高等院校精品课系列教材
高等院校经济数学系列教材

名品

概率论与数理统计习题集

（第三版）

3

上海财经大学应用数学系　编

随书附赠

上海财经大学出版社

高等院校精品课系列教材
高等院校经济数学系列教材

概率论与数理统计习题集

（第三版）

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

目 录

第一章　事件与概率 …… 1
一、内容提要 …… 1
二、典型例题 …… 4
三、练习题 …… 10
四、参考答案与提示 …… 15

第二章　条件概率与独立性 …… 19
一、内容提要 …… 19
二、典型例题 …… 20
三、练习题 …… 26
四、参考答案与提示 …… 30

第三章　随机变量及其分布 …… 35
一、内容提要 …… 35
二、典型例题 …… 40
三、练习题 …… 49
四、参考答案与提示 …… 60

第四章　随机向量及其分布 …… 71
一、内容提要 …… 71
二、典型例题 …… 74
三、练习题 …… 85
四、参考答案与提示 …… 94

第五章　数字特征与特征函数 …… 107
一、内容提要 …… 107
二、典型例题 …… 110
三、练习题 …… 119

四、参考答案与提示 …… 128

第六章 极限定理 …… 143
一、内容提要 …… 143
二、典型例题 …… 144
三、练习题 …… 146
四、参考答案与提示 …… 148

第七章 统计量与抽样分布 …… 151
一、内容提要 …… 151
二、典型例题 …… 154
三、练习题 …… 157
四、参考答案与提示 …… 160

第八章 参数估计 …… 163
一、内容提要 …… 163
二、典型例题 …… 168
三、练习题 …… 174
四、参考答案与提示 …… 179

第九章 假设检验 …… 183
一、内容提要 …… 183
二、典型例题 …… 186
三、练习题 …… 192
四、参考答案与提示 …… 196

第十章 线性统计推断 …… 201
一、内容提要 …… 201
二、典型例题 …… 212
三、练习题 …… 214
四、参考答案与提示 …… 216

第一章

事件与概率

一、内容提要

(一)随机试验和随机事件

1. 随机试验

对随机现象的某一特征的试验或观察，称为**随机试验**，简称**试验**，记为 E. 随机试验必须满足下述条件：

(1)试验可以在相同的条件下重复进行；

(2)试验之前能确定所有可能的结果；

(3)试验之前不能确定将会出现所有可能结果中的哪一个.

2. 样本点与样本空间

随机试验的每一可能结果称为**样本点**，用 ω 表示.

样本点全体组成的集合称为**样本空间**，用 Ω 表示.

3. 随机事件

由若干个样本点组成的集合(或样本空间的某个子集)称为**随机事件**，简称**事件**，用 A,B,C,A_i,B_j 等大写拉丁字母表示.

在某次试验中，若事件 A 中的某个样本点出现，则称 A **发生**.

样本空间 Ω 包含了所有的样本点，在每次试验中它总发生，因此 Ω 就是**必然事件**. 空集 Φ 不包含任何样本点，在每次试验中它总不发生，因此 Φ 即为**不可能事件**.

(二)事件之间的关系与运算

1. 包含关系

若事件 A 的每一个样本点都属于事件 B，则称 A **包含于** B，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，这时事件 A 的发生必然导致 B 的发生.

2. 相等事件

如果同时成立 $A\subset B$ 及 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **等价**，或 A **等于** B，记为 $A=B$. 此时 A 与 B 表示同一个事件，它们所包含的样本点完全相同.

3. 不相容事件

若在任何一次试验中，事件 A 与 B 都不可能同时发生，则称事件 A 与 B **互不相容**，或 A 与 B **互斥**. 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则称这 n 个事件互不相容. 若可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互不相容，则称 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容.

4. 交(积)

由同时属于事件 A 与 B 的样本点组成的集合称为 A 与 B 的**交**(**或积**)，记为 $A\cap B$ 或

AB，事件 AB 表示 A 与 B 同时发生．显然，A 与 B 互不相容即为 $AB=\Phi$. 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，它由同时属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的样本点组成，表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生．对可列个事件，定义 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq \lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

5. 并

由至少属于事件 A 与 B 中的一个的样本点组成的集合称为 A 与 B 的**并**，记为 $A\cup B$，事件 $A\cup B$ 表示 A 与 B 中至少有一个发生．如果 A 与 B 互不相容，则称它们的并为**和**，记为 $A+B$. 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，它由至少属于 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的一个的样本点组成，表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少发生一个．如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则称它们的并为和，记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$. 对可列个事件，定义 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq \lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. 若 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容，则称它们的并为和，记为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

6. 逆事件

由不属于 A 的样本点组成的集合称为事件 A 的**逆事件**或**对立事件**，记为 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 表示事件 A 不发生．

注意：对立事件一定互不相容，但互不相容的事件不一定互为对立事件．

7. 差事件

由属于事件 A 而不属于 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的**差**，记为 $A-B$，事件 $A-B$ 表示 A 发生而 B 不发生．显然 $A-B=A\overline{B}$.

事件运算的顺序：首先进行逆的运算，再进行交的运算，最后才进行并或差的运算．

与集合之间的关系及运算相类似，事件之间的关系及运算 $A\subset B, AB=\Phi, A\cap B, A\cup B, \overline{A}, A-B$ 可以用 Venn 图直观地表示．

8. 事件之间的运算法则

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 德莫根(De Morgan)定理　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

德莫根定理可以推广到多个事件甚至可列个事件：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

（三）概率的定义与性质

1. 频率及概率的统计定义

对于随机事件 A，若在 N 次试验中发生了 n 次，则称 $F_N(A)=\dfrac{n}{N}$ 为 A 在这 N 次试验中出现的**频率**．

频率具有以下性质：

(1)(非负性)　对任一事件 A，$F_N(A)\geqslant 0$；

(2)(规范性)　$F_N(\Omega)=1$;

(3)(有限可加性)　若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容,则

$$F_N\Big(\sum_{i=1}^{m}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{m}F_N(A_i).$$

在一次试验或观察中,事件 A 是否发生是偶然的. 但在大量重复试验中,A 出现的频率会在某个固定常数附近摆动,而且一般说来,随着试验次数的不断增加,摆动的幅度会越来越小,这一现象称为**频率稳定性**.

在频率稳定性中,事件 A 的频率的稳定值称为 A 发生的概率,以 $P(A)$ 表示,称这一定义为**概率的统计定义**,它度量了事件 A 发生的可能性大小.

2. 古典概型和概率的古典定义

(1) 古典概型

古典概型是指具有以下两个特征的一类特殊的概率模型:

(Ⅰ) 试验的全部可能结果只有有限个,即样本空间只含有限个样本点 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$, n 为有限正整数;

(Ⅱ) 每个样本点出现的可能性相同,即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\dfrac{1}{n}$.

(2) 概率的古典定义

$$P(A)=\frac{A\text{包含的样本点个数}}{\text{样本点总数}}=\frac{A\text{的有利场合数}}{\text{样本点总数}}.$$

古典概率具有以下性质:

(1)(非负性)　对任一事件 A, $P(A)\geqslant 0$;

(2)(规范性)　$P(\Omega)=1$;

(3)(有限可加性)　若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容,则

$$P\Big(\sum_{i=1}^{m}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i).$$

3. 几何概率

记 A_D 为事件"在区域 Ω 中随机地取一点,而该点落入区域 D 中",称 $P(A_D)=\dfrac{D\text{的测度}}{\Omega\text{的测度}}$ 为**几何概率**. 区域 Ω 和 A_D 可以是一维的,也可以是高维的. 其中的测度是一个广义的概念,可以指长度、面积、体积等. 与概率的古典定义类似,几何概率也是通过等可能性来定义的. 这里的等可能性是指:随机选取的点落入区域 D 的概率与 D 的测度成正比,而与 D 的位置、形状无关.

几何概率具有以下性质:

(1)(非负性)　对任一事件 A, $P(A)\geqslant 0$;

(2)(规范性)　$P(\Omega)=1$;

(3)(可列可加性)　若事件 $A_1,A_2,\cdots$ 互不相容,则

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

4. 概率的公理化定义

(1) 事件域(σ－域)

设 Ω 是样本空间,$\mathcal{F}$ 是 Ω 的一些子集组成的集类,满足下列条件:

（Ⅰ）$\Omega \in \mathcal{F}$；

（Ⅱ）若 $A \in \mathcal{F}$，则 $\overline{A} \in \mathcal{F}$；

（Ⅲ）若 $A_i \in \mathcal{F}(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

则称$\mathcal{F}$为 Ω 上的**事件域**（**σ-域**）.

$\mathcal{F}$具有以下性质：

(a)$\Phi \in \mathcal{F}$；

(b) 若 $A_i \in \mathcal{F}(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$；

(c) 若 $A_i \in \mathcal{F}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$，$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$；

(d) 若 $A,B \in \mathcal{F}$，则 $A-B \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$并没有包含 Ω 的所有子集，但足以包含了我们感兴趣的那些子集．在概率的公理化定义中，只有$\mathcal{F}$中的元素才称为事件，并赋以概率．

(2) 概率的公理化定义

设 P 是定义于事件域$\mathcal{F}$上的集合函数，满足条件：

①(非负性)　$P(A) \geqslant 0, \forall A \in \mathcal{F}$；

②(规范性)　$P(\Omega)=1$；

③(可列可加性)　若 $A_i \in \mathcal{F}(i=1,2,\cdots)$，且互不相容，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 P 为**概率**，而称三元体$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为**概率空间**.

(3) 概率的性质

性质 1　$P(\Phi)=0$；

性质 2(有限可加性)　若 $A_i \in \mathcal{F}(i=1,2,\cdots,n)$，且互不相容，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

性质 3　对任何事件 A，有 $P(A)=1-P(\overline{A})$；

性质 4　如果 $A \supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B), P(A) \geqslant P(B);$$

性质 5(概率的加法定理)　对任何两个事件 A,B，有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，有下式成立

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ &=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_iA_jA_k)-\cdots \\ &\quad+(-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n). \end{aligned}$$

二、典型例题

【例 1】　写出下列随机试验的样本空间：

(1) 掷一枚均匀的骰子两次，观察两次出现的点数之和；

(2) 某篮球运动员投篮时，要求连续 5 次投中，观察其投篮的次数；

(3) 记录某班一次数学考试的平均成绩(以百分制记)；

(4) 一射手进行射击，直到击中时为止，观察其射击情况；

(5) 在单位圆内任选两点，观察这两点的距离；

(6) 观察某地一天内的最高气温和最低气温(假定最低气温不低于 T_1，最高气温不高于 T_2).

解 (1) 骰子两次出现的点数之和最小为 2，最大为 12，故样本空间为

$$\Omega_1 = \{2,3,\cdots,12\}.$$

(2) 连续 5 次投篮命中，至少必须投 5 次，但无法确定它的上界，因此样本空间为

$$\Omega_2 = \{5,6,\cdots\}.$$

(3) 设该班共有 n 名学生，则样本空间为

$$\Omega_3 = \left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,100\right\}.$$

(4) 以 0 表示没有击中，1 表示击中目标. 由于射击必须到击中目标时才终止，因此每一个样本点均为最后一次击中目标的序列，于是样本空间为

$$\Omega_4 = \{1,01,001,0001,\cdots\}.$$

(5) 设两点的坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，则样本空间为

$$\Omega_5 = \{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \mid x_1^2+y_1^2<1, x_2^2+y_2^2<1\},$$

或写成更加简洁的形式：

$$\Omega_5 = \{t \mid 0<t<2\}.$$

(6) 设样本点为 (x,y)，其中 x,y 分别表示最低气温和最高气温，则样本空间为

$$\Omega_6 = \{(x,y) \mid T_1 \leqslant x < y \leqslant T_2\}.$$

【例 2】 指出下列关系中哪些成立，哪些不成立：

(1) $A\cup B = A\overline{B}\cup B$；

(2) $\overline{(A\cup B)}C = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(3) 若 $A\subset B$，则 $A = AB$；

(4) 若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$；

(5) 若 $AB=\Phi$，且 $C\subset A$，则 $BC=\Phi$；

(6) $(AB)(A\overline{B})=\Phi$；

(7) $\overline{A}B = A\cup B$.

解 (1) 成立. $A\overline{B}\cup B = (A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B) = (A\cup B)\cap\Omega = A\cup B$.

(2) 不成立. $\overline{(A\cup B)}C$ 发生，即 $\overline{A\cup B}$ 发生且 C 发生，C 发生则 $\overline{C}$ 不发生，所以 $\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$ 也不发生. 因此 $\overline{(A\cup B)}C \neq \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

(3) 成立. 首先，显然有 $AB\subset A$，其次，若 A 发生，由于 $A\subset B$，则 B 必发生，即 $A\subset AB$，从而 $A=AB$.

(4) 成立. 因为 $A\subset B$，所以 A 的每个样本点都是 B 的，从而 $\overline{B}$ 的每个样本点都是 $\overline{A}$ 的，即 $\overline{B}\subset\overline{A}$.

(5) 成立. 由于 $C\subset A$，因此 $BC\subset AB=\Phi$，但另一方面，显然成立 $\Phi\subset BC$，所以 $BC=\Phi$.

(6) 成立. $(AB)(A\overline{B}) = A(B\overline{B}) = A\Phi = \Phi$.

(7) 不成立. 若 $\overline{A}B = A\cup B$，则 $A\overline{A}B = A(A\cup B)$，即 $\Phi = A\cup AB$，矛盾.

【例 3】 一块各面均涂有油漆的正方体被锯成 1 000 个同样大小的小正方体. 从这些小正方体中任取一个，求这一小正方体的两面涂有油漆的概率.

解 记A为"任意取得的小正方体两面涂有油漆"的事件．小正方体总的个数$n=1\,000$，正方体共有12条边，每条边被分成10段，每条边上各有8个两面涂有油漆的小正方体，因此$m(A)=12\cdot 8=96$，所求概率$P(A)=\dfrac{m(A)}{n}=0.096$.

【例4】 求下列事件的概率：

(1)A:同房间的4个学生，至少有2人生日在同一个月；

(2)B:同一班的30个学生中，至少有1人生日在10月1日；

(3)C:参加聚会的K个人中至少有2人生日相同．

解 (1)$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{P_{12}^4}{12^4}=1-\dfrac{495}{864}\approx 0427\,1$；

(2)$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{364^{30}}{365^{30}}\approx 0.08$；

(3)$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\dfrac{P_{365}^K}{365^K}$.

【例5】 n对新人参加婚礼，现进行一项游戏：随机地把人分为n对，问每对恰为夫妻的概率是多少？

解 把这$2n$个人从左至右排成一列，总共有$(2n)!$种排法．处在1,2位置的作为一对夫妻，3,4位置的作为一对夫妻，等等．将每对夫妻看成一组，先按组排列，共有$n!$种排法；每组都各有2种排法，共2^n种，故排列总数为$2^n\cdot n!$. 所以$P=\dfrac{2^n\cdot n!}{(2n)!}$.

【例6】 从0,1,…,9中有放回地连取4个数，并按出现的先后次序排列，求下列事件的概率：

(1)A_1:四个数字组成一四位数；

(2)A_2:四个数字组成一四位偶数；

(3)A_3:四个数字中0恰好出现两次；

(4)A_4:四个数字中0至少出现一次．

解 (1)样本点总数显然为10^4. 四个数组成一个四位数，只需第一位数字不为0，后三位数可以任意，所以A_1的有利场合数为$C_9^1\cdot 10^3$，因此$P(A_1)=\dfrac{C_9^1\cdot 10^3}{10^4}=0.9$.

(2)四个数组成一个四位偶数，第一位数字不能为0，且末位必须为偶数或0，所以A_2的有利场合数为$C_9^1\cdot 10^2\cdot C_5^1$，因此$P(A_2)=\dfrac{C_9^1\cdot 10^2\cdot C_5^1}{10^4}=\dfrac{9}{20}$.

(3)数字0恰好出现两次，必须有某两次取为0，而另两次不取0，于是A_3的有利场合数为$C_4^2\cdot 9^2$，从而$P(A_3)=\dfrac{C_4^2\cdot 9^2}{10^4}=0.048\,6$.

(4)为求四个数字中0至少出现一次的概率，我们先求四个数字中不含0的概率．取到的四个数字不含0，共有9^4种取法，因此$P(A_4)=1-\dfrac{9^4}{10^4}=0.343\,9$.

【例7】 一部电梯从底层开始启动时有6位乘客，设每位乘客在十层楼的任何一层离开的可能性相同．试求下列事件的概率：

(1)A:某指定的一层有两位乘客离开；

(2)B:没有两位及两位以上的乘客在同一层离开；

(3)C:恰有两位乘客在同一层离开；

(4)D:至少有两位乘客在同一层离开.

解 由于每一位乘客均可能在十层楼的任一层离开,故样本点总数为 10^6.

(1) 某指定的一层有两位乘客离开,这两位乘客可以是6人中的任2人,共有 C_6^2 种组合方式,其余4人可以在另外9层任意离开,共有 9^4 种方式,故 A 的概率为 $P(A)=\dfrac{C_6^2\cdot 9^4}{10^6}\approx 0.0984$.

(2) 没有两位及两位以上的乘客在同一层离开,即6位乘客应在10层中任选6层,每层有1位下,共有 P_{10}^6 种不同的方式,故 B 的概率为 $P(B)=\dfrac{P_{10}^6}{10^6}=0.1512$.

(3) 恰有两位乘客在同一层离开,乘客的组合方式共有 C_6^2 种,对楼层的选择方式共有 C_{10}^1 种,其余的4位乘客不能有2位在同一层一起下,有如下三种形式:4位在同一层一起下,共有 C_9^1 种方式;有3位在9层的某一层一起下,余下的1位在剩下的8个楼层选择一层下,共有 $C_4^3C_9^1C_8^1$ 种不同的方式;4个人在不同的楼层下,一人一层,共有 $C_9^4\cdot 4!$ 种方式. 因此 C 的概率为

$$P(C)=\frac{C_{10}^1C_6^2(C_9^1+C_4^3C_9^1C_8^1+C_9^4\cdot 4!)}{10^6}\approx 0.4982.$$

(4) 显然有 $P(D)=1-P(B)=1-0.1512=0.8488$.

【例8】 口袋中有 $n-1$ 只黑球及1只白球,每次从袋中取出一球,并换入1只黑球,如此继续下去. 求第 k 次取到黑球的概率.

解 记 A 为第 k 次取到黑球的事件. 如果直接求 A 的概率,则必须将 A 分解成许多事件的并,为此我们先求 $\overline{A}$ 的概率. 这里 $\overline{A}$ 表示第 k 次取到白球的事件,$\overline{A}$ 发生,即前 $k-1$ 次取到的均为黑球,从而 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$.

【例9】 从 $1,2,\cdots,N$ 中每次有放回地任取一数,共取 $k(1\leqslant k\leqslant N)$ 次,求下列事件的概率:

(1)A:k 个数字全不相同;

(2)B:不含 $1,2,\cdots,N$ 中指定的某 r 个数字;

(3)C:某指定的一个数字恰好出现 $m(m\leqslant k)$ 次;

(4)D:k 个数字中的最大数为 $M(1\leqslant M\leqslant N)$;

(5)E:k 个数字严格上升.

解 从数字 $1,2,\cdots,N$ 中有放回地取 k 个数字,共有 N^k 种取法,即样本点总数为 N^k.

(1) 由于要求取出的 k 个数字全不相同,所以 A 的有利场合数为 P_N^k,因此 $P(A)=\dfrac{P_N^k}{N^k}$.

(2) 取出的 k 个数字中不含某指定的 r 个数字,则只能在剩下的 $N-r$ 个数字中有放回地取 k 个数,因而 B 的有利场合数为 $(N-r)^k$,因此 $P(B)=\dfrac{(N-r)^k}{N^k}$.

(3) 某指定的一个数字重复出现 m 次,可以是 k 次中的任意 m 次,共有 C_k^m 种选法,而其余的 $k-m$ 次均取自剩下的 $N-1$ 个数字,因此事件 C 的有利场合数为 $C_k^m\cdot(N-1)^{k-m}$,因此 $P(C)=\dfrac{C_k^m\cdot(N-1)^{k-m}}{N^k}$.

(4) 从 $1,2,\cdots,N$ 中有放回地取 k 个数字,最大数不大于 M 的取法共有 M^k 种(这是因为只能从 $1,2,\cdots,M$ 中有放回地取 k 个数字),而最大数不大于 $M-1$ 的取法共有 $(M-1)^k$ 种,因此事件 D 的有利场合数为 $M^k-(M-1)^k$,从而 $P(D)=\dfrac{M^k-(M-1)^k}{N^k}$.

(5)k 个数字按严格上升的次序排列，自然它们全不相同，共有 C_N^k 种取法，其中只有一种是按严格上升次序排列的，因此事件 E 的有利场合数为 C_N^k，从而 $P(E)=\dfrac{C_N^k}{N^k}$.

【例 10】 甲、乙、丙三人按下面的规则进行比赛：第一局甲、乙参加而丙轮空，由第一局的优胜者与丙进行第二局比赛，而失败者轮空，比赛用这种方式进行到其中一人连胜两局为止，连胜两局者为整场比赛的优胜者．若甲、乙、丙胜每局的概率均为 $\dfrac{1}{2}$，问甲、乙、丙成为整场比赛的优胜者的概率各是多少？

解 记 A,B,C 分别为比赛中甲、乙、丙获胜的事件，则比赛的可能结果有

$$AA,ACC,ACBB,ACBAA,ACBACC,ACBACBB,\cdots$$
$$BB,BCC,BCAA,BCABB,BCABCC,BCABCAA,\cdots$$

在这些结果中，包含 k 个字母的事件发生的概率为 $\dfrac{1}{2^k}$，于是丙获胜的概率为

$$\begin{aligned}P(C)&=[P(ACC)+P(BCC)]+[P(ACBACC)+P(BCABCC)]+\cdots\\&=2\times\frac{1}{2^3}+2\times\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{2}{7},\end{aligned}$$

由于甲、乙的地位是对称的，所以 $P(A)=P(B)$，因此

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}[1-P(C)]=\frac{5}{14}.$$

【例 11】 某班 n 个战士各有 1 支枪，这些枪的外形完全一样，在一次夜间紧急集合中，每人随机地取了 1 支枪，求至少有 1 人拿到自己的枪的概率．

解 记 A_i 为“第 i 个战士拿到自己枪”的事件$(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A_i)=\frac{(n-1)!\cdot 1}{n!}=\frac{1}{n},$$

$$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!\cdot 1\cdot 1}{n!}=\frac{1}{P_n^2}\quad(i\neq j),$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!},$$

因而所求概率为

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\\&=C_n^1\frac{1}{n}-C_n^2\frac{1}{P_n^2}+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n\frac{1}{P_n^n}\\&=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j!}.\end{aligned}$$

【例 12】 在长度为 T 的时间段内，有两个长短不等的信号随机地进入接收机. 长信号保持时间 $t_1\ll T$，短信号保持时间 $t_2\ll T$，求两个信号互不干扰的概率.

解 设长短信号到达时间分别为 x,y. 若长信号先进入接收机，要不受干扰，必须有 $t_1+x<y$；若短信号先进入接收机，要不受干扰，必须有 $t_2+y<x$. 从而样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant y\leqslant T\}.$$

记 A 为两信号互不干扰事件，则

$$A=\{(x,y)\mid t_1+x<y<T \text{ 或 } t_2+y<x<T\},$$

见图 1－1.

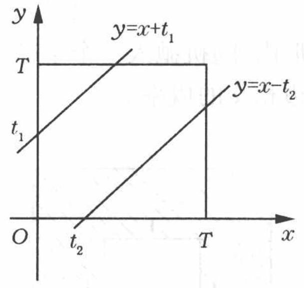

图 1－1

从而

$$P(A)=\frac{A_1\text{ 面积}+A_2\text{ 面积}}{T^2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{T-t_1}{T}\right)^2+\left(\frac{T-t_2}{T}\right)^2\right].$$

【例 13】 把一根长为 a 的木棒任意地折成三段，求这三段能构成一个三角形的概率.

解 记折成三段后的长度分别为 $x,y,a-x-y$，则它们的可能取值为

$$\begin{cases}0<x<a\\0<y<a\\0<a-x-y<a\end{cases},$$

从而样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<a,0<y<a,0<x+y<a\}.$$

这样的 x,y 构成区域 ΔAOB（见图 1－2）.

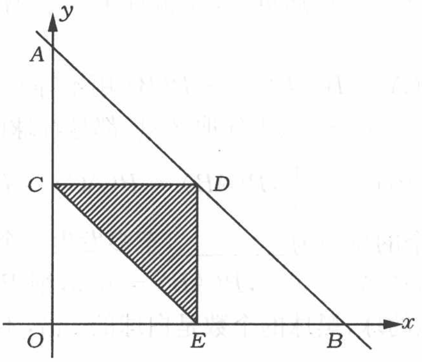

图 1－2

而折成的三段要构成三角形，根据三角形任两边之和大于第三边的原理，x,y 必须满足

$$\begin{cases}0<x<\dfrac{a}{2}\\0<y<\dfrac{a}{2}\\\dfrac{a}{2}<x+y<a\end{cases},$$

即构成 ΔCDE. 因此折成的三段能构成三角形的概率为

$$p=\frac{\Delta CDE\text{ 的面积}}{\Delta AOB\text{ 的面积}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}.$$

【例 14】 在边长为 3 的正方形内,随机抛入一个半径为 1 的圆环. 设圆环的圆心一定落入正方形内,求圆环能与正方形的边相交的概率.

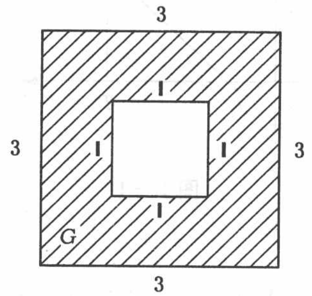

图 1－3

解 半径为 1 的圆环能与正方形的边相交的充要条件是圆环的圆心落入图中阴影部分 G(见图 1－3),故由几何概型的计算公式,有 $P=\frac{u(G)}{u(n)}=\frac{9-1}{9}=\frac{8}{9}$.

三、练习题

(一) 填空题

1. 设 A,B,C 为三个事件,则至少发生一个可以表示为________,不多于两个发生可表示为________.

2. 总经理的 5 位秘书中有 3 位精通英语,今偶遇其中的两位,事件“其中有人精通英语”的概率为________.

3. 将 $P(A),P(AB),P(A\cup B),P(A)+P(B)$ 用不等号联系起来:________.

4. 盒子中有 4 个红球、2 个白球,从中任取 2 只,都是红球的概率为________.

5. 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{8}$,$P(ABC)=\frac{1}{16}$,则事件 A,B,C 中至少发生一个的概率为________,至多发生一个的概率为________.

6. 设 A,B 为两个事件,$P(A)=0.5$,$P(AB)=0.3$,则 $P(A\overline{B})=$ ________.

7. 袋中有黑白两种颜色的球,黑球的个数是白球的 2 倍,不放回地依次取球,每次取一个,则第 k 次取到白球的概率为________.

8. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$(a 为正常数)内掷一点,点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比,则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为________.

9. 五个同心圆的半径依次为 $kr(k=1,2,3,4,5)$. 用线条画满半径为 r 的圆和内外半径分别为 $3r$ 和 $5r$ 的圆环. 在半径为 $5r$ 的圆中任取一点,则该点落在半径为 $2r$ 的圆内的概率为________,落在划有线条的区域内的概率为________.

10. 在长为 l 的线段 AB 上任意地投两点 L 及 M,则 LM 的长度小于 AL 的概率为______.

11. 两个人随机地走进编号为 1,2,3,4 的四个房间,则恰好有 1 人走进 2 号房间的概率为________.

12. 在 5 把钥匙中,有 2 把能把门打开,现逐把试开,则第三次恰好把门打开的概率为________.

13. 现有 10 件同类产品,其中 6 件正品、4 件次品,现从中任取 3 件,则取得的 3 件中至少有 1 件次品的概率为________.

14. 某奖券的开奖号码由 0 ~ 9 这十个数字中任取 6 个数组成(数字允许重复),则由不同的 6 个数字组成开奖号码的概率为________.

15. 某城市有 50% 的住户订日报,有 65% 的住户订晚报,有 85% 的住户至少订这两种报纸中的一种,那么同时订这两种报纸的住户的百分比为________.

16. 从 5 双不同的手套中任取 4 只,那么事件"4 只都不配对"的概率为________.

17. 如果 A,B 两事件满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$,且 $P(A)=m$,则 $P(B)=$ ________.

18. 设有 n 个人排成一排,则甲、乙两个相邻的概率为________.

(二) 选择题

1. 设 A,B,C 为三个事件,下列事件中与 A 互斥的事件是(　　).

A. $\overline{A}B \cup A\overline{C}$　　B. $\overline{A(B \cup C)}$

C. $\overline{ABC}$　　D. $\overline{A \cup B \cup C}$

2. 对于两个事件 A,B,有 $P(A-B)=$(　　).

A. $P(A)-P(B)$　　B. $P(A)-P(B)+P(AB)$

C. $P(A)-P(AB)$　　D. $P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$

3. 袋中有 5 只球(3 红 2 白),每次取 1 只,无放回地取两次,则第二次取到红球的概率为(　　).

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{10}$

4. 若 $A \supset B, A \supset C, P(A)=0.9, P(\overline{B} \cup \overline{C})=0.8$,则 $P(A-BC)=$(　　).

A. 0.6　　B. 0.7

C. 0.8　　D. 0.4

5. 3 个人被等可能地分配到 4 个房间的任一间去,则某指定的房间中恰有 2 人的概率是(　　).

A. $\frac{3}{64}$　　B. $\frac{3}{16}$

C. $\frac{9}{64}$　　D. $\frac{5}{32}$

6. 一袋中有大小相同的 7 只球,其中 4 只白球、3 只黑球,现从中任取 3 只,事件"至少有 2 只白球"的概率是(　　).

A. $\frac{22}{35}$　　B. $\frac{18}{35}$

C. $\frac{4}{35}$　　D. $\frac{4}{7}$

7. 若两个事件 A 与 B 同时出现的概率 $P(AB)=0$,则(　　).

A. AB 是不可能事件　　B. A 与 B 为互斥事件

C. A 与 B 为对立事件　　D. AB 不一定是不可能事件

8. 三封信随机地投入编号为 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ 的四个邮筒,则 Ⅱ 号邮筒内恰好有一封信的概率是(　　).

A. $\frac{9}{32}$　　B. $\frac{9}{64}$

C. $\frac{27}{64}$　　D. $\frac{3}{64}$

9. 事件 A 表示“甲产品畅销,乙产品滞销”,则其对立事件 $\overline{A}$ 为(　　).

A. 甲产品滞销或乙产品畅销　　B. 甲产品滞销

C. 甲产品滞销且乙产品畅销　　D. 乙产品畅销

10. 事件 A,B 互斥,且 $P(A)=0.4,P(B)=0.3$,则 $P(\overline{A}\,\overline{B})=$(　　).

A. 0.12　　B. 0.3

C. 0.42　　D. 0

11. 设 A 与 B 互不相容,且 $P(A)>0,P(B)>0$,则下列结论中肯定正确的是(　　).

A. A 与 B 为对立事件　　B. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容

C. $P(A-B)=P(A)-P(B)$　　D. $P(A-B)=P(A)$

12. 已知 $P(A)=0.8,P(B)=0.6$,则 $P(AB)$ 的最小值是(　　).

A. 0　　B. 0.6

C. 0.48　　D. 0.4

13. 设 $P(A)=m,P(B)=n,P(A\cup B)=k$,则 $P(A\overline{B})=$(　　).

A. $m-n$　　B. $k-n$

C. $m(1-n)$　　D. $m(1-k)$

14. 在时间间隔 T 内的任何瞬间,两信号等可能地进入收音机. 如果这两个信号的时间间隔小于 t 时收音机受到干扰,则收音机受到干扰的概率为(　　).

A. $\frac{t}{T}$　　B. $\left(\frac{t}{T}\right)^2$

C. $1-\left(\frac{t}{T}\right)^2$　　D. $1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$

15. A,B 为随机事件,$A\overline{B}=\Phi$,则下列说法正确的是(　　).

A. A,B 不能同时发生　　B. $\overline{A},\overline{B}$ 不能同时发生

C. A 发生则 B 必发生　　D. B 发生则 A 必发生

(三) 分析判断题

1. 给定一个随机试验,则该随机试验的样本空间的选取是唯一的.

2. 掷两枚骰子,考察它们出现的点数之和,其样本空间为 $\Omega=\{2,3,\cdots,12\}$,因此由概率的古典定义,点数之和为 7 的概率为$\frac{1}{11}$.

3. 某事件发生的概率为 5%,现独立地进行 100 次试验,则该事件正好发生 5 次.

4. 某事件的概率为 0,则该事件必为不可能事件.

5. 由 $P(A)\leqslant P(B)$,不能推出 $A\subset B$.

(四) 简答题

1. 叙述随机试验的定义.

2. 说明对立事件与互斥事件之间的关系.

3. 叙述频率与概率的定义,指出它们之间的联系.

4. 等式$(A-B)+B=A$何时成立?一般而言,$(A-B)+B$应等于什么?

(五) 计算、证明题

1. 箱中有3件同样的产品,分别标有1,2,3号,试写出下列随机试验的样本空间,并说明哪些是古典概型:

(1) 从箱中任取两件;

(2) 从箱中任取一件,不放回箱中,再任取一件;

(3) 从箱中任取一件,放回箱中,再任取一件;

(4) 从箱中不放回地接连抽取产品,直到取到1号产品.

2. 靶子由10个同心圆组成,半径分别为$r_1,r_2,\cdots,r_{10}$,且$r_1<r_2<\cdots<r_{10}$,以事件A_i表示命中点在半径为r_i的圆内,试叙述下列事件的意义:

(1) $\bigcup_{i=1}^{6} A_i$;

(2) $\bigcap_{i=1}^{8} A_i$;

(3) $\overline{A_2}A_3$.

3. 有50件产品,其中有5件次品,其余均为正品,现从中任取3件,试求:

(1) 取到2件次品的概率;

(2) 至少有1件次品的概率;

(3) 至少有2件次品的概率.

4. 从$0\sim9$这十个数字中任意选出三个不同的数字,试求下列事件的概率:

(1) 三个数字中不含0与5;

(2) 三个数字中不含0或不含5;

(3) 三个数字中含0但不含5.

5. 盒子中有10个球,分别标有$1\sim10$的号码,现任取3只,记录其号码. 试求下列事件的概率:

(1) 最小号码为5;

(2) 最大号码为5;

(3) 至少有一个号码小于6;

(4) 一个号码小于5,一个号码等于5,一个号码大于5.

6. 某城市发行A,B,C三种报纸,经统计,订阅A报的有45%的住户,订阅B报的有35%的住户,订阅C报的有30%的住户,同时订阅A报与B报的有10%,同时订阅A报与C报的有8%,同时订阅B报与C报的有5%,同时订阅A,B,C报的有3%. 试求下列事件的概率:

(1) 只订阅A报;

(2) 只订一种报纸;

(3) 正好订两种报纸;

(4) 至少订阅一种报纸;

(5) 不订阅任一种报纸;