高等院校教材
理工农林专业通用教材

高等数学（第二版）

（上册）

高等数学编写组 编

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

中国人民大学出版社

高等院校教材

理工农林专业通用教材

高等数学（第二版）

（上册）

高等数学编写组　编

$$\int_a^b f(x)\,x1x=f(\xi)(b-a)$$

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/高等数学编写组编．—2版．—北京：中国人民大学出版社，2011.6
高等院校教材．理工农林专业通用教材
ISBN 978-7-300-13902-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①高… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 112541 号

高等院校教材
理工农林专业通用教材
高等数学（第二版）上册
高等数学编写组　编
Gaodeng Shuxue

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　话	010－62511242(总编室)		010－62511398(质管部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京东方圣雅印刷有限公司	版　次	2009 年 8 月第 1 版
开　本	170 mm×228 mm　16 开本		2011 年 6 月第 2 版
印　张	20.25 插页 1	印　次	2011 年 6 月第 1 次印刷
字　数	312 000	定　价	29.80 元

高等院校教材
理工农林专业通用教材

主　编

张义侠

副主编

牛玉玲　陈凡红

编　委

薛　威　张　欣　何　云

丁茂震　郭慧敏

内容简介

本书是依据教育部主持制定的非数学专业《本科数学基础课程教学基本要求》，并针对理、工、农、林等专业数学教学需要而编写的. 教材内容在保证上述基本要求的前提下，兼顾拓宽知识的需要，以适应不同要求和不同层次的教学. 最后两章（续篇）以前的内容，根据取舍，可供计划学时为 140～170 的教学需要选用；包括续篇，则适用于计划学时为 180～210 的专业的数学教学.

全书分上、下册，上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用以及空间解析几何与向量代数，共八章. 高等数学中用到的极坐标和行列式等基本知识是中学阶段没有讲授的内容，特在书后的附录中对其加以介绍. 下册内容包括多元函数微分法及其应用、重积分、无穷级数以及微分方程，共四章及续篇两章. 书中注有⊛的内容，可根据教学计划学时的多少加以取舍. 略去这些内容并不影响教学内容的完整性及严谨性. 作为续篇，傅里叶级数及曲线积分和曲面积分两章，是针对计划学时较多的数学教学或报考研究生部分专业的需要而编写的，可供教学或自学选用.

章后配有深度不同的课后习题. 同时出版与教材配套的《高等数学习题解答》上、下册.

前　言

17 世纪，人们对天体力学等学科的研究过程，催生了微积分学的创立. 自英国的牛顿和德国的莱布尼茨创立独立于古典几何和代数之外的微积分学这一新的数学分支伊始，它就是与力学、物理学以及几何直观紧密相连的. 正因为如此，微积分随即被广泛地运用于各个科学领域中. 但是其后，它在很长时间未能脱胎于几何直观和力学、物理学的背景，其许多内容缺乏严谨的理论和确切的数学描述，因而局限了它自身的发展和更有效地为其他领域所运用. 经过后继数学家的不断探索，直至 19 世纪初，法国数学家柯西，在牛顿-莱布尼茨奠定的微积分学的重要思想方法的基础上，对其中的一些重要概念给予了精确的数学描述，构建了比较完备的理论体系，从此微积分学成为推动包括数学学科自身和自然科学、工程技术以及社会科学在内的一切领域发展的强大动力.

微积分学的发展历史启示我们，学习微积分，在牢固掌握基本概念、基本理论和基本运算方法的同时，既要注重联系实际，了解建立数学概念和方法的实际背景，又要注意掌握其分析和推理的思想方法，培养严谨的数学思维的能力，以便为学习后续的数学课程和相关知识打下坚实的数学基础，并且提高利用数学工具分析和解决实际问题的能力.

我们在传承我国数学分析教材重归纳、演绎、推理的优秀传统的基础上，更加注重分析、综合和实用性，对传统教材的内容和结构加以调整，编写了这本教材.

编写过程中，我们注意教材内容与初等数学及后续数学课程的衔接，譬如，近年的教学实践证明，删去传统的高等数学教材中复习基本初等函数的部分，会在很大程度上影响到教学效果，因此在本书中我们恢复了对基本初等函数的复习和提高的内容. 再如，分段函数的导数是学习中的难点和要点，也是后继课程要用到的知识，在导数运算这一节，我们把分段函数的导数列为其中一段. 广义积分中，变上限的分段函数的积分是后续的概率论中某些随机变量的分布函数的计算形式，但是由于一般高等数学教材中没有这一类型积分的实例，所以在概率论教学的这一环节，学生普遍感到难以理解和掌握，于是，我们在教材中编入了这一类型积分的例题及习题. 又如，重积分是化成单积分计算的，其关键在于确定积分限，而定限要依据积分域（平面域或空间域）的不等式表示，这对初学者往往是个难点，是重积分计算难学的症结所在，在重积分计算这一节中，作为预备知识，我们单列一段讲述这部分内容.

建立数学概念，应由产生概念的现实背景引入，并且应使一些重要概念的形成或定义的过程成为分析、认识、推理的过程，这样，才能使读者理解这一概念的深层含义. 譬如，“微分形式”和微元法是数学分析及其应用的核心内容，所以我们在建立微分及全微分的概念和介绍微元法时，是着重遵循这一思路进行讲述的. 我们本着同样的原则，引出泰勒公式和建立梯度、散度、旋度的概念，而不是以这个数量或向量的计算公式来定义这个量，以便使读者通过这个概念的产生背景和建立过程，理解这一概念的深刻含义，从而不仅会计算，也会用以分析解决实际问题.

由于我们的教材是面向非数学专业的读者，在教材中我们略去了某些并非学习后续课程或报考研究生所需要的内容以及某些证明过程，对部分的极限定义，我们给出了相对确切，但并非完全精确的分析定义（同时为了适应不同层次的教学需要，我们在注有⊛的部分，补充了严格的分析定义，以备取舍）. 但对重要的定理或法则则给予了严格、精确的证明. 对于数学内容的表述，力求通俗易懂，清晰准确，不为不必要的复杂的形式和符号所赘.

在汲取和借鉴国内外传统教材的优点的基础上，结合我们长期教学实践的点滴经验，编写了这本教材. 不足之处，谨望数学同行和读者给予指正，以便再版时加以修正和补充.

编者

目　录

第一章　函数 …………………………………………………… 1

第一节　集合 …………………………………………………… 1

第二节　函数的概念 …………………………………………… 5

第三节　函数的几种特性 ……………………………………… 10

第四节　反函数与复合函数 …………………………………… 13

第五节　基本初等函数 ………………………………………… 16

第六节　初等函数 ……………………………………………… 21

第二章　极限与连续 …………………………………………… 27

第一节　数列的极限 …………………………………………… 27

第二节　函数的极限 …………………………………………… 31

第三节　无穷小与无穷大 ……………………………………… 38

第四节　极限运算法则 ………………………………………… 42

第五节　极限存在的判定准则及两个重要极限 ……………… 45

第六节　无穷小的比较 ………………………………………… 51

第七节　函数的连续性与间断点 ……………………………… 54

第三章　导数与微分 …… 70
　第一节　导数的概念 …… 70
　第二节　导数的运算 …… 79
　第三节　高阶导数 …… 93
　第四节　微分的概念 …… 96
　第五节　微分的运算 …… 100

第四章　微分中值定理及导数的应用 …… 114
　第一节　微分中值定理 …… 114
　第二节　罗必达法则 …… 121
　第三节　函数增减性的判定法 …… 127
　第四节　曲线的凹凸性和拐点 …… 129
　第五节　函数的极值与最大、最小值 …… 132
　第六节　函数作图 …… 140
　第七节　曲率 …… 142

第五章　不定积分 …… 151
　第一节　不定积分的概念与性质 …… 151
　第二节　换元积分法 …… 156
　第三节　分部积分法 …… 164

第六章　定积分 …… 174
　第一节　定积分的概念和性质 …… 174
　第二节　微积分基本定理 …… 182
　第三节　定积分的换元积分法和分部积分法 …… 187
　第四节　广义积分 …… 193

第七章　定积分的应用 …… 208
　第一节　微元法 …… 208
　第二节　定积分的几何应用 …… 210
　第三节　定积分在物理上的应用 …… 219

第八章　空间解析几何与向量代数 …… 227
第一节　向量及其线性运算 …… 227
第二节　空间直角坐标系与向量的投影表达式 …… 231
第三节　向量的数量积、向量积 …… 239
第四节　曲面及其方程 …… 245
第五节　平面及其方程 …… 254
第六节　空间曲线及其方程 …… 257
第七节　空间直线及其方程 …… 261
第八节　平面与直线问题举例 …… 263

附录一　极坐标系简介 …… 273
附录二　行列式简介 …… 276
附录三　积分表 …… 281
附录四　习题答案 …… 290

第一章 函 数

高等数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学. 微积分研究的主要对象是变量及变量之间的依赖关系，它描述的是运动状态. 用运动的观点研究变量的基本方法是极限的方法，所以高等数学是建立在包含运动观点的极限的基础之上的.

高等数学与初等数学、常量与变量往往没有一个截然的界限，比如一个量本来是变量，但在一个微小的空间间隔或时间间隔里把变量近似地看作常量，然后用有关的常量的知识去处理，这是我们常用的数学方法. 以“不变代变”是贯穿在整个数学分析中的一个基本的思想方法.

作为学习高等数学的基础，首先复习一下初等数学中学过的集合及实数的一些基本知识，同时对于基本初等函数还有必要加以概括复习和提高.

第一节 集 合

一、集合的概念

所谓集合（简称集）是指具有某种特定属性的事物的全体. 如，一个班

里的全体学生，一个图书馆里的所有藏书，全体有理数等都分别构成一个集合. 构成集合的事物称为该集合的元素.

有限个元素构成的集合称为有限集；无限多个元素构成的集合称为无限集. 比如，一个班里的学生构成的集合是有限集；有理数的集合是无限集.

通常用大写字母 A，B，C，…表示集合，用小写字母 a，b，c，…表示集合中的元素. 如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$，如果 b 不是集合 A 中的元素，就说 b 不属于 A，记作 $b\notin A$.

表示集合有两种方法，一种方法是列举法，就是把集合中的元素按任一顺序一一列举出来，例如不超过 10 的正偶数构成的集合可表示为

$$A=\{2,4,6,8,10\}.$$

另一种方法是描述法：具有某种特定属性的元素 x 构成的集合可表示为

$$M=\{x\mid x\text{ 具有的特定属性}\}.$$

例如，方程 $x^2-5x+6=0$ 的根构成的集合可表示为

$$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\},$$

全体偶数构成的集合可表示为

$$C=\{x\mid x=2n,n\text{ 为整数}\},$$

通常把全体正整数的集合记作 $\mathbf{N}^+$，即

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\},$$

自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\},$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\},$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in Z,q\in\mathbf{N}^+,\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\},$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或者说 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

若集合 A 与集合 B 互为子集：$A\subset B$，$B\subset A$，亦即 A 与 B 所含元素完全相同，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

若 $A\subset B$，且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集.

在一项研究中，相关的所有事物构成的集合称为全集，可记为 U. 全集是相对的，比如，我们在有理数范围内讨论问题，那么有理数集就是全集；但是若在实数范围内讨论问题，那么有理数集就不是全集.

不包含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$，比如方程 $x^2+1=0$ 的实根集合为空集.

二、集合的运算

设 A、B 是两个集合，由 A 和 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并集（简称并），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

集合 A 与集合 B 所有共同元素构成的集合称为 A 与 B 的交集（简称交），记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

所有属于集合 A，而不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

若集合 A 是全集 U 的子集，则 $U-A$ 称为 A 的余集或补集，记作 $\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

可知　　$A\cup\overline{A}=U$.

集合的运算律

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$，

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),$$

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C),$$

(4) 摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

以上运算律都可根据集合相等的定义加以证明，今只对摩根律的第一个等式给予证明.

$$x\in\overline{A\cup B}\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A \text{ 且 } x\notin B$$
$$\Rightarrow x\in\overline{A}\text{ 且 }x\in\overline{B}\Rightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B},$$

即 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}.$

反之，

$$x\in\overline{A}\cap\overline{B}\Rightarrow x\in\overline{A}\text{ 且 }x\in\overline{B}$$
$$\Rightarrow x\notin A\text{ 且 }x\notin B\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\in\overline{A\cup B},$$

即 $\overline{A}\cap\overline{B}\subset\overline{A\cup B}.$

于是有 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$

为了简化表述过程，我们用“$A\Rightarrow B$”表示由 A 可推出 B，亦即 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件，用“$A\Longleftrightarrow B$”表示 A 与 B 可相互推出，即 A 与 B 互为充要条件，或 A 与 B 等价.

三、实数及其绝对值

我们已经知道，有理数都可化为有限小数或无限循环小数；有理数之外，如$\sqrt{2}$、π 等数可化为无限不循环小数，称为无理数. 有理数和无理数统称为实数.

有理数在实数集中是稠密的，就是说在任意两个有理数之间还有无穷多个有理数. 而实数是连续的.

实数与数轴上的点是一一对应的，即数轴上每一点都表示一个实数；反之，每一个实数都是数轴上某一点的坐标.

实数的绝对值

设 a 为实数，则 a 的绝对值

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}.$$

可知$|a|$等于数轴上点 a 到原点的距离.

根据绝对值的定义，有以下关系式成立：

(1) $\sqrt{a^2}=|a|$

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$

这是因为若 $a\geqslant 0$，$-|a|\leqslant a=|a|$；若 $a<0$，$-|a|=a<|a|$，总之，$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

(3) $|a|\leqslant k\ (k>0)\Longleftrightarrow -k\leqslant a\leqslant k$

这是因为$|a|\leqslant k$ 表示数轴上点 a 到原点的距离不大于 k，即$-k\leqslant a\leqslant k$，反之自然成立.

由绝对值的定义及以上关系式可以推出绝对值的以下性质：

(1) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$

【证明】 $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$

$-|b|\leqslant b\leqslant |b|$

两式相加，得$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|$，于是有$|a+b|\leqslant |a|+|b|$.

(2) $|a-b|\geqslant |a|-|b|$

【证明】 $|a|=|(a-b)+b|\leqslant |a-b|+|b|$，于是有

$|a-b|\geqslant |a|-|b|$

(3) $|ab|=|a||b|$

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$

第二节　函数的概念

一、变量

人们在实际问题中会遇到各种不同的量，如长度、面积、体积、温度、压力、速度、成本、利润，等等，在某一过程中，可能有的量不发生变化，保持一定数值；而另一些量却在变化，可取不同数值. 例如，对密闭容器内

的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定数值；而气体的温度和压力是变化的，显然在这一过程中，正是温度、压力这些变化着的量决定着事物的形成、演变和发展，是最本质、最重要的量，是我们着眼和研究的对象. 在某一过程中保持一定数值的量称为常量，在某一过程中可取不同数值的量称为变量. 变量是数学分析中的第一个基本概念. 但是现实中的所谓常量一般不是绝对的，往往是变量的某种近似，就是说就整个过程或总体而言是个变量，但是为了便于研究，在一个微小的时间间隔或空间间隔里，把这个变量近似地看作常量，如前所述，以常量代替变量，以“不变代变”，这正是贯穿数学分析全部内容的一个基本的思想方法.

“邻域”是后续内容中经常用到的概念.

当 x_0，δ 为实数，且 $\delta>0$ 时，以点 x_0 为中心，半径为 δ 的开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，可记作 $U(x_0,\delta)$.

设 x 为邻域内的动点，

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\},$$

或 $$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\},$$

表示邻域内的动点 x 与定点 x_0 的距离小于 δ（见图 1—1）.

若在邻域内除去点 x_0，则该邻域称为点 x_0 的无心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\},$$

这里 $0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$（见图 1—2）.

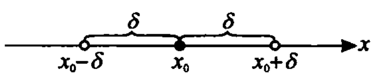

图 1—1

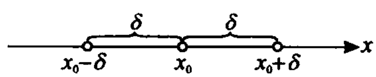

图 1—2

例如，$|x-2|<1$，即邻域 $U(2,1)$，见图 1—3.

$0<|x+3|<2$，即邻域 $\mathring{U}(-3,2)$，见图 1—4.

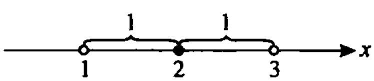

图 1—3

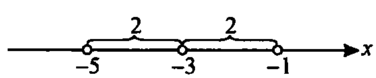

图 1—4