SHIFANZHUANKESHIYONGJAOCAI

师范专科试用教材

# 数学分析

（下册）

吉林教育出版社

师范专科学校试用教材

# 数学分析

（下　册）

吉林教育出版社

师范专科试用教材 **数学分析（下册）** 师专数学专业教材协编组 编

责任编辑：白国才　　封面设计：王劲涛

出版：吉林教育出版社　787×1092毫米32开本 14印张 2插页 308,000字
1988年4月第1版　1988年4月第1次印刷
发行：吉林省新华书店　印数：1—10,190册　定价：2.75元
印刷：长春市兴文印刷厂　ISBN 7-5383-0391-X/G·391

## 数学专科教材编审委员会名单

# 师专数学教材出版说明

师范专科学校承担着培养大批合格的初中教师的重任。随着九年制义务教育的普及和四化建设的深入发展，师专的地位和作用愈来愈受到社会的重视。但是，就师专数学专业而言，到目前为止，国内还没有公开出版一套完整的、令人满意的专业教材，这给师专教学带来了一定的困难。为了解决这一问题，填补这一空白，在吉林省教育委员会的组织和资助下，由四平师院、吉林师院、长春师院、通化师院、白城师专、齐齐哈尔师院、廊坊师专、内蒙民族师院、昭盟蒙族师专等九所师范院校联合编写了这套教材。本套教材共有十四种，十五册。它们是：《空间解析几何》，《高等代数》，《数学分析》（上、下册），《概率论与数理统计》，《逻辑代数与计算机语言》，《普通物理》，《初等代数研究》，《初等几何研究》，《中学数学教材教法总论》，《高等几何》，《常微分方程》，《复变函数》，《高等数学》（物理专业用），《高等数学》（化学专业用）。

本套教材是根据国家教委制定的二年制师范专科学校的教学计划（征求意见稿）和各门课程的教学大纲并结合九所院校的教学实践编写的。为保证教学质量，邀请了东北师大、吉林大学等校的二十多位教授、专家、学者组成教材编审委员会：对全套教材的编写进行具体指导和严格审查。

本套教材包括了教学计划规定的师专数学专业的全部专业课程（必修课及选修课）的教材以及物理和化学专业的高

等数学教材。编写时充分注意了各门教材内容上的衔接与配合，深度和广度方面的协调一致。并在文字使用、表述方式以及名词术语和符号的使用等方面有统一的要求，力争规范划一。

本套教材从培养目标出发，突出了师专教育的要求和特点。教材选择上避免了“多、深、尖”的弊病，体现了“少、广、新”的原则。力求培养学生具有坚实的理论基础和广阔的视野，以适应“三个面向”的需要。在表述方面，在充分注意科学性和严密性的前提下，力求通俗易懂，深入浅出，详尽透彻，易教易学。

为了加强对学生的能力培养和科学的思维方法的训练，各门教材都配备了较多的例题和习题。它们都经过精心选择，与正文内容密切配合，有些还是正文内容的补充和提高。对于难度较大的习题，作了适当的提示。

本套教材不仅可供师范专科学校使用，还可作为教育学院、职业大学、电视大学以及函授、刊授等相应专业的教材，亦可作为师范院校本科及其它院校有关专业的教学参考书。

编写一套完整的、适应四化建设需要的教材是一项十分艰巨的任务。我们的工作只是一个初步的尝试。缺点和谬误之处在所难免。诚恳希望得到有关专家和广大读者的批评指正。吉林省教育委员会和参加编写工作的九所院校的有关领导以及吉林教育出版社的同志们对于本套教材的编写出版给予了宝贵的支持，谨此表示衷心的感谢。

师专数学专业教材协编组

1986年10月

# 目　录

# 第十二章 数项级数

无穷级数理论是整个数学分析的重要组成部分，是研究函数的重要工具．同时它在数学分析的后继课程如微分方程、复变函数、函数逼近以及其它方面有着广泛的应用．

无穷级数包括数项级数与函数项级数两大类．本章介绍数项级数的基本理论和它的实际应用，为进一步学习函数项级数打下必要的基础．

## §1 数项级数的基本概念与性质

本节将重点给出数项级数收敛与发散的定义；数项级数与数列之间的关系；收敛数项级数的初等性质；数项级数的柯西收敛准则．

### 1.1 数项级数的收敛与发散

**定义 1.1** 给定数列$\{a_n\}$，即

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots. \tag{1.1}$$

将数列(1.1)的项依次用“+”号连接起来，式子

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{1.2}$$

或简写为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，称为**数项级数**，简称为**级数**．$a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots$都称为级数的项，$a_n$称为级数(1.2)的**通项**（第$n$项）．

有限个数相加求和对我们来说当然是熟悉的．但是，从形式上看（1.2）表示的是“无限多个数相加求和”，这个概

念对于我们来说所知甚少，只是在中学学习数列极限时，初步研究过无穷递缩等比数列

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \cdots,\ a_1q^{n-1},\ \cdots \qquad |q|<1$$

的求和问题．当时是用它的前 $n$ 项部分和

$$s_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \qquad (|q|<1)$$

当 $n$ 趋于无穷大时的极限来定义它“所有项”的和 $s$，即

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{a_1}{1-q}.$$

至于一般的所谓“无限多个数相加求和”的问题并没有接触过，不过这种用有限个数相加求和再加之极限过程去认识“无限多个数相加求和”的思想（其实这种想法也是很自然的）却启示着我们去研究级数理论中的级数求和与收敛的问题．

研究数列时有前 $n$ 项部分和的概念，研究级数时也有．

用 $s_n$ 来表示级数（1.2）的前 $n$ 项的和，简称**部分和**，即

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

简记为 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k.$

令 $n=1,\ 2,\ \cdots$，就得到与级数（1.2）相对应的一个部分和数列 $\{s_n\}$，即

$$s_1,\ s_2,\ \cdots s_n,\ \cdots. \qquad (1.3)$$

根据上述思想，我们自然要想到用级数（1.2）的部分和数列（1.3）的极限存在与否，就是用数列（1.3）收敛与发散来定义级数（1.2）的和存在与否，即级数（1.2）的收敛与发散．

**定义 1.2** 如果级数（1.2）的部分和数列（1.3）收敛，设

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \qquad \text{（有限数）},$$

则称级数（1.2）**收敛**，并有和数$s$。记作

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \tag{1.4}$$

简记为 $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。

并称 $r_n = s - s_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 为级数（1.2）的**余和**。

若部分和数列（1.3）发散，就称级数（1.2）发散，此时级数没有和。

值得强调的是定义中指明了收敛级数（1.2）的和$s$是两种运算的结果，其一是用加法求部分和$s_n$，其二是用极限运算求$s_n$的极限。

另外，从定义中不难得到，当级数（1.2）收敛时

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0,$$

即当$n$趋于无穷大时，收敛级数的余和$r_n$是一个无穷小量，这在今后用部分和$s_n$来近似代替收敛级数的和$s$，进行误差估计时是很有用的。原则上讲，只要$n$充分大，用$s_n$近似代替$s$所产生的误差可以是足够的小。

从定义出发，我们已经可以解决一部分级数的求和问题了。

首先以较为简单，然而却很重要的等比级数（也称为几何级数）的求和问题作为例子。

**例 1** 研究等比级数

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \tag{1.4}$$

（$a \neq 0, q$是公比）的敛散性（敛散性是指收敛与发散）.

**解** $s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$,

$$q \cdot s_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n,$$

做差 $s_n - qs_n = a - aq^n$,

于是，当 $q \neq 1$ 时

$$s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

当 $|q| < 1$，则

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{q}{1-q}.$$

由定义 1.1 知级数（1.4）收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$.

若 $|q| > 1$，则

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty.$$

等比级数（1.4）发散.

若 $q = -1$，则 $s_n = \dfrac{a[1-(-1)^n]}{2}$ 当 $n\to\infty$ 时，$s_n$ 不存在极限，从而等比级数（1.4）发散.

当 $q = 1$ 时

$$s_n = na, \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

级数（1.4）发散.

综上所述：等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$，当 $|q| < 1$ 时收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$；当 $|q| \geqslant 1$ 时发散.

这个结论很重要，以后将经常用到.

在中小学里我们遇到过将无限循环小数化成分数的问

题，并且给出了转化规则，其理论根据，在这里给出了解答。因为无限循环小数可以化成公比小于1的等比级数，所以利用等比级数求和公式就可将其化为分数。例如：

$$0.\dot{7}=0.777\cdots$$

可以表示成

$$\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{10^n},$$

它是公比为 $q=\frac{1}{10}$ 的等比级数，于是

$$0.\dot{7}=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{9}.$$

再如：

$$0.2\dot{1}3\dot{7}=\frac{2}{10}+\left(\frac{137}{10^4}+\frac{137}{10^4}\cdot\frac{1}{10^3}+\frac{137}{10^4}\cdot\frac{1}{10^6}+\cdots\right)$$

括号内是公比为 $q=\frac{1}{10^3}$ 的等比级数，于是

$$\begin{aligned}0.2\dot{1}3\dot{7}&=\frac{2}{10}+\frac{\frac{137}{10^4}}{1-\frac{1}{10^3}}\\&=\frac{2}{10}+\frac{137}{10(10^3-1)}\\&=\frac{2137-2}{9990}=\frac{427}{1998}.\end{aligned}$$

为了不偏离本节所论的中心，一般无限循环小数如何化

成分数的规则就不作介绍了，不过使我们感兴趣的是，在这里初步看到了一个有限的数可以表示成无限的形式，体现了有限和无限这对矛盾的对立统一，下一个例子也是这样：

**例 2** 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$+\cdots$的敛散性。

**解** 先将通项 $a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$分成简单部分分式：

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

于是，级数的前 $n$ 项部分和

$$s_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2},$$

级数收敛，其和是$\frac{1}{2}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}.$$