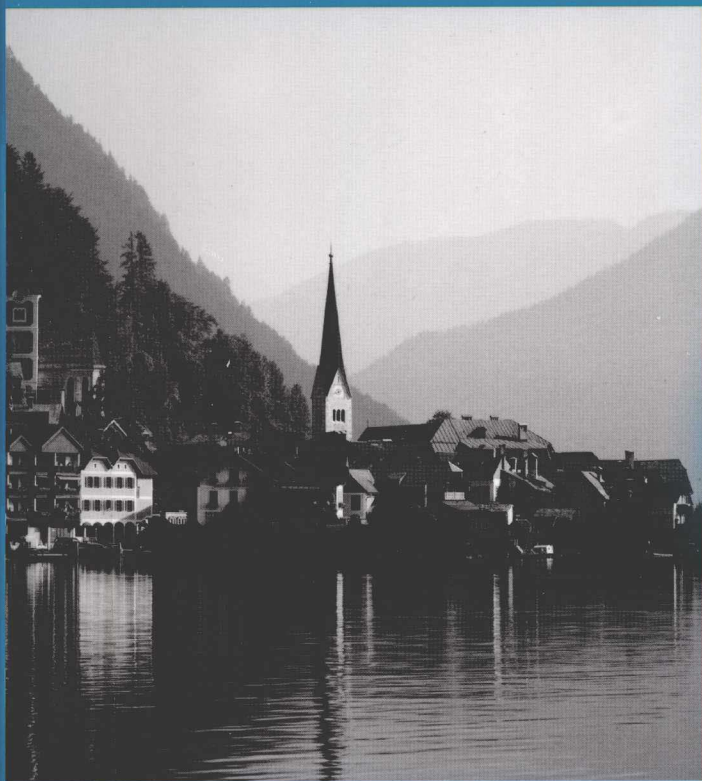


普通高等教育基础课程规划教材

LINEAR
ALGEBRA | 线性代数

王坤 周岩 主编



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



线性代数

主 编 王 坤 周 岩
副主编 樊剑武 赵冬梅
主 审 徐玉民

机械工业出版社

本书介绍了矩阵、行列式、向量的线性相关性、线性方程组、矩阵的对角化及二次型方面的知识。本书特点是科学性与通俗性相结合，斜述简洁，由浅入深，循序渐进；例题精选，习题适量，书末给出全部习题答案。

本书可作为高等院校的理工、经营、医药和农林等非数学类专业的教材或教学参考书，对报考硕士研究生的学生，也具有较高参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/王坤，周岩主编. —北京：机械工业出版社，2012.3
普通高等教育基础课程规划教材
ISBN 978 - 7 - 111 - 37036 - 9

I. ①线… II. ①王…②周… III. ①线性代数 - 高等学校 - 教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 001530 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫

版式设计：常天培 责任校对：李锦莉

封面设计：张 静 责任印刷：杨 曦

北京京丰印刷厂印刷

2012 年 3 月第 1 版·第 1 次印刷

169mm × 239mm · 9.5 印张 · 181 千字

标准书号：ISBN 978 - 7 - 111 - 37036 - 9

定价：19.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服 务 中 心：(010) 88361066

门户网：<http://www.cmpbook.com>

销 售 一 部：(010) 68326294

教材网：<http://www.cmpedu.com>

销 售 二 部：(010) 88379649

读者购书热线：(010) 88379203 封面无防伪标均为盗版

前 言

近十几年来,中国高等教育得到了快速发展.一方面,本科教育已经形成了本科一、二、三批多层次办学格局;另一方面,教学内容越来越多,课时相对偏少.在这种形势下,如继续沿袭统一要求的教材与教法,将不能很好地满足学生的学习需求,会出现部分学生“食而不化”的现象.

基于以上的认识,近年来,我们在线性代数课程教学中,采用了适应性教学方式.力图为不同层次的学生提供适应其发展需求的教学内容,因材施教,力争在有限的时间内使学生更好地学习数学知识,掌握数学思想,提高数学素养,让学生在过程中感受成功,享受学习的快乐.

本教材是在总结我们近年“适应性教学方式”经验的基础上编写而成的,以满足不同专业、不同层次的学生对线性代数的不同要求.在编写本书时,我们遵循从具体到抽象、从特殊到一般以及“尊重科学性,突出实用性”的原则,在保留线性代数基本内容的前提下,以矩阵为主线阐述知识,略去了一些理论推导,力求做到通俗易懂.

在第一章中,为了叙述简练,直接给出了矩阵的概念,而重点是讨论矩阵的运算、矩阵的初等变换及其应用;第二章采用了比较简便的递归法来定义行列式,把重点放在行列式的计算和应用上;第三章以具体例子引出向量线性相关的概念,深入浅出地分析了向量组的极大无关组、向量组的秩和矩阵的秩等难点,并讨论了线性方程组解的结构及求解;第四章介绍矩阵的特征值和特征向量、矩阵的对角化方法、实二次型以及化二次型为标准形的方法,并给出了正定二次型的概念及其判别法.书中还配备了丰富的例题与习题,使学生通过学习和练习,能够较好地掌握线性代数的基本概念和方法.本教材课内教学需要32~40学时.

另外,为了帮助学生巩固其所学的基本概念、基本方法和提高其分析问题、解决问题的能力,在每一章中编写了“解题方法导引”一节,本节着重于概念的运用和方法的归纳,并配有适量的例题.本节内容不但可供任课教师上习题课选用或学生自学用,也可作为报考研究生的学生的复习材料.附录列出了线性代数知识在实际问题中的应用,籍以帮助学生提高应用数学知识解决实际问题的能力.

本书由王坤、周岩主编,樊剑武、赵冬梅任副主编,参加编写的人员还有:肖晓丹、张波、李秀菊.

徐玉民教授对本书作了仔细的审校,提出了一些具体的修改意见,为本书增

IV 线性代数

色不少，对此我们表示由衷的感谢。

鉴于编者水平有限，书中难免会有不足及欠妥之处，敬请读者和使用教师批评指正。

编者

2012年1月

目 录

前言

第一章 矩阵	1
第一节 矩阵及其运算	1
第二节 逆矩阵	6
第三节 矩阵的初等变换	7
第四节 分块矩阵	12
第五节 解题方法导引	16
习题	23
第二章 方阵的行列式	27
第一节 行列式及其性质	27
第二节 n 阶行列式的计算	32
第三节 行列式的应用	34
第四节 解题方法导引	38
习题	44
第三章 n 维向量与线性方程组	49
第一节 矩阵的秩	49
第二节 向量的线性相关性	51
第三节 向量组的极大无关组和秩	55
第四节 线性方程组有解判别定理	60
第五节 线性方程组解的结构	64
第六节 解题方法导引	72
习题	83
第四章 矩阵的对角化与二次型	90
第一节 特征值和特征向量	90
第二节 相似矩阵和矩阵的对角化	94
第三节 实对称矩阵的对角化	98
第四节 二次型及其标准形	103
第五节 正定二次型	109

VI 线性代数

* 第六节 解题方法导引	111
习题	117
附录 应用问题选讲	122
习题参考答案	133
参考文献	144

第一章 矩 阵

矩阵是线性代数的主要研究对象之一. 它在线性代数与数学的许多分支中都有重要的应用, 许多实际问题可以用矩阵表达并结合有关理论得到解决. 在这一章里, 我们主要讨论: 矩阵的运算, 矩阵的初等变换和逆矩阵, 以及分块矩阵.

第一节 矩阵及其运算

一、矩阵的概念

定义 1 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) 排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵. 其中, a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素. 元素是实数的矩阵称为实矩阵, 元素为复数的矩阵称为复矩阵. 如不特别声明, 本书中所讨论的矩阵均指实矩阵. $m \times n$ 矩阵 A 可简记为 $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

$n \times n$ 矩阵称为 n 阶方阵或 n 阶矩阵. n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的左上角至右下角元素的连线称为主对角线, 左下角至右上角元素的连线称为副对角线. 1 阶方阵是一个数, 括号可略去.

$1 \times n$ 矩阵称为行矩阵或行向量, $m \times 1$ 矩阵称为列矩阵或列向量. 行向量和列向量统称向量. 向量的元素称为分量, 由 n 个分量组成的向量称为 n 维向量.

通常用黑体大写字母 A, B, C, \dots 表示矩阵, 用黑体小写字母 a, b, c, \dots 或黑体小写希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表示向量. 矩阵与向量有密切联系, 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 可以看成由 m 个 n 维行向量

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

组成,也可以看成由 n 个 m 维列向量

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

组成.

元素全是零的矩阵,称为**零矩阵**,记作 O . 如果要指明其行数与列数,则记为 $O_{m \times n}$.

行数相同、列数也相同的两个矩阵,称为**同型矩阵**. 如果两个同型矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 的对应元素分别相等,即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$$

则称这两个矩阵相等,记为 $A = B$.

二、矩阵的线性运算

定义 2 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 为两个同型矩阵. 将它们的对应元素分别相加,得到一个新的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 与矩阵 B 的和,记为 $A + B$.

例如: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

定义 3 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, λ 为一个数,则矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为数 λ 与矩阵 A 的**数乘矩阵**,记为 λA .

若 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 则称 $(-a_{ij})_{m \times n}$ 为 A 的**负矩阵**,记为 $-A$,显然, $-A = (-1)A$.

由此可定义矩阵的**减法**: $A - B = A + (-B)$.

矩阵的加法和数与矩阵的乘法称为矩阵的**线性运算**,不难验证矩阵的线性运算满足下列运算规律:

(1) $A + B = B + A$

$$(2) (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$(3) A+O=A$$

$$(4) A+(-A)=O$$

$$(5) 1A=A$$

$$(6) k(A+B)=kA+kB$$

$$(7) (k+l)A=kA+lA$$

$$(8) k(lA)=(kl)A$$

以上 A, B, C 都是 $m \times n$ 矩阵, k, l 是数.

三、矩阵的乘法

定义 4 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times s}$, $B=(b_{ij})_{s \times n}$, 则称矩阵 $C=(c_{ij})_{m \times n}$ 为矩阵 A 与 B 的乘积, 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$$

记为 $C=AB$.

由上述定义可知, 矩阵 A 与 B 的乘积 AB 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 等于 A 的第 i 行各元素与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和(如下).

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

注意, 只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时, 两个矩阵才能相乘.

例 1 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

求 AB .

解

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

例2 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求 AB 和 BA .

解

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由例2可知,一般地, $AB \neq BA$, 即矩阵的乘法不满足变换律; 但矩阵的乘法仍满足下列运算规律:

(1) $(AB)C = A(BC)$

(2) $A(B+C) = AB+AC$

$(B+C)A = BA+CA$

(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

有了矩阵的乘法, 就可以定义 n 阶方阵的幂. 设 A 是 n 阶方阵, k 是正整数, 定义

$$A^1 = A, A^2 = A^1 A^1, \dots, A^{k+1} = A^k A^1$$

方阵的幂满足下列运算规律:

(1) $A^k A^l = A^{k+l}$

(2) $(A^k)^l = A^{kl}$

注意 由于矩阵的乘法不满足交换律, 所以在一般情况下(设 A, B 为 n 阶方阵), $(AB)^k \neq A^k B^k$, 但如下规律成立.

(3) 设 A, B 是 n 阶方阵, 且 $AB = BA$, 则

$$(AB)^k = A^k B^k$$

例3 求证

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

证 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 等式显然成立. 设 $n=k$ 时等式成立, 即设

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

当 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是等式得证.

四、矩阵的转置

定义 5 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times n$ 矩阵, 把 A 的行列互换而得到的 $n \times m$ 矩阵, 称为 A 的转置矩阵, 记为 A^T (或 A'), 即

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

转置矩阵满足下列运算规律(假设运算都是可行的, λ 是数):

- (1) $(A^T)^T = A$
- (2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
- (3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- (4) $(AB)^T = B^T A^T$

例 4 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $(AB)^T$.

解法 1

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -3 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

故

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 8 & 8 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

解法 2

$$(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 8 & 8 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$$

如果 n 阶方阵 A 满足 $A^T = A$, 即 $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 则称 A 为对称矩阵, 对称矩阵的特点是: 它的元素以主对角线为对称轴对应元素相等.

例 5 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 证明: AB 是对称矩阵的充要条件是 $AB = BA$.

证 必要性: 设 AB 是对称矩阵, 即 $(AB)^T = AB$. 又 $(AB)^T = B^T A^T = BA$, 所以 $AB = BA$.

充分性: 设 $AB = BA$. 因 $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$, 所以 AB 是对称矩阵.

五、对角阵和单位阵

定义 6 称方阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

为 n 阶对角阵, 记为 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. 特别, 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$ 时, 称为 n 阶单位矩阵, 简称为 n 阶单位阵, 记为 E_n 或简记为 E , 即

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

对任一方阵 A , 恒有 $EA = AE = A$, 这是单位阵的重要性质, 它表明, 单位阵在方阵中的地位类似于数 1 在数乘运算中的地位.

第二节 逆矩阵

在第一节中, 我们介绍了矩阵的加法、减法、乘法, 自然地, 我们会想到矩阵的乘法是否也和数的乘法一样有逆运算. 这就是本节要讨论的问题.

定义 设 A 是一个 n 阶方阵, 如果存在 n 阶方阵 B , 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 是 A 的一个逆矩阵, 并称 A 为可逆矩阵.

由定义可知, 如果方阵 A 可逆, 则其逆矩阵是唯一的, 事实上, 设 B, C 都是 A 的逆矩阵, 即

$$AB = BA = E, AC = CA = E$$

则

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$

所以 A 的逆矩阵是唯一的.

因逆矩阵是唯一的, 故将 A 的逆矩阵记为 A^{-1}

可逆矩阵的性质:

$$(1) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(2) \text{ 如果 } A \text{ 可逆, 那么 } A^T \text{ 也可逆, 且 } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(3) \text{ 若 } A, B \text{ 为 } n \text{ 阶可逆矩阵, 则 } AB \text{ 也可逆, 且 } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

下面证明性质(3), 其余性质的证明请读者完成.

证 因 A^{-1}, B^{-1} 存在, 又

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

可知 $B^{-1}A^{-1}$ 是 AB 的逆矩阵.

更进一步, 如果 A_1, A_2, \dots, A_s 都是同阶可逆矩阵, 那么 $A_1A_2 \cdots A_s$ 也是可逆矩阵, 且

$$(A_1A_2 \cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

例 1 证明零矩阵不可逆.

证 这是因为对任何矩阵 B , $OB = BO = O \neq E$. (O, B 为同阶方阵)

例 2 若方阵 A 满足等式 $A^2 - A + E = O$, 问 A 是否可逆? 若 A 可逆, 求出 A^{-1} .

解 由 $A^2 - A + E = O$ 可得

$$A - A^2 = E$$

再变形得

$$A(E - A) = (E - A)A = E$$

由逆矩阵的定义可知 A 可逆, 且

$$A^{-1} = E - A$$

第三节 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是矩阵的一种最基本的运算, 它有着广泛的应用, 矩阵的初等变换不只是可用语言表述, 而且可用矩阵的乘法运算来表示, 本节主要介绍矩阵的初等变换的概念及初等变换在求逆矩阵中的应用.

定义 1 矩阵的行(列)初等变换是指下列三种变换:

(1) 互换矩阵中 i, j 两行(列)的位置, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$);

(2) 用非零常数 k 乘矩阵的第 i 行(列), 记为 kr_i (kc_i);

(3) 把矩阵第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)上去, 记为 $r_j + kr_i$ ($c_j + kc_i$)

矩阵的初等行变换和初等列变换, 统称为矩阵的初等变换.

定义 2 由单位阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

对应于三种初等行、列变换, 有三种类型的初等矩阵.

定理 1 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 对 A 施行一次初等行变换的结果, 等于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵; 对 A 施行一次初等列变换的结果, 等于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

初等变换对应初等矩阵, 由以上结论, 我们很容易验证

$$\begin{aligned} E_i(k)E_i\left(\frac{1}{k}\right) &= E_i\left(\frac{1}{k}\right)E_i(k) = E \\ E_{ij}(k)E_{ij}(-k) &= E_{ij}(-k)E_{ij}(k) = E \\ E_{ij}E_{ij} &= E \end{aligned}$$

所以, 初等矩阵都是可逆矩阵, 其逆矩阵也为初等矩阵, 且

$$E_i^{-1}(k) = E_i\left(\frac{1}{k}\right), E_{ij}^{-1}(k) = E_{ij}(-k), E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

下面介绍用初等变换求逆矩阵的方法.

定理 2 任意一个 $m \times n$ 矩阵 A , 必可经有限次初等变换化为如下形式的矩阵 B (称 B 为矩阵 A 的标准形)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

亦即存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 与 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_l 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_l = B$$

证 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$

若 $A = O$, 则 A 是 B 的形式.

以下不妨设 $A \neq O$, 经过初等变换, A 一定可以变成一个左上角元素不为零的矩阵.

当 $a_{11} \neq 0$ 时, 将第一行的 $(-a_{11}^{-1}a_{1i})$ 倍加到第 i 行上去 ($i=2, 3, \dots, m$), 将第一列的 $(-a_{11}^{-1}a_{1j})$ 倍加到第 j 列上去 ($j=2, 3, \dots, n$), 并把第一行乘以 a_{11}^{-1} , A 就变成如下形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{记作}} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}$$

对 A_1 , 重复以上的讨论, 直至把 A 化为 B 的形式, 便可得定理的结论.

定理 3 设 A 是 n 阶方阵, 则 A 可逆的充要条件是 A 可表示为有限个初等矩

阵的乘积.

证 充分性是显然的, 下证必要性.

由定理 2, 存在初等阵 P_1, P_2, \dots, P_s 及 Q_1, Q_2, \dots, Q_l 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_l = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix} = B$$

因 A 可逆, 故 B 也可逆, 从而 B 必定是单位阵 E , 否则 B 至少有一行全为零, 而成为不可逆矩阵, 于是有

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_l = E$$

即

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_l^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1} \quad (1.1)$$

由于 $P_i^{-1}, Q_j^{-1} (i=1, 2, \dots, s; j=1, 2, \dots, l)$ 是初等矩阵, 故定理得证.

由定理 2, 还可以得到一种求逆矩阵的方法.

当 A 可逆时, 将式(1.1)改写为

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_l P_s \cdots P_2 P_1 A = E \quad (1.2)$$

及

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_l P_s \cdots P_2 P_1 E = A^{-1} \quad (1.3)$$

式(1.2)与式(1.3)表明, 如果对可逆矩阵 A 和同阶单位阵 E 作同样的初等行变换, 那么当 A 变为单位阵时, E 就变为 A^{-1} , 即

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1})$$

例 2 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵 A^{-1} .

解

$$\begin{aligned} (A \mid E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{r_3 - r_1 \\ r_2 - 2r_1}]{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + 3r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$