(X, Y)$ 的零空间
$\text{ran}(T)$	算子 $T \in B(X, Y)$ 的值域
$L^p(E)$	可测集 $E$ 上所有可测且 $p$ 次可积函数构成的 Banach 空间, $1 \leq p < \infty$
$L^\infty(E)$	可测集 $E$ 上所有可测且本性有界可积函数构成的 Banach 空间
$\ell^p(I)$	数域 $\mathbf{F}$ 中所有 $p$ 次可和数族 $\{c_n\}_{n \in I}$ 构成的 Banach 空间, $1 \leq p < \infty$
$\ell^\infty(I)$	数域 $\mathbf{F}$ 中所有有界数族 $\{c_n\}_{n \in I}$ 构成的 Banach 空间
$C(\Omega)$	紧空间 $\Omega$ 上的所有连续函数构成的 Banach 空间
$C_b(\Omega)$	局部紧空间 $\Omega$ 上的全体有界连续函数构成的 Banach 空间
$C_0(\Omega)$	局部紧空间 $\Omega$ 上的全体在无穷远处消失的连续函数构成的 Banach 空间
$C_c(\Omega)$	局部紧空间 $\Omega$ 上的全体紧支撑的连续函数的赋范空间
$c_0$	收敛于零的全体数列构成的 Banach 空间

# 目 录

前言

主要符号表

绪论	1
0.1 信号分析	1
0.2 时频分析	5
0.2.1 时-频局部化	6
0.2.2 小波变换	8
0.3 框架与 Riesz 基	9
第 1 章 Banach 空间中的广义级数理论	11
1.1 广义级数的收敛性	11
1.2 基本性质	15
1.3 无条件收敛性	19
第 2 章 Hilbert 空间中的框架理论	28
2.1 Hilbert 空间的基	28
2.1.1 向量空间的 Hamel 基	28
2.1.2 Banach 空间的 Schauder 基	31
2.1.3 Hilbert 空间	40
2.1.4 正交分解定理	42
2.1.5 Hilbert 空间的正规正交基	42
2.2 Hilbert 空间中的 Bessel 族	46
2.2.1 Bessel 族的概念	46
2.2.2 Bessel 族的等价刻画	47
2.3 Hilbert 空间中的框架	50
2.3.1 框架的概念	50
2.3.2 框架的对偶	51
2.3.3 框架的刻画	53
2.3.4 框架的 $\omega$ -独立性的等价刻画	57
2.4 Riesz 基	59
2.4.1 概念与基本性质	59

2.4.2	Riesz 基的等价刻画	61
2.5	框架算子	64
2.6	例子	65
2.7	框架的扰动	66
2.8	准框架	76
<b>第 3 章</b>	<b>Banach 空间中的框架理论</b>	<b>82</b>
3.1	Banach 空间中的 $X_d$ 框架	82
3.1.1	$X_d$ 框架的概念	82
3.1.2	$X_d$ 框架的刻画	88
3.1.3	$X_d$ 框架的扰动和存在性	89
3.1.4	$X_d$ 框架的对偶	90
3.1.5	$X_d$ 框架与基	93
3.2	Banach 空间中的框架展开	95
3.2.1	$p$ -框架	95
3.2.2	$(p, q)$ 对偶框架对	98
3.2.3	Banach 空间中的框架展开	100
3.3	Banach 空间上的算子框架	103
3.3.1	算子框架的概念	103
3.3.2	算子框架的性质	105
3.3.3	算子框架的对偶	106
3.3.4	算子框架的独立性与算子 Riesz 基	110
3.4	Banach 空间上的 $(p, Y)$ -算子框架	113
3.4.1	Banach 空间上的 $(p, Y)$ -算子 Bessel 列	113
3.4.2	Banach 空间上的 $(p, Y)$ -算子框架	116
3.4.3	独立 $(p, Y)$ -算子框架	122
<b>第 4 章</b>	<b>窗口 Fourier 变换与小波变换</b>	<b>124</b>
4.1	窗口 Fourier 变换 (WFT)	124
4.2	窗口函数	134
4.3	短时 Fourier 变换 (STFT)	136
4.4	小波变换及其基本性质	137
4.5	小波变换的反演公式	145
4.6	小波时频分析	148
4.7	特殊小波	150
4.7.1	二进小波	150
4.7.2	Riesz 小波	151



---

4.7.3 正交小波与半正交小波 .....	151
<b>第 5 章 Hilbert 空间中的多分辨分析</b> .....	<b>152</b>
5.1 $L^2(\mathbf{R})$ 中的正交小波 .....	152
5.2 $L^2(\mathbf{R})$ 中的多分辨分析 (MRA) .....	155
5.3 抽象 Hilbert 空间中的多分辨分析 (MRA) .....	164
参考文献 .....	173
名词索引 .....	178

# 绪 论

## 0.1 信号分析

设  $f(t)(0 \leq t < N)$  为一连续信号, 如图 0.1 所示.

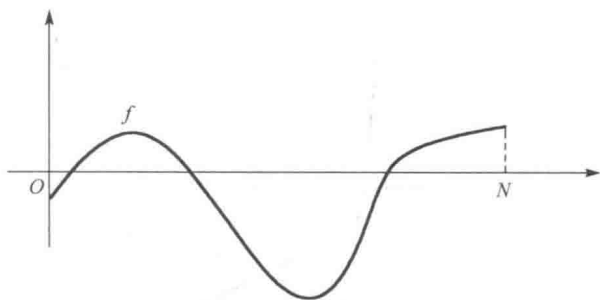


图 0.1 信号  $f(t)$

为了分析这一信号, 首先要采集信号. 应用物理仪器记录信号时, 由于设备性能及分辨率等因素的限制, 只能采集有限个数据. 设观测步长(采样区间的长度)为  $h_0 = 1$ ,  $N$  个采样区间依次为

$$[0, 1), [1, 2), \dots, [N-1, N), \quad (0.1.1)$$

采集的  $N$  个样本值依次为

$$c_0^0, c_1^0, \dots, c_{N-1}^0. \quad (0.1.2)$$

于是, 得到一个阶梯函数:

$$f_0(t) = c_k^0 \quad (k \leq t < k+1), \quad (0.1.3)$$

它可以表示为

$$f_0(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^0 \chi_{[k, k+1)}(t). \quad (0.1.4)$$

进而, 得到原信号的 0 次近似表示:

$$f(t) \approx f_0(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^0 \chi_{[k, k+1)}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^0 \chi_{[0, 1)}(t-k). \quad (0.1.5)$$

由于  $\chi_{[k, k+1)}(t) = \chi_{[0, 1)}(t-k) = \varphi(t-k)$ , 其中

$$\varphi(t) = \chi_{[0,1)}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (0.1.6)$$

称为尺度函数 (Scaling Function)，如图 0.2 所示。

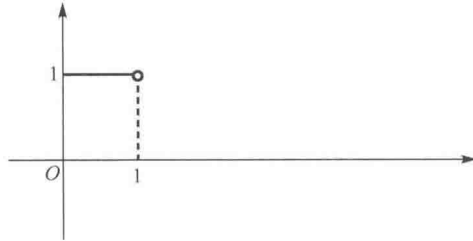


图 0.2 尺度函数  $\varphi(t)$

所以

$$f_0(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^0 \varphi(t-k). \quad (0.1.7)$$

为了提高精度，我们增加采样点，取步长为  $h_1 = 1/2$ ， $2N$  个采样区间为  $[0, 1/2), [1/2, 1), \dots, [N-1, N-1/2), [N-1/2, N)$ ，

$2N$  个样本值依次为

$$c_0^1, c_1^1, \dots, c_{2N-1}^1.$$

这样得到原信号的 1 次近似表示：

$$\begin{aligned} f(t) &\approx f_1(t) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_{2k}^1 \chi_{[k, k+1/2)}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} c_{2k+1}^1 \chi_{[k+1/2, k+1)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_{2k}^1 \chi_{[0,1)}(2t-2k) + \sum_{k=0}^{N-1} c_{2k+1}^1 \chi_{[0,1)}(2t-2k-1) \\ &= \sum_{n=0}^{2N-1} c_n^1 \chi_{[0,1)}(2t-n). \end{aligned}$$

由于  $\chi_{[0,1)}(2t-n) = \varphi(2t-n)$ ，所以

$$f_1(t) = \sum_{n=0}^{2N-1} c_n^1 \varphi(2t-n). \quad (0.1.8)$$

合理的采样应该满足条件：

$$\frac{c_{2k}^1 + c_{2k+1}^1}{2} = c_k^0 \quad (k = 0, 1, \dots, N-1). \quad (0.1.9)$$

设两个近似表示式之间的偏差为

$$\Delta_1(t) = f_1(t) - f_0(t), \quad (0.1.10)$$

则在条件(0.1.9)下, 有

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_{2k}^1 \chi_{[k, k+1/2)}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} c_{2k+1}^1 \chi_{[k+1/2, k+1)}(t) - \sum_{k=0}^{N-1} c_k^0 \chi_{[k, k+1)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (c_{2k}^1 - c_k^0) \chi_{[k, k+1/2)}(t) + \sum_{k=0}^{N-1} (c_{2k+1}^1 - c_k^0) \chi_{[k+1/2, k+1)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{c_{2k}^1 - c_{2k+1}^1}{2} \chi_{[0, 1/2)}(t-k) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{c_{2k+1}^1 - c_{2k}^1}{2} \chi_{[1/2, 1)}(t-k). \end{aligned}$$

记

$$d_k^1 = \frac{c_{2k}^1 - c_{2k+1}^1}{2}, \quad \psi(t) = \chi_{[0, 1/2)}(t) - \chi_{[1/2, 1)}(t), \quad (0.1.11)$$

则

$$\Delta_1(t) = \sum_{k=0}^{N-1} d_k^1 \psi(t-k). \quad (0.1.12)$$

函数

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & t \notin [0, 1) \end{cases} \quad (0.1.13)$$

称为 Haar 小波函数 (Wavelet), 如图 0.3 所示.

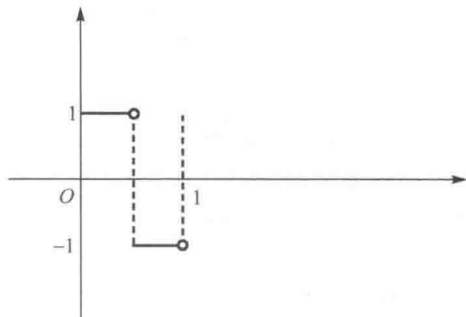


图 0.3 小波函数  $\psi(t)$

由式(0.1.5)与(0.1.10)知

$$f(t) \approx f_1(t) = f_0(t) + \Delta_1(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^0 \varphi(t-k) + \sum_{k=0}^{N-1} d_k^1 \psi(t-k). \quad (0.1.14)$$

类似于式(0.1.7)与(0.1.8), 可得 2 次近似

$$f_2(t) = \sum_{n=0}^{2^2 N-1} c_n^2 \varphi(2^2 t - n) \quad (0.1.15)$$

及 2 次偏差

$$\Delta_2(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} d_k^2 \psi(2t - k), \quad (0.1.16)$$

满足

$$f_2(t) = f_1(t) + \Delta_2(t),$$

$$\frac{c_{2k}^2 + c_{2k+1}^2}{2} = c_k^1, \quad \frac{c_{2k}^2 - c_{2k+1}^2}{2} = d_k^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1). \quad (0.1.17)$$

如此继续下去可得  $m$  次近似与  $m$  次偏差:

$$f_m(t) = \sum_{n=0}^{2^m N-1} c_n^m \varphi(2^m t - n), \quad (0.1.18)$$

$$\Delta_m(t) = \sum_{k=0}^{2^{m-1} N-1} d_k^m \psi(2^{m-1} t - k), \quad (0.1.19)$$

满足

$$f_m(t) = f_{m-1}(t) + \Delta_m(t),$$

$$\frac{c_{2k}^m + c_{2k+1}^m}{2} = c_k^{m-1}, \quad \frac{c_{2k}^m - c_{2k+1}^m}{2} = d_k^m \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2^{m-1} N-1). \quad (0.1.20)$$

因此,

$$f(t) \approx f_m(t) = f_0(t) + \Delta_1(t) + \Delta_2(t) + \dots + \Delta_m(t). \quad (0.1.21)$$

值得指出的是, 尺度函数  $\varphi$  与小波函数  $\psi$  有下面的关系:

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1) \quad (\text{二尺度关系}), \quad (0.1.22)$$

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1) \quad (\text{小波的构造}). \quad (0.1.23)$$

容易想到

$$f(t) \approx \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(t) = f_0(t) + \Delta_1(t) + \Delta_2(t) + \dots + \Delta_m(t) + \dots.$$

如果从  $f_0(t)$  出发, 采取减少采样点的方法, 则当  $N = 2^M$  (即  $f(t)$  支撑在区间  $[0, 2^M)$  上) 时, 得到  $f_0(t)$  的分解

$$f_0(t) = f_{-M}(t) + \Delta_{-M}(t) + \Delta_{-M+1}(t) + \dots + \Delta_{-1}(t) + \Delta_0(t),$$

其中

$$f_{-M}(t) = c_0^{-M} \varphi(2^{-M} t), \quad \Delta_j(t) = \sum_{k=0}^{2^{M-j}-1} d_k^{-j} \psi(2^{-j-1} t - k).$$

于是, 得到信号  $f(t)$  的更精确的近似表示:

$$f(t) \approx c_0^{-M} \varphi(2^{-M}t) + \Delta_{-M}(t) + \Delta_{-M+1}(t) + \cdots + \Delta_{-1}(t) + \Delta_0(t) + \Delta_1(t) + \Delta_2(t) + \cdots + \Delta_m(t).$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 得到

$$f(t) \approx c_0^{-M} \varphi(2^{-M}t) + \Delta_{-M}(t) + \Delta_{-M+1}(t) + \cdots + \Delta_{-1}(t) + \Delta_0(t) + \Delta_1(t) + \Delta_2(t) + \cdots + \Delta_m(t) + \cdots.$$

引入以下记号:

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k), \quad \psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k),$$

则  $\varphi_{j,k}, \psi_{j,k} \in L^2(\mathbf{R}) (\forall j, k \in \mathbf{Z})$  且根据式 (0.1.15) 与 (0.1.16) 可知

$$f_m = \sum_{n=0}^{2^m N-1} c_n^m 2^{-m/2} \varphi_{m,n}, \quad \Delta_m = \sum_{k=0}^{2^{m-1} N-1} d_k^m 2^{-\frac{m-1}{2}} \psi_{m-1,k}.$$

记

$$V_j = \overline{\text{span}\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}}, \quad W_j = \overline{\text{span}\{\psi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}},$$

从而  $f_m \in V_m, \Delta_m \in W_m$ .

可以证明<sup>[57]</sup>序列  $\{\varphi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$  构成 Hilbert 空间  $L^2(\mathbf{R})$  的一个正规正交基且闭子空间列  $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  与  $\{W_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  满足以下条件:

- (a)  $V_j \subset V_{j+1}$ ;
- (b)  $\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j = L^2(\mathbf{R}), \quad \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}$ ;
- (c)  $V_j = D^j V_0, TV_0 = V_0$ , 其中  $(Dh)(t) = 2^{1/2} h(2t), (Th)(t) = h(t-1)$ ;
- (d)  $\{\varphi_{0,n}\}_{n \in \mathbf{Z}}$  为  $V_0$  的正规正交基;
- (e)  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ ;
- (f)  $L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} W_n$ .

一般地, 满足条件 (a)–(d) 的闭子空间列  $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  称为 Hilbert 空间  $L^2(\mathbf{R})$  中的一个多分辨率分析 (Multiresolution Analysis, MRA). 这便导致了多分辨率分析 (MRA) 方法的产生, 它提供了构造小波的统一方法.

## 0.2 时频分析

小波变换 (Wavelet Transformation, WT) 为时频分析提供了一个有力的工具, 它可以将信号 (函数) 分解成不同频率的组成部分 (Component), 然后应用与之相适应的分辨率研究每个组成部分. 率先应用这一技巧的学者如下.

数学家: Calderón, 调和分析中的单位分解 (1964).

物理学家: Aslaksen 与 Klauder, 量子力学中  $ax + b$ -群的相干态 (1968); Paul, 氧原子 Hamiltonian (1985).

工程师: Estebangn 与 Galland, QMF 滤子(1977); Smith 与 Barnwell, 具有恰当重构性质的 QMF(1986); Morlet 提出了小波的概念并将其应用于地震资料的分析(1983).

### 0.2.1 时-频局部化

在应用科学中, 人们关心的是给定信号  $f(t)$  在一定时段上的频率内容(Frequency Content). 这正像乐谱, 它告知演奏者什么时刻应该弹奏什么音符. 信号  $f(t)$  的标准 Fourier 变换(Fourier Transformation, FT)为

$$(Ff)(\omega) \equiv \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (0.2.1)$$

它反映了信号  $f(t)$  的频率内容, 但没有给出高频脉冲的时间局部化(Time-Localization)信息, 因为  $(Ff)(\omega)$  之中只含有频率  $\omega$ , 而与时间  $t$  无关.

下面介绍时间局部化的方法: 首先, 给原信号  $f(t)$  “加窗”使其变为  $f(s)\overline{g(s-t)}$ , 它是从原信号中割下的具有很好局部性的一个“片段”(Slice). 然后, 再取这一片段的 Fourier 变换:

$$(T^{\text{win}} f)(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\overline{g(s-t)}e^{-i\omega s} ds, \quad (0.2.2)$$

其中, 函数  $(T^{\text{win}} f)(\omega, t)$  称为信号  $f(t)$  的窗口 Fourier 变换(Window Fourier Transformation, WFT),  $g(s)$  是一个具有很好局部化性质的函数(如具有紧支撑), 称为窗口函数(Window Function). 与标准 FT 不同, WFT  $(T^{\text{win}} f)(\omega, t)$  中既含有频率因素  $\omega$ , 又含有时间因素  $t$ . 从而可以从中获取任一时段上的频率内容.

若窗口函数  $g(s)$  支撑在有限区间  $[-r, r]$  上, 则对任一固定的时间  $t$ , 函数  $g(s-t)$  就支撑在区间  $[t-r, t+r]$  上. 从而, 由式(0.2.2)知

$$(T^{\text{win}} f)(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t-r}^{t+r} f(s)\overline{g(s-t)}e^{-i\omega s} ds. \quad (0.2.3)$$

固定  $\omega, t$ , 记  $G(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(s-t)e^{i\omega s}$ , 则  $(T^{\text{win}} f)(\omega, t) = \langle f, G \rangle$ . 由于

$$\hat{G}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{g}(\eta - \omega)e^{i(\omega - \eta)t},$$

所以由 Parseval 等式知

$$(T^{\text{win}} f)(\omega, t) = \langle \hat{f}, \hat{G} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\eta)\overline{\hat{G}(\eta)}d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\eta)\overline{\hat{g}(\eta - \omega)}e^{i(\eta - \omega)t} d\eta. \quad (0.2.4)$$

又若窗口函数  $g(s)$  的 Fourier 变换  $\hat{g}(\eta)$  支撑在有限区间  $[-\delta, \delta]$  上, 则对任一固定的频率  $\omega$ , 函数  $\hat{g}(\eta - \omega)$  就支撑在区间  $[\omega - \delta, \omega + \delta]$  上. 因此, 由式(0.2.4)知

$$(T^{\text{win}} f)(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega-\delta}^{\omega+\delta} \hat{f}(\eta) \overline{\hat{g}(\eta-\omega)} e^{i(\eta-\omega)t} d\eta. \quad (0.2.5)$$

由式(0.2.3)与(0.2.5)知

$$\begin{aligned} |(T^{\text{win}} f)(\omega, t)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{t-r}^{t+r} f(s) \overline{g(s-t)} e^{-i\omega s} ds \cdot \overline{\int_{\omega-\delta}^{\omega+\delta} \hat{f}(\eta) \hat{g}(\eta-\omega) e^{i(\eta-\omega)t} d\eta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t-r}^{t+r} \int_{\omega-\delta}^{\omega+\delta} f(s) \overline{\hat{f}(\eta)} \overline{g(s-t)} \hat{g}(\eta-\omega) e^{-i\omega s} e^{i(\omega-\eta)t} ds d\eta. \end{aligned}$$

函数  $|(T^{\text{win}} f)(\omega, t)|^2$  反映了信号  $f$  的“能量”，称为这一信号的“能量密度频谱”，其图形称为信号  $f$  的“频谱图”。它由信号  $f$  及其 Fourier 变换在矩形  $[t-r, t+r] \times [\omega-\delta, \omega+\delta]$  上的信息确定。这一矩形称为“时频窗口”，其位置随时间  $t$  与频率  $\omega$  而变化，但其高度恒为  $2\delta$ ，宽度恒为  $2r$ ，面积恒为  $4r\delta$  且形状永远不变。如图 0.4 所示。

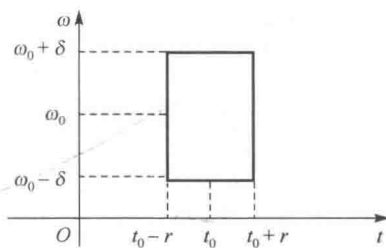


图 0.4 时间-频率窗口

常用的窗口函数有 Gaussian 函数

$$y = g(x) = e^{-x^2}, \quad (0.2.6)$$

如图 0.5 所示。

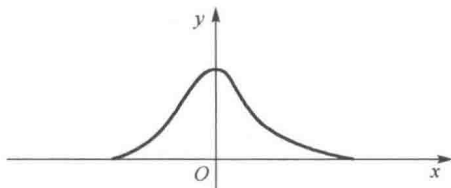


图 0.5 Gaussian 函数

它的 Fourier 变换为

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}. \quad (0.2.7)$$

可见， $g(t)$  与  $\hat{g}(\omega)$  都具有很好的局部性。这时，我们说函数  $g$  在时域与频域上都具有“局部化性质”。



窗口函数的又一例子为“梯形函数”，如图 0.6 所示。

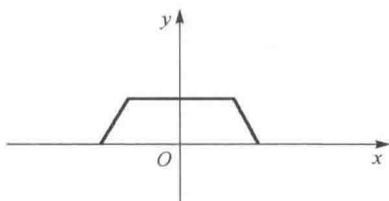


图 0.6 梯形函数

从实用与计算的角度讲，我们通常将时间与频率“离散化”。为此，取定  $t_0, \omega_0 > 0$ ，在式 (0.2.2) 中，令  $t = nt_0, \omega = m\omega_0 (m, n \in \mathbf{Z})$ ，便得到离散窗口 Fourier 变换 (DWFT)：

$$T_{m,n}^{\text{win}} f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \overline{g(s - nt_0)} e^{-im\omega_0 s} ds, \quad (0.2.8)$$

它给出一列离散数据  $\{T_{m,n}^{\text{win}} f\}_{m,n \in \mathbf{Z}}$ 。在一定条件下，由这些数据便可重新构造  $f$ 。

## 0.2.2 小波变换

连续窗口 Fourier 变换 (CWFT) (0.2.2) 与离散窗口 Fourier 变换 (DWFT) (0.2.8) 都是时-频分析的重要工具。然而，CWFT 用于时频分析时的“时-频”窗口的大小与形状都不能随时间与频率的不同而改变，它具有固定的宽度与高度。因此，人们渴望寻找一种在时频两域都具有表征信号的局部特性的能力，时-频窗口的面积不变，而其形状可变，时间窗口与频率窗口都可以改变的时频局部化分析方法。这种新的方法能够使得：在低频部分具有较高的频率分辨率与较低的时间分辨率，而在高频部分具有较低的频率分辨率与较高的时间分辨率。这便使得小波变换 (Wavelet Transformation, WT) 应运而生。

连续小波变换 (CWT) 与离散小波变换 (DWT) 是对连续窗口 Fourier 变换与离散窗口 Fourier 变换的类比，它们很好地克服了后者的不足。其定义分别为

$$(T^{\text{wav}} f)(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (0.2.9)$$

$$T_{m,n}^{\text{wav}} f = a_0^{-m/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi(a_0^{-m} t - nb_0)} dt, \quad (0.2.10)$$

其中  $\psi$  为满足条件

$$0 < C(\psi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad (0.2.11)$$

的任一  $L^2(\mathbf{R})$  中的函数。当  $\psi \in L^1(\mathbf{R})$  时，由于  $\hat{\psi}(\omega)$  在 0 处连续，所以  $\hat{\psi}(0) = 0$ ，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (0.2.12)$$