数学竞赛

MATHEMATICS OLYMPIAD

17

ISBN 7—5355—1575—4/G·1570
湘教（92）27期　　定　价：1.85元
（湘）新登字005号

数学竞赛

湖南教育出版社 **17**

数　学　竞　赛（17）

本社编

责任编辑：欧阳维诚

湖南教育出版社出版发行（东风路附1号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷三厂印刷

850×1168毫米　32开　印张：4.125　字数：100000

1993年3月第1版　1993年3月第1次印刷

ISBN7－5355－1575－4/G·1570

定价：1.85元

本书若有印刷、装订错误，可向承印厂調换

目　　录

1992年全国高中数学联赛试题

湘　普

1992 年全国高中数学联合竞赛于 10 月 11 日在全国各地举行．竞赛分第一试和第二试两场进行．下面是竞赛试题及其参考答案．

第一试试题

一、选择题（本题满分30分，每小题5分）

本题共有 6 个小题，每小题给出了(A)、(B)、(C)、(D)4 个结论，其中只有一个是正确的．请把正确结论的代表字母写在题后的圆括号内，每小题选对得 5 分；不选、选错、或选出的代表字母超过一个，一律得零分．

1．对于每个自然数 n，抛物线 $y=(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1$ 与 x 轴交于 A_n，B_n 两点，以 $|A_nB_n|$ 表示该两点的距离，则 $|A_1B_1|+|A_2B_2|+\cdots+|A_{1992}B_{1992}|$ 的值是：

(A) $\frac{1991}{1992}$，(B) $\frac{1992}{1993}$，

(C) $\frac{1991}{1993}$，(D) $\frac{1993}{1992}$．

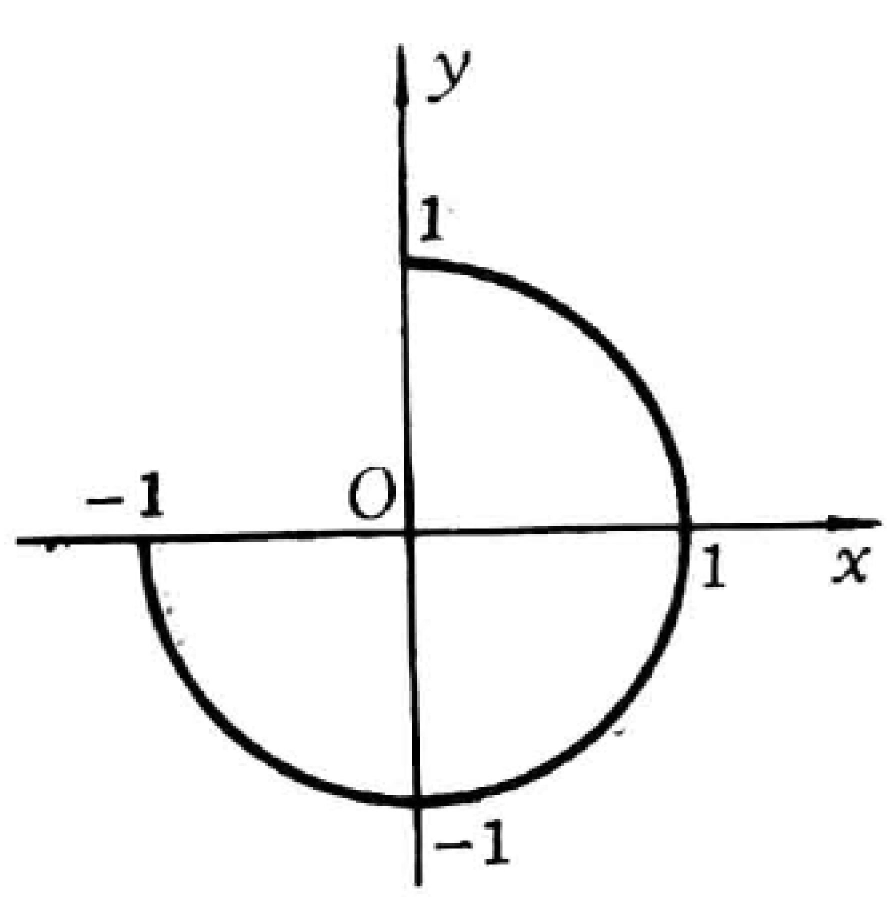

图 1

2．已知如图 1 的曲线是以原点为圆心，1 为半径的圆的一部

分，则这一曲线的方程是

(A) $(x+\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$

(B) $(x-\sqrt{1-y^2})(y-\sqrt{1-x^2})=0$

(C) $(x+\sqrt{1-y^2})(y-\sqrt{1-x^2})=0$

(D) $(x-\sqrt{1-y^2})(y+\sqrt{1-x^2})=0$

3. 设四面体四个面的面积分别为 S_1，S_2，S_3，S_4，它们的最大值为 S. 记 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{4}S_i/S$，则 λ 一定满足

(A) $2<\lambda\leqslant 4$，　　(B) $3<\lambda<4$，

(C) $2.5<\lambda\leqslant 4.5$，　　(D) $3.5<\lambda<5.5$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别记为 a，b，c ($b\neq 1$)，且 C/A，$\sin B/\sin A$ 都是方程 $\log_{\sqrt{b}}x=\log_b(4x-1)$ 的根，则 $\triangle ABC$

(A) 是等腰三角形，但不是直角三角形；

(B) 是直角三角形，但不是等腰三角形；

(C) 是等腰直角三角形；

(D) 不是等腰三角形，也不是直角三角形.

5. 设复数 Z_1，Z_2 在复平面上的对应点分别为 A，B，且 $|Z_1|=4$，$4Z_1^2-2Z_1Z_2+Z_2^2=0$，O 为坐标原点，则 $\triangle OAB$ 的面积为

(A) $8\sqrt{3}$；　(B) $4\sqrt{3}$；　(C) $6\sqrt{3}$；　(D) $12\sqrt{3}$.

6. 设 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的函数，且满足下列关系：

$f(10+x)=f(10-x)$，　$f(20-x)=-f(20+x)$.

则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数又是周期函数；(B) 偶函数但不是周期函数；

(C) 奇函数又是周期函数；(D) 奇函数但不是周期函数.

二、填空题（本题满分30分，每小题5分）

各小题只要求直接填写结果.

1. 设 x，y，z 是实数，$3x$，$4y$，$5z$ 成等比数列，且 $1/x$，$1/y$，$1/z$ 成等差数列，则 $x/z+z/x$ 的值是____.

2. 在区间〔0，π〕中，三角方程 $\cos 7x=\cos 5x$ 的解的个数是____.

3. 从正方体的棱和各个面上的对角线中选出 k 条，使得其中任意两条线段所在的直线都是异面直线，则 k 的最大值是____.

4. 设 z_1，z_2 都是复数，且 $|z_1|=3$，$|z_2|=5$，$|z_1+z_2|=7$，则 $\arg(z_2/z_1)^3$ 的值是____.

5. 设数列 a_1，a_2，…，a_n… 满足 $a_1=a_2=1$，$a_3=2$，且对任何自然数 n，都有 a_n，a_{n+1}，$a_{n+2}\neq 1$，又 $a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$ 的值是______.

6. 函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值是______.

三、（本题满分20分）

求证：$16<\sum\limits_{k=1}^{80} 1/\sqrt{k}<17$.

四、（本题满分20分）

设 l，m 是两条异面直线，在 l 上有 A，B，C 三个点，且 $AB=BC$，过 A，B，C 分别作 m 的垂线 AD，BE，CF，垂足依次为 D，E，F. 已知 $AD=\sqrt{15}$，$BE=7/2$，$CF=\sqrt{10}$，求 l 与 m 的距离.

五、（本题满分20分）

设 n 为自然数，$f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}-x^{-n-1}}{x-x^{-1}}$，（$x\neq 0$，

± 1)，令 $y=x+\dfrac{1}{x}$，

1. 求证：$f_{n+1}(x)=yf_n(x)-f_{n-1}(x)$，$n>1$.

2. 用数学归纳法证明

$$f_n(x)=\begin{cases} y^n-C_{n-1}^1 y^{n-2}+\cdots+(-1)^i C_{n-i}^i y^{n-2i}+\cdots+(-1)^{n/2} \\ \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n/2,\ n\text{为偶数}) \\ y^n-C_{n-1}^1 y^{n-2}+\cdots+(-1)^i C_{n-i}^i y^{n-2i}+\cdots \\ \quad +(-1)^{(n-1)/2} C_{(n+1)/2}^{(n-1)/2} y. \\ \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ (n-1)/2,\ n\text{为奇数}) \end{cases}$$

第二试试题

一、(本题满分35分)

设 $A_1A_2A_3A_4$ 为圆 O 的内接四边形，H_1，H_2，H_3，H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心．求证：H_1，H_2，H_3，H_4 四点在同一个圆上，并定出该圆的圆心位置．

二、(本题满分35分)

设集合 $S_n=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，若 X 是 S_n 的子集，把 X 中的所有数的和称为 X 的“容量”（规定空集的容量为0）．若 X 的容量为奇（偶）数，则称 X 为 S_n 的奇（偶）子集．

1. 求证：S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

2. 求证：当 $n\geqslant 3$ 时，S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等．

3. 当 $n\geqslant 3$ 时，求 S_n 的所有奇子集的容量之和．

三、(本题满分35分)

在平面直角坐标系中，横坐标和纵坐标都是整数的点称为格点．任取6个格点 $P_i(x_i,\ y_i)$，($i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$) 满足：

(1) $|x_i| \leqslant 2$, $|y_i| \leqslant 2$, ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$)

(2) 任何三点不在同一条直线上.

试证：在以 P_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) 为顶点的所有三角形中，必有一个三角形，它的面积不大于 2.

第一试参考解答

一、

1	2	3	4	5	6
(B)	(D)	(A)	(B)	(A)	(C)

二、

1	2	3	4	5	6
34/15	7	4	π	200	10

三、由 $\sqrt{k-1} < \sqrt{k} < \sqrt{k+1}$，得

$$\sqrt{k} + \sqrt{k-1} < 2\sqrt{k} < \sqrt{k} + \sqrt{k+1}, \quad k \in N$$

故 $$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$$

即得

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < 1/\sqrt{k} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

从而

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{m}) < \sum_{k=m}^{n} 1/\sqrt{k} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{m-1})$$

取 $n=80$，$m=1$，得

$$16 < \sum_{k=1}^{80} 1/\sqrt{k}$$

取 $n=80$，$m=2$，得 $1 + \sum_{k=2}^{80} 1/\sqrt{k} < 2(\sqrt{80} - 1) + 1 < 2\sqrt{81} - 1 = 17$. 所以

$$16 < \sum_{k=1}^{80} 1/\sqrt{k} < 17.$$

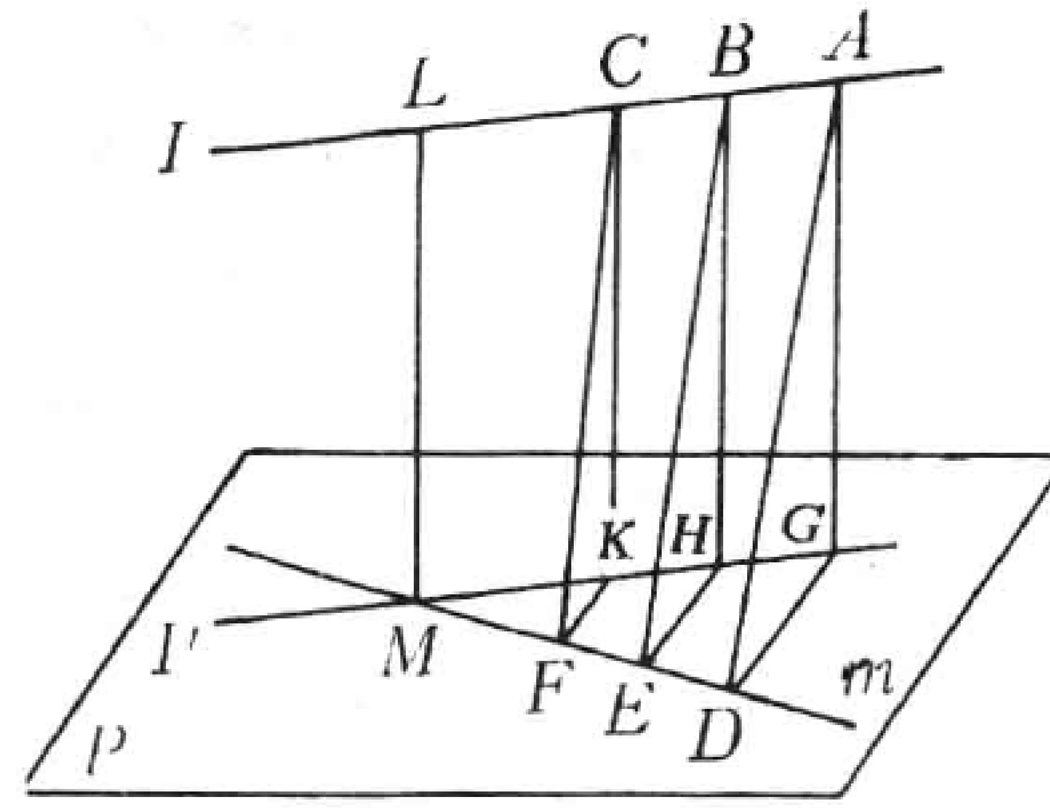

图 2

四、设 LM 为直线 l 与 m 的公垂线，$L \in l$，$M \in m$.

过 m 作平面 P 平行于直线 l，过 A、B、C 分别作平面 P 的垂线 AG，BH，CK. 垂足分别为 G、H、K，则点 G、H、K 落在与 l 平行的直线 l' 上，连 GD，HE，KF.

因 $AB = BC$，$AG \parallel BH \parallel CK$，

故 $GH = HK$.

又因为 $AD \perp m$，$BE \perp m$，$CF \perp m$. 由三垂线定理得

$GD \perp m$，$HE \perp m$，$KF \perp m$

所以 $GD \parallel HE \parallel KF$，且 E，H 分别为 FD，KG 的中点，故 l 与 m 的距离为 x，则

$$AG = BH = CK = LM = x$$

因为 $GD = \sqrt{AD^2 - AG^2}$，$HE = \sqrt{BE^2 - BH^2}$，

$KF = \sqrt{CF^2 - CK^2}$，又 $AD = \sqrt{15}$，$BE = 7/2$，$CF = \sqrt{10}$. 当点 A，B，C 在点 L 的同一侧时，有

$$2HE = KF + GD$$

于是 $2\sqrt{49/4 - x^2} = \sqrt{10 - x^2} + \sqrt{15 - x^2}$

解此方程得 $x = \pm\sqrt{6}$，舍去负根，求得直线 l 与 m 的距离为 $\sqrt{6}$.

注：当 A，B，C 不全在 L 的同一侧时，有

$$2\sqrt{49/4 - x^2} = \sqrt{15 - x^2} - \sqrt{10 - x^2}$$

此方程无解，故 A，B，C 必在点 L 的同侧.

五、1. 由 $yf_n(x) - f_{n-1}(x)$

$$=\frac{(x+1/x)(x^{n+1}-x^{-n-1})-(x^n-x^{-n})}{x-x^{-1}}$$

$$=\frac{x^{n+2}+x^n-x^{-n}-x^{-n-2}+x^n-x^{-n}}{x-x^{-1}}$$

$$=\frac{x^{n+2}-x^{-n-2}}{x-x^{-1}}=f_{n+1}(x)$$

得 $f_{n+1}(x)=yf_n(x)-f_{n-1}(x)$.

2. 直接计算得

$f_1(x)=x+x^{-1}=y$

$f_2(x)=x^2+1+1/x^2=(x+1/x)^2-1=y^2-1$

因此，命题对于$n=1$，2时成立.

设命题对$n\leqslant m$（$m\geqslant 2$，m为自然数）已成立，要证明对于$n=m+1$时，命题也成立.

以下分两种情况讨论：

（Ⅰ）当$m+1$为奇数时，由归纳假设知，对$n=m$及$n=m-1$，有

$$f_m(x)=y^m-C_{m-1}^1y^{m-2}+C_{m-2}^2y^{m-4}+\cdots+(-1)^i C_{m-i}^i y^{m-2i}+\cdots+(-1)^{m/2}C_{m-m/2}^{m/2}y^{m-2\times m/2} \quad (1)$$

$$f_{m-1}(x)=y^{m-1}-C_{m-2}^1y^{m-3}+C_{m-3}^2y^{m-5}+\cdots+(-1)^i C_{m-i}^{i-1}y^{m+1-2i}+\cdots+(-1)^{m/2-1}C_{m/2}^{(m/2)-1}y. \quad (2)$$

（2）乘y减去（3）得到

$$yf_m(x)-f_{m-1}(x)=y^{m+1}\cdots+(-1)^i(C_{m-i}^n+C_{m-i}^{n-1})y^{m+1-2i}+\cdots+(-1)^{m/2}(C_{m-m/2}^{m/2}+C_{m-m/2}^{m/2-1})y$$

因 $C_{m-i}^i+C_{m-i}^{i-1}=C_{m-i+1}^i$

故 $yf_m(x)-f_{m-1}(x)=y^{m+1}-C_{m+1-1}^1y^{m-1}+\cdots+(-1)^iC_{m-i+1}^iy^{m+1-2i}+\cdots+(-1)^{m/2}C_{m/2+1}^{m/2}y$

根据（1）式，故命题对$n=m+1$（$m+1$为奇数）成立.

（Ⅱ）当 $m+1$ 为偶数时，由归纳假设知，对 $n=m$ 及 $n=m-1$，有

$$f_m(x)=y^m-C_{m-1}^1y^{m-2}+\cdots+(-1)^iC_{m-i}^iy^{m-2i}+\cdots+(-1)^{(m-1)/2}C_{(m+1)/2}^{(m-1)/2} \tag{3}$$

$$f_{m-1}(x)=y^{m-1}-C_{m-2}^1y^{m-2}+\cdots+(-1)^{i-1}C_{m-i}^{i-1}y^{m+1-2i}+\cdots+(-1)^{(m-1)/2}C_{(m-1)/2}^{(m-1)/2} \tag{4}$$

用 y 乘（3）减去（4），合并同类项并注意到常数项为

$$-(-1)^{(m-1)/2}C_{(m-1)/2}^{(m-1)/2}=(-1)^{(m+1)/2}C_{(m+1)/2}^{(m+1)/2}=(-1)^{(n+1)/2}$$

于是得到

$$yf_n(x)-f_{n-1}(x)=y^{n+1}-C_m^1y^{m-1}+\cdots+(-1)^{(m+1)/2}$$

根据 1，即得对 $n=m+1$（$m+1$ 为偶数）命题也成立．

根据归纳原理，知对一切自然数 n，命题成立．

第二试参考解答

一、**解法一**　如图 3，过 A_3 作圆 O 的直径 A_3B．连 $BA_1,BA_2,BA_4,H_1A_2,H_2A_1,A_2A_4$．

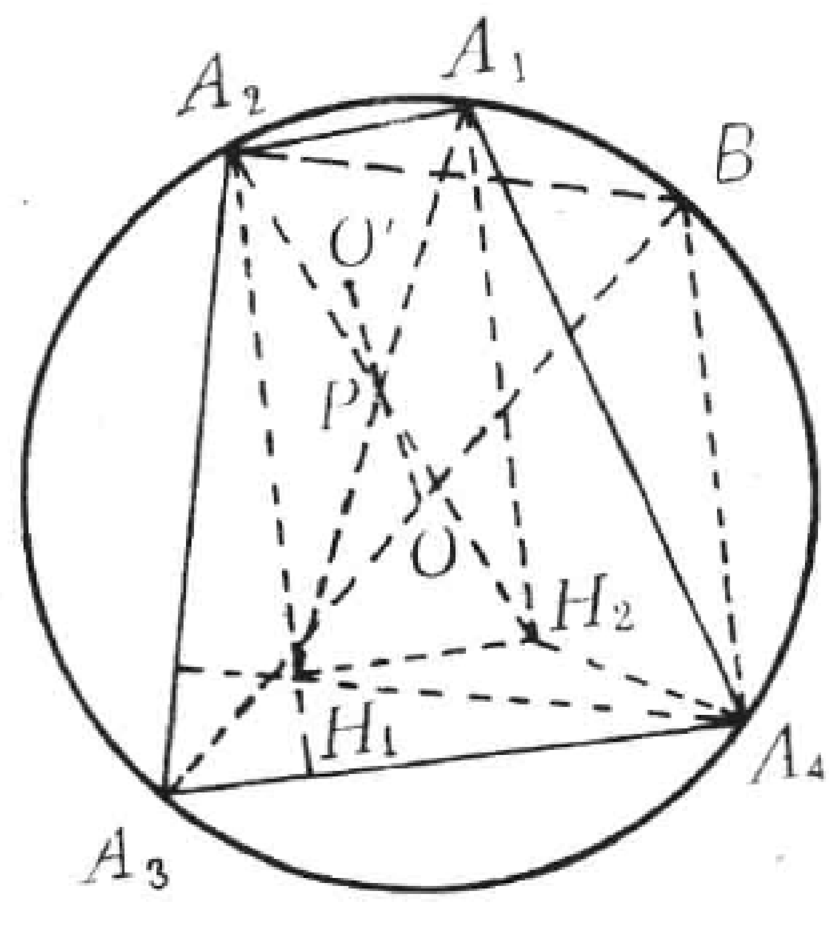

图 3

因为 $A_2H_1\perp A_3A_4$，$BA_4\perp A_3A_4$，所以，$A_2H_1\parallel BA_4$．又因 $A_4H_1\perp A_2A_3$，$BA_2\perp A_2A_3$，所以 $A_4H_1\parallel BA_2$．因此，$H_1A_4BA_2$ 为一平行四边形．从而 $A_2H_1 \mathrel{\underline{\parallel}} BA_4$．

同理可证，$H_2A_4BA_1$ 为一平行四边形，因此有 $A_2H_1 \mathrel{\underline{\parallel}} BA_4$．

因此，$A_2H_1 \mathrel{\underline{\parallel}} A_1H_2$．即知 $A_1A_2H_1H_2$ 为一平行四边形．

连对角线 A_1H_1，A_2H_2，由平行四边形的性质知 A_1H_1

与 A_2H_2 互相平分，设其交点为 P. 则得 $PA_1=PH_1$，$PA_2=PH_2$.

同理可得 $A_2A_3H_2H_3$ 为平行四边形，其对角线 A_2H_2、A_3H_3 平分于 P 点，即 $PA_3=PH_3$. 又同理可得 $A_3A_4H_3H_4$ 为平行四边形，其对角线亦互相平分于 P，即 $PA_4=PH_4$.

于是 A_1,A_2,A_3,A_4 分别与 H_1,H_2,H_3,H_4 关于 P 点中心对称．因 A_1,A_2,A_3,A_4 四点共圆，故其对称点 H_1，H_2，H_3，H_4 四点也共圆，它的圆心是 O 关于 P 的对称点．连接 OP，延长 OP 至 O'，使 $OP=PO'$，则 O' 为 H_1,H_2,H_3,H_4 所在圆的圆心．

解法二 取 O 为坐标原点，建立复平面．设 A_1,A_2,A_3,A_4 对应的复数分别为 Z_1，Z_2，Z_3，Z_4，则由 A_1，A_2，A_3，A_4 四点共圆，有

$$|Z_1|=|Z_2|=|Z_3|=|Z_4| \tag{1}$$

因为 $\triangle A_2A_3A_4$ 的重心 G_1 所对应的复数为 $(Z_2+Z_3+Z_4)/3$，又 O，G_1，H_1 共线，且 $OG_1:G_1H_1=1:2$（Eular 定理），即 $OH_1=3OG_1$，所以，H_1 对应的复数为 $Z_2+Z_3+Z_4$. 同理可知，H_i 对应的复数为：

$$(Z_1+Z_2+Z_3+Z_4)-Z_i \ (i=1,2,3,4) \tag{2}$$

令复数 $Z_1+Z_2+Z_3+Z_4$ 对应的点为 O'，则有 $|O'H_i|=|Z_i|$. 因此由（1）知：

$$|O'H_1|=|O'H_2|=|O'H_3|=|O'H_4| \tag{3}$$

即 H_1，H_2，H_3，H_4 在以 O' 为圆心的圆上．在复平面上作出对应于复数 $Z_1+Z_2+Z_3+Z_4$ 的点 O'，即为 H_1，H_2，H_3，H_4 所在圆的圆心．

解法三　如图4，设A_1H_1的中点为P，易见

$$A_2H_1=\frac{AD}{\cos\angle A_3A_2A_1}=\frac{A_2A_4\cos\angle A_3A_2A_4}{\sin\angle A_2A_3A_4}$$

注意到

$$\frac{A_2A_4}{\sin\angle A_2A_3A_4}=\frac{A_3A_4}{\sin\angle A_3A_2A_4}$$

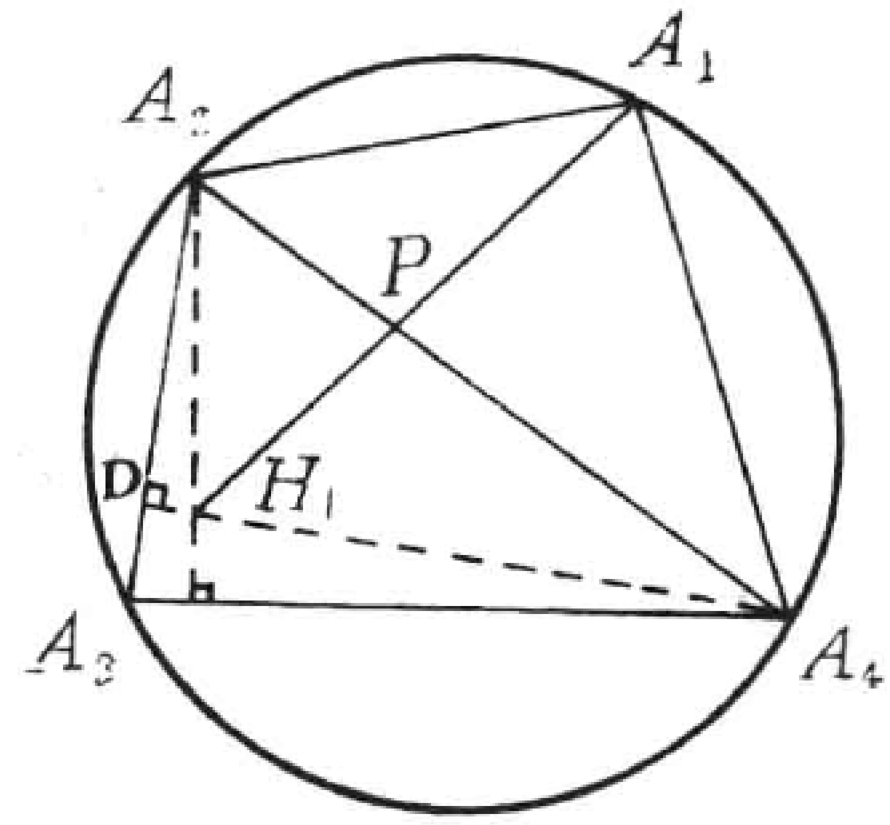

图4

便有

$$A_2A_1=\frac{A_3A_4\cos\angle A_3A_2A_4}{\sin\angle A_3A_2A_4}=A_3A_4\operatorname{ctg}\angle A_3A_2A_4$$

同理 $A_1H_2=A_3A_4\operatorname{ctg}\angle A_3A_1A_4=A_3A_4\operatorname{ctg}\angle A_3A_2A_4=A_2H_1$，又因 A_2H_1 与 A_1H_2 均垂直于 A_3A_4，故 $A_2H_1 /\!/ A_1H_2$，从而 $A_1A_2H_1H_2$ 为平行四边形．

于是 H_1 是 A_1 关于 P 的对称点，H_2 是 A_2 关于 P 的对称点，类似地可以逐步证明 H_3 是 A_3 关于 P 的对称点，H_4 是 A_4 关于 P 的对称点．因为 A_1，A_2，A_3，A_4 四点共圆，故它们的对称点 H_1，H_2，H_3，H_4 也四点共圆．作 O 点关于 P 的对称点 O'，则 O' 就是 H_1，H_2，H_3，H_4 四点所在之圆的圆心．

二、**解法一**　用数学归纳法证.

1. 记 S_n 的奇子集和偶子集的个数分别为 a_n 和 b_n.

当 $n=1$ 时，S_1 仅有奇子集 $\{1\}$ 和偶子集 Φ，故 $a_1=b_1=1$.

设 $n=k$ 时，结论成立，即 $a_k=b_k$，要证明 $a_{k+1}=b_{k+1}$.

S_{n+1} 的所有子集可以分成两类：一类包含 $k+1$，一类不包含 $k+1$．考虑不包含 $k+1$ 的子集，根据归纳假定，不包含 $k+1$ 的子集中，奇子集和偶子集分别有 a_k 个．今将 $k+1$ 加入原来不包含 $k+1$ 的子集中，即得到所有含 $k+1$ 的子集．显

然，若 $k+1$ 是偶数，原来的奇子集仍变成奇子集，原来的偶子集仍变成偶子集．若 $k+1$ 是奇数，原来的奇子集变成偶子集，偶子集变为奇子集．因此，不管 $k+1$ 是奇数还是偶数，包含 $k+1$ 的子集中，奇子集和偶子集也都为 a_k 个．故 S_{n+1} 中，奇子集和偶子集的个数都是 $2a_k$，所以 $a_{k+1}=b_{k+1}$.

根据归纳原理，知对所有的n，$a_n=b_n$.

2. 记 S_n 的奇子集和偶子集的容量和为 A_n 和 B_n.

当 $n\geqslant 3$ 时，S_4 有 4 个奇子集：$\{1\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\}$，有 4 个偶子集：$\phi,\{2\},\{1,3\},\{1,2,3\}$．直接计算得 $A_3=B_3=12$.

设 $n=k\ (k\geqslant 3)$ 时，有 $A_k=B_k$，往证 $A_{k+1}=B_{k+1}$.

将 $k+1$ 加入不含 $k+1$ 的子集中，即得所有含 $k+1$ 的子集．根据归纳假定：

当$k+1$为偶数时：

$$A_{k+1}=A_k+(A_k+(k+1)a_k)=2A_k+(k+1)a_k$$

$$B_{k+1}=B_k+(B_k+(k+1)b_k)=2B_k+(k+1)b_k$$

当$k+1$为奇数时：

$$A_{k+1}=A_k+(B_k+(k+1)b_k)=A_k+B_k+(k+1)b_k$$

$$B_{k+1}=B_k+(A_k+(k+1)a_k)=A_k+B_k+(k+1)a_k$$

因为 $A_k=B_k$，$a_k=b_k$，所以总有 $A_{k+1}=B_{k+1}$.

根据归纳原理，对所有$n\geqslant 3$，$A_n=B_n$.

3. 根据已证明的递推关系：

$$A_n=2A_{n-1}+na_{n-1}$$

$$a_n=2a_{n-1}=2^2a_{n-2}=\cdots=2^{n-3}a_3$$

有
$$\begin{aligned}A_n&=2A_{n-1}+na_{n-1}\\&=2^2A_{n-2}+na_{n-1}+2(n-1)a_{n-2}\\&=2^3A_{n-3}+na_{n-1}+2(n-1)a_{n-2}+2^2(n-2)a_{n-3}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cdots \\
&= 2^{n-3}A_3 + na_{n-1} + 2(n-1)a_{n-2} + 2^2(n-2)a_{n-3} \\
&\quad + \cdots + 2^{n-4} \cdot 4a_3
\end{aligned}
$$

注意到$a_3 = 4$，$A_3 = 12 = 2(1+2+3)$，$a_i = 2^{i-1}$，便得

$$
\begin{aligned}
A_n &= 2^{n-2}(1+2+3) + 2^{n-2}n + 2^{n-2}(n-1) + \cdots + 2^{n-2} \cdot 4 \\
&= 2^{n-2}(1+2+3+4+\cdots+n) \\
&= 2^{n-3}n(n+1).
\end{aligned}
$$

解法二 令 a_n，b_n，A_n，B_n 记号的意义仍如解法一.

1. 因S_n的子集总数为2^n，故$a_n + b_n = 2^n$.

令 $k = [n/2]$，$l = n-k$，将 S_n 分划为由奇数和偶数组成的两个子集：

$$X = \{1, 3, 5, \cdots, 2l-1\}$$

$$Y = \{2, 4, 6, \cdots, 2k\}$$

在 Y 中取一个子集 Q（包括空集 Φ），在 X 中取一个子集 P_i（P_i 表示 X 的一个含 i 个元素的子集，$i = 0, 1, \cdots, l$）. 显然

$$P_i \cup Q = \begin{cases} S_n\text{的一个奇子集，当}i\text{为奇数时.} \\ S_n\text{的一个偶子集，当}i\text{为偶数时.} \end{cases}$$

反之，S_n 的任一子集都可写成 P_i 与 Q 的并集，对于 S_n 的奇子集，i 为奇数；对于 S_n 的偶子集，i 为偶数.

在Y中子集Q的个数为2^k.

在 X 中含奇数个元素的子集的个数为 $C_l^1 + C_l^3 + \cdots + C_l^{2m-1}$（$2m-1$）为不大于 l 的最大奇数. X 中含偶数个元素的子集的个数为 $C_l^0 + C_l^2 + \cdots + C_l^{2j}$（$2j$ 为不大于 l 的最大偶数）. 由

$$(1-1)^l = C_l^0 - C_l^1 + C_l^2 - C_l^3 + \cdots = 0$$

知 $C_l^0 + C_l^2 + \cdots + C_l^{2j} = C_l^1 + C_l^3 + \cdots + C_l^{2m-1} = 2^{l-1}$