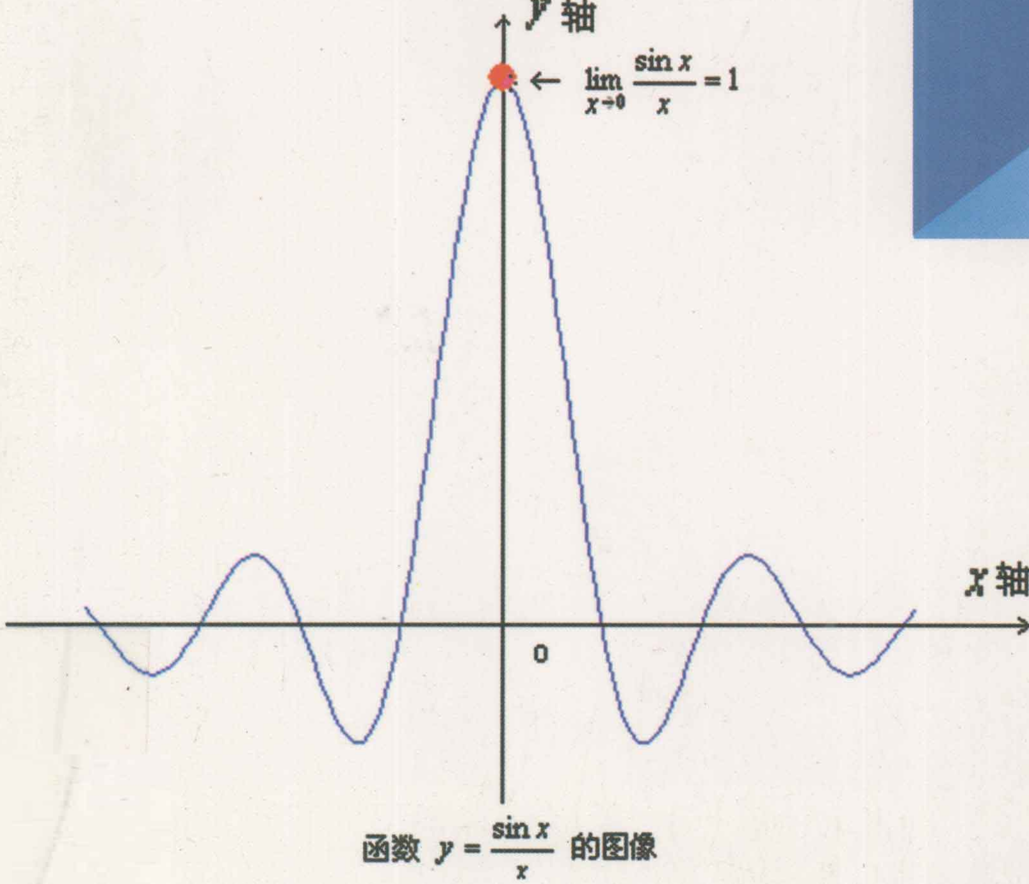
二十一世纪高职高专教育规划教材

21SHIJIGAOZHIGAOZHUANJIAOYUGUIHUAJIAOCAI

高职数学

GaoZhiShuXue

胡晶地 主编



函数 $y = \frac{\sin x}{x}$ 的图像

地质出版社

二十一世纪高职高专教育规划教材
浙江省社会科学界联合会研究课题成果

高职数学

主　编　胡晶地

主　审　李云友

编　委　（按姓氏笔画为序）

王晓华　厉文伟　许小火　李云友
李　聪　吴妙仙　杨立卿　陈贤伟
金天寿　胡晶地　顾江民　乾春涛
谢小兰

地质出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

高职数学/胡晶地主编．—北京：地质出版社，2009.5
ISBN 978-7-116-05931-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．胡…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 202985 号

责任编辑：江　橙
责任校对：谭　英
出版发行：地质出版社
社址邮编：北京海淀区学院路 31 号，100083
咨询电话：（010）82324508（邮购部）；（010）82324583（编辑室）
网　　址：http：//www.gph.com.cn
电子邮箱：zbs@gph.com.cn
传　　真：（010）82310749
印　　刷：保定市西城胶印有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：24.5
字　　数：500 千字
印　　数：1—7000 册
版　　次：2009 年 5 月北京第 1 版・河北第 1 次印刷
定　　价：38.00 元
书　　号：ISBN 978-7-116-05931-3

二十一世纪高职高专教育

规划教材研究与编审委员会

总　序

随着科学技术的飞跃发展及其成果在生产过程中的广泛运用，特别是知识经济的到来，社会对具有一定知识和技术的人才的需求越来越广泛、越来越迫切。美国劳工部曾做过一个统计：从 1950 年到 2000 年的 50 年间，社会对高级专业人员的需求，其比例始终保持在 20%；而对需要一定技术技能的职业岗位需求，则从原来的 20% 提高到了 65%；对不需要技术要求的一般劳动力，则从原来的 60% 下降到 15%。英国政府在 2005 年的一次全国技能调查中也发现，工作中 10 项普通技能标准，有 9 项的要求提高了，包括读写能力、计算能力、技术能力、解决问题、检查、规划以及各种形式的交流，唯一例外的是体力和耐力。高技能人才的缺乏，也已成为我国社会经济发展的一大“瓶颈”。但是，与这种旺盛的需求形成鲜明对照的是，我国高职毕业生却出现所谓“就业难”、“就业形势严峻”等相互矛盾的现象。

导致我国高职高专院校毕业生就业形势严峻的原因是多种多样的，有学生自身素质的原因，也有各地经济环境、就业形势的影响。但从根本上而言，是以往各高职高专院校人才培养的规格与社会的需求不够吻合。这种不吻合主要表现为课程的设置不合理，即专业与社会需求不适应。于是出现许多企业找不到合适的人才，而不少高职毕业生又找不到工作的奇特现象。

为此，高职高专教育未来的发展要坚持以就业为导向，深化教育教学改革，进一步转变办学思想。推动职业院校根据社会产业结构和就业结构的变化，及时调整专业设置和培训项目，加快教学制度改革，实行以学分制为主的弹性学习制度。改革课程体系、教学内容和教学方法，鼓励学校编写本校教材。进一步加强职业教育信息化建设，加快提高职业院校信息技术装备水平，引导职业院校积极开发职业教育资源，提高职业院校运用信息技术的能力，积极开展远程职业教育与培训。

我国的高职院校应该是具有鲜明中国特色的教育类型，培养的应用型、技能型、操作型人才，都应是高级“蓝领”、“灰领”、“银领”。这种教育类型要求我们改变原有的教育模式和教育方法，改变没有相应的专用教材和相应的新型师资的现状。

为了使高职院校的办学有特色，毕业生有专长，需要建立“以就业为导向”的新型人才培养模式。为了达到这样的目标，我们提出“以就业为导向，要从教材差异化开始”的改革思路，打破高职高专院校使用教材的统一性，根据各高职高专院校专业和生源的差异性，因材施教。从高职高专教学最基本的基础课程，到各个专业的专业课程，着重编写出适应高职高专不同规格人才培养的教材，同时根据院校所在地经济条件的不同和学生兴趣的差异，编写出形式活泼，授课方式灵活，引领社会需求的教材。

培养的差异性是高等教育进入大众化教育阶段的客观规律，也是高等教育发展与社会发展相适应的必然结果。也只有使在校学生接受差异性的教育，才能充分调动学生浓厚的学习兴趣，才能保证不同材质的学生，掌握不同的技能专长。只有高等学校培养有差异性，毕业

生才能够有特性和特色，才会在就业市场具有竞争力，才会使高职高专的就业率大幅提高。

中华书局和地质出版社联合出版的这套高职高专教材，是为了适应我国高等教育发展及其对教育改革和教材建设的需要，在教育部“十一五规划教材”所倡导的“创新独特”四字方针的指导下，按照教育部制定的“高等教育基础课程教学基本要求”在全国范围内组织编写完成的。这套教材突出了应用性、针对性和实践性的原则，并重组了系列课程教材结构，力求反映高等教育课程和教学内容体系改革方向；反映当前教学的新内容，突出基础理论知识的应用和实践技能的培养；在兼顾理论和实践内容的同时，避免“全”而“深”的面面俱到。基础理论以应用为目的，以必要、够用为尺度；尽量体现新知识和新方法，以利于学生综合素质的形成和科学思维方式与创新能力的培养。另外，教材本身融入了很多较新的理念，教材内容的设置比较灵活，能有效地提高高职高专院校学生的学习兴趣。

“以就业为导向培养高职高专学生”是目前高职高专院校的发展方向，对此，许多高职高专院校都做出了有益的探索。这套“二十一世纪高职高专教育规划教材”的编写和出版正是对这种探索的积极参与和推动，是很有意义的。因此，我欣然为本套教材作序，并期待这套教材的不断完善和发展。

教育部教育发展研究中心专家咨询委员会副主任

中国高等教育学会副会长

蔡克勇

出版说明

高职高专教育是我国教育体系的重要组成部分，职业教育的发展越来越受到党和国家的重视，温家宝总理在全国职业教育工作会议上指出，大力发展职业教育，是推进我国工业化、现代化的迫切需要，是促进社会就业和解决“三农”问题的重要途径，也是完善现代国民教育体系的必然要求。高职高专教育的根本任务是培养生产、建设、管理和服务第一线需要的德、智、体、美全面发展的高等技术应用型专门人才，所培养的学生在掌握必要的基础理论和专业知识的基础上，应重点掌握从事本专业领域实际工作的基础知识和职业技能，因此与其对应的教材也必须有自己的体系和特点。

为了适应我国高职高专教育发展及其对教育改革和教材建设的需要，在教育部的指导下，我们在全国范围内组织并成立了“二十一世纪高职高专教育规划教材研究与编审委员会”（以下简称“教材研究与编审委员会”）。“教材研究与编审委员会”的成员所在单位皆为教学改革成效较大、办学实力强、办学特色鲜明的高等专科学校、成人高等学校、高等职业学校及高等院校主办的二级职业技术学院，其中一些学校是国家重点建设的示范性职业技术学院。

为了保证规划教材的出版质量，“教材研究与编审委员会”在全国范围内选聘“规划教材编审委员”并征集教材，同时要求“教材编审委员”和规划教材的编著者必须是从事高职高专教学第一线的优秀教师和专家。此外，“教材研究与编审委员会”还组织各专业的专家、教授对所征集的教材进行评选，对所列选教材进行审定。

此次规划教材全部按教育部制定的“高职高专教育基础课程教学基本要求”，按照突出应用性、针对性和实践性的原则编写，并重组系列课程教材结构，力求反映高职高专课程和教学内容体系改革方向，反映当前教学的新内容，突出基础理论知识的应用和实践技能的培养。在兼顾理论和实践内容的同时，避免“全”而“多”的面面俱到。基础理论以应用为目的，以必要、够用为尺度。尽量体现新知识、新工艺、新方法，以利于学生综合素质的形成和科学思维方式与创新能力的培养。

此外，为了使规划教材更具广泛性、科学性、先进性和代表性，我们真心希望全国从事高职高专教育的院校能够积极参加到“教材研究与编审委员会”中来，推荐有特色的、有创新的教材。同时，希望将教学实践的意见和建议，及时反馈给我们，以便对出版的教材不断修订、完善，不断提高教材质量，完善教材体系，为社会奉献更多更新的与高职高专教育配套的高质量教材。

此套教材适应于各类高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及高等院校主办的二级技术学院使用。

二十一世纪高职高专教育规划教材研究与编审委员会

2009 年 5 月

前　　言

为适应新的职业教育人才培养要求，各高职高专院校都加强了专业课程的教学，强化了对学生技能的培养，原来的文化基础课程教学体系面临调整。根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，我们在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来一些高职高专院校在文化基础课程教学改革方面的成功经验，组织编写了这本《高职数学》教材。

该教材力求体现高等职业教育要“以就业为导向”、“以培养技能型人才为目标”、“以理论教学要以应用为目的”、“以必需、够用为原则”的要求，加强基本概念的教学，淡化数学技巧的训练，删去不必要的逻辑推导，突出应用能力的培养，难易程度更加适合现在的生源状况；在充分考虑数学课程的工具功能的前提下，注重发挥其文化功能的作用，既为高职学生学习专业课程服务，又为学生的可持续发展打下良好的基础。本教材具有以下几个方面的特点：

1. 针对性强。教材从高职学生的实际出发，注意高等数学与初等数学的衔接，遵循理论与实际相结合的原则，按照“特殊——一般——特殊”的认识规律，尽可能借助客观实例及几何直观图形来阐述数学基本概念和定理，力求使抽象的数学概念形象化，复杂的论证过程简明化，便于高职学生理解和掌握。

2. 注重数学应用能力培养。为了提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力，在编写过程中，我们加强了数学知识在工程技术及经济管理等方面的应用，增加了有实际应用背景的例题和习题，力图体现高职教育实践性、应用性强的特点。

3. 体现以人为本的教育理念。编写教材时，我们根据教学的基本要求，按照“服务专业，够用为度”的原则确定教材基本内容，在每章篇首都列出了该章学习目标，章末给出内容小结，有的章节适当增加了阅读材料，既为教师提供教学参考，又可方便学生自学。

4. 例题、习题数量充足。在编写过程中，我们列举了大量的典型例题，例题解答思路清晰，过程简明扼要，有利于学生开拓思路；习题题型丰富，难易比例适当，以满足不同层次学生学习的需要。

本书第 1 章由王晓华编写，第 2 章由杨立卿编写，第 3、4 章由李云友编写，第 5 章由顾江民编写，第 6、7、8 章由胡晶地编写，第 9、10 章由李聪编写，第 11 章由乾春涛编写，全书由胡晶地统稿，由李云友主审。在编写过程中，厉文伟、许小火、吴妙仙、陈贤伟、金天寿、谢小兰等同志对全书提出了宝贵的修改意见，并为本书的成稿付出了大量的劳动，在此表示衷心感谢。

本书获得浙江省社会科学界联合会研究课题经费的资助，同时得到浙江广厦建设职业技术学院各级领导的大力支持，在此表示感谢。

限于编者水平，错漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2009 年 5 月

目　　录

第1章　极限与连续

学习目标

了解函数、函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念；左、右极限的概念；无穷小、无穷大的概念；闭区间上连续函数的性质.

理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念；需求函数与供给函数的概念；函数极限的定义；无穷小的性质；函数在一点连续的概念；初等函数的连续性.

掌握复合函数的复合与分解；极限四则运算法则.

会用函数关系描述经济问题；对无穷小进行比较；用两个重要极限求极限；判断间断点的类型；求连续函数和分段函数的极限.

函数是描述事物变化过程中变量相依关系的数学模型，是数学的基本概念之一. 高等数学就是以函数为主要研究对象的一门数学课程. 极限是研究高等数学的一个重要工具. 连续则是函数的一个重要性质，连续函数是高等数学研究的主要对象.

本章在总结中学已有函数知识的基础上，进一步阐述函数的概念，介绍高等数学最基本的概念——极限，进而研究无穷大量与无穷小量的概念和性质、极限的运算法则、函数连续性的基本知识，为后继知识的学习奠定坚实的基础.

1.1　函　数

1.1.1　函数的概念与重要性质

1. 函数的概念

在研究自然的、社会的以及工程技术的某个过程中，经常会遇到各种不同的量. 例如时间、速度、质量、温度、成本和利润等. 这些量一般可以分为两类. 其中一类在所研究的过程中保持不变，这样的量称为常量，而另一类在所研究的过程中是变化的，这样的量称为变量.

在同一过程中，往往会有几个变量同时变化，但是它们的变化不是孤立的，而是按照一定的规律相互联系着，也就是说它们之间存在着相互依赖关系. 例如

例 1.1.1　自由落体的规律为

$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

式中 h 表示下降的距离，t 表示下落的时间，g 表示重力加速度(视为常量).

这个公式给出了在物体自由降落的过程中，距离 h 与时间 t 之间的依赖关系. 而这种变量之间的相互依赖关系，用数学的语言描述出来就得到了函数的定义.

定义 1.1 设 D 为非空实数集. 如果按照某种对应法则(或关系)f,对于任意 $x\in D$,都有唯一的一个实数 y 与之对应,则称 y 是定义在 D 上的 x 的函数,记作 $y=f(x)$.

称 x 为自变量,其变化范围 D 为函数的定义域,通常记作 $D(f)$. 称 y 为因变量或函数,当自变量 x 取遍 D 上每一个值,而相应的 $y=f(x)$ 的变化范围称为函数的值域,通常记作 $R(f)$.

如果 x_0 是一个确定的数,则 $f(x_0)$ 表示自变量 $x=x_0$ 时的函数值,也可记作 $y(x_0)$ 或者 $y|_{x=x_0}$.

例 1.1.2 研究 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$是否为同一函数.

解 $y=x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,而 $y=\dfrac{x^2}{x}$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 因此,虽然这两个函数在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$的值是相同的,但由于它们的定义域不同,因而它们不是同一函数.

例 1.1.3 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{\ln(x-1)}$　　　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin(\dfrac{x}{2}-1)$

解 (1)要使函数 y 有意义,当且仅当 $\ln(x-1)\geqslant 0$,要使 $\ln(x-1)\geqslant 0$,当且仅当 $x-1\geqslant 1$,所以函数的定义域是$[2,+\infty)$.

也可以用集合的一般形式表示为 $D=\{x|x\geqslant 2\}$.

(2)要使函数 y 有意义,必须同时满足:分母不为零,且偶次根式的被开方式非负,反正弦函数符号内的式子绝对值小于或等于 1. 即

$$\begin{cases}3-x^2>0\\ \left|\dfrac{x}{2}-1\right|\leqslant 1\end{cases}\qquad 解得\quad \begin{cases}-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\\ 0\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

故不等式组的解为 $0\leqslant x<\sqrt{3}$.

因此,该函数的定义域为$[0,\sqrt{3})$.

也可以表示为 $D=\{x|0\leqslant x<\sqrt{3}\}$.

例 1.1.4 已知函数 $y=f(x)$的定义域是$[2,5]$,求$f(2x+1)$的定义域.

解 要使函数$f(2x+1)$有意义,当且仅当 $2\leqslant 2x+1\leqslant 5$,所以$\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$,即$f(2x+1)$的定义域为$[\dfrac{1}{2},2]$.

例 1.1.5 设函数$f(x)=x^2-2x+3$,求$f(2)$,$f(a)$,$f(x+1)$.

解 $f(2)=2^2-2\times 2+3=3$,

$f(a)=a^2-2a+3$,

$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)+3=x^2+2$.

由函数的定义可知,对应法则和定义域是函数的两个要素,在描述任何一个函数时,必须同时说明这两个要素. 只有两个函数的对应法则和定义域都相同时我们才能说这两个函数是相同的函数.

函数的定义域,一般是使得函数有意义的自变量的取值范围,为此求函数的定义域时应遵

守以下原则：

(1)代数式中分母不能为零；

(2)偶次根式内被开方数非负；

(3)对数中真数表达式大于零；

(4)反三角函数特殊记，例如 $\arcsin x,\arccos x$，要满足 $|x|\leqslant 1$；

(5)多个函数代数和的定义域，应是各函数定义域的公共部分；

(6)对于表示实际问题的解析式，还应该保证符合实际意义.

2. 函数的一些重要性质

(1)有界性

定义1.2 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在常数 $M>0$，使得对于任意的 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，或者称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数.

例如，$\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数，$\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是有界函数. 但是函数 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界函数. 因此，有界性是针对于某一区间而言的.

(2)单调性

定义1.3 设函数 $f(x)$ 是定义在集合 D 上的函数，如果对于任意的 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上为单调增加函数；当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上为单调减少函数.

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数. 如果 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调函数，则把区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调区间. 例如，函数 $y=x^2$ 的单调增加区间是 $[0,+\infty)$，其单调减少区间是 $(-\infty,0)$.

单调函数的图像特征：单调增加函数的图像表现为自左至右是单调上升的曲线； 单调减少函数的图像表现为自左至右是单调下降的曲线.

(3)奇偶性

定义1.4 设函数 $f(x)$ 是定义在集合 D(D 是关于原点对称的非空集合)上的函数. 如果对于任意的 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；如果对于任意的 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数.

通常见到的偶函数和奇函数它们的定义域是关于原点对称的区间.

例如，$\sin x$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$\cos x$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数.

既不是奇函数也不是偶函数的函数，称为非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

例1.1.6 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$　　(2) $f(x)=x\cdot\sin x$

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$　　(4) $f(x)=4x+\cos x$

解 (1)因为 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2)因为 $f(-x)=-x\cdot(-\sin x)=x\cdot\sin x=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数.

(3)因为 $f(-x)=\ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]$，$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，

$f(-x)+f(x)=\ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1})](x+\sqrt{x^2+1})=0$，即$f(-x)=f(x)$，所以$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

(4)因为$f(-x)=4(-x)+\cos(-x)=-4x+\cos x$，从而

$$f(-x)\neq f(x)\text{且}f(-x)\neq -f(x)$$

所以函数$f(x)=4x+\cos x$既不是奇函数也不是偶函数.

(4)周期性

定义1.5 设函数$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，如果存在一个常数$T\neq 0$，使得对于任意的$x\in(-\infty,+\infty)$，都有$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$是以T为周期的周期函数. 当$f(x)$以T为周期时，对于任意的整数m，mT都是$f(x)$的一个周期. 而我们所说的周期一般是指最小正周期.

例如，$\sin x$、$\cos x$的最小正周期都是2π，$\tan x$、$\cot x$的最小正周期都是π.

关于函数的以上四个性质，需要说明的是：函数的有界性和单调性是函数在某个区间上的性质，而奇偶性和周期性则是函数在整个定义域上的性质.

3. 复合函数

球的体积V是其半径r的函数：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$. 由于热胀冷缩，球的半径又随着温度T变化，假定r随T变化的规律是$r=r_0(1+0.01T)$，其中r_0为常数. 将$r=r_0(1+0.01T)$代入$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，就得到V对T的函数$V=\frac{4}{3}\pi[r_0(1+0.01T)]^3$.

将一个函数代入另一个函数而得到的新函数称为由这两个函数构成的复合函数.

定义1.6 设函数$y=f(u)$，而$u=\varphi(x)$，且函数$\varphi(x)$的值域与函数$f(u)$的定义域交集非空，那么y通过u的联系成为x的函数，记作$y=f[\varphi(x)]$，称其为由$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$构成的复合函数，其中u叫做中间变量.

注意以下几点：

①不是任何两个函数都可以构成复合函数.

②复合函数不仅可以有一个中间变量，也可以有多个中间变量.

③复合函数不仅可以由基本初等函数构成，而更多的是由简单函数(由基本初等函数通过有限次的四则运算得到)构成.

例1.1.7 函数$y=\arcsin u$和$u=2^x-1$能否构成复合函数?

解 $y=\arcsin u$的定义域为$[-1,1]$，$u=2^x-1$的值域为$(-1,+\infty)$，显然$[-1,1]\cap(-1,+\infty)\neq\phi$，所以$y=\arcsin u$和$u=2^x-1$能构成复合函数，且该复合函数为$y=\arcsin(2^x-1)$.

例1.1.8 将下列复合函数分解成基本初等函数或简单函数.

(1)$y=\sin^2(x^2+1)$　　　　(2)$y=\ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$

解 (1)$y=\sin^2(x^2+1)$是由$y=u^2$、$u=\sin v$和$v=x^2+1$复合而成，所以分解得$y=u^2$，$u=\sin v$，$v=x^2+1$.

(2)$y=\ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$是由$y=\ln u$，$u=\tan v$，$v=e^w$和$w=x^2+2\sin x$复合而成，所以分解得$y=\ln u$，$u=\tan v$，$v=e^w$，$w=x^2+2\sin x$.

通常情况下,构成复合函数是由内到外,函数套函数;分解复合函数,是采取由外到内,利用中间变量层层分解.

4. 分段函数

分段函数的特点是,函数的定义域分成几部分,每一部分,函数有不同的表达式.

例 1.1.9 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

符号函数的图形如图 1.1 所示.

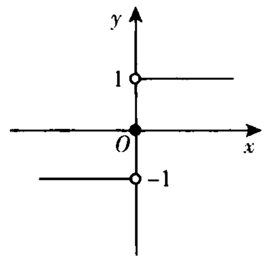


图 1.1

例 1.1.10 汽车在笔直的公路上行驶 10 小时,首先用 1 小时作匀加速运动,使得汽车的速度由零加速到 50km/h,匀速行驶 8 小时后,再用 1 小时做匀减速运动,将速度减至零. 试将汽车行驶的路程表示为时间的函数.

解 设路程函数为 $S(t)$,则

$$S(t)=\begin{cases}25t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 25+50(t-1), & 1<t\leqslant 9\\ 425+50(t-9)-25(t-9)^2, & 9<t\leqslant 10\end{cases}$$

$S(t)$为定义在闭区间$[0,10]$上的分段函数.

5. 经济中的几个常用函数

在用数学方法解决经济当中的实际问题时,往往需要找出经济变量之间的函数关系,建立数学模型.

下面介绍几种常用的经济函数

(Ⅰ)需求函数与供给函数

(1)需求函数

一种商品的市场需求量 Q 与该商品的价格 p 密切相关. 通常降低价格使需求量增加;提高商品价格会使需求量减少. 如果不考虑其他因素的影响,需求量 Q 可以看成是价格 p 的一元函数,称为需求函数,记作

$$Q=Q(p)$$

一般来说,需求函数是价格 p 的单调减少函数.

根据市场的统计资料,常见的需求函数有以下几种类型:

①线性需求函数 $Q=a-bp\quad(a>0,b>0)$

②二次需求函数 $Q=a-bp-cp^2\quad(a>0,b>0,c>0)$

③指数需求函数 $Q=ae^{-bp}\quad(a>0,b>0)$

需求函数 $Q=Q(p)$的反函数,就是价格函数,记作 $P=P(q)$,也反映商品的需求与价格的关系.

(2)供给函数

某种商品的市场供给量 S 也受商品价格 p 的制约,价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品,使供给量增加;反之,价格下跌将使供给量减少. 供给量 S 也可以看成是商品价格 p

的一元函数,称为供给函数,记作

$$S=S(p)$$

供给函数为价格 p 的单调增加函数.

常见的供给函数有线性函数,二次函数,幂函数,指数函数等. 其中,线性供给函数为

$$S=-c+dp \qquad (c>0,d>0)$$

使某种商品的市场需求量与供给量相等的价格 p_0 称为均衡价格. 当市场价格 p 高于平衡价格 p_0 时,供给量将增加而需求量相应的减少,这时产生的“供大于求”的现象必然使价格 p 下降;当市场价格 p 低于均衡价格 p_0 时,供给量将减少而需求量增加,这时会产生“物资短缺”现象,从而又使得价格 p 上升. 市场价格的调节就是这样实现的.

例 1.1.11 当鸡蛋的收购价格为每千克 4.5 元时,某收购站每月能收购 5000kg. 若收购价每千克提高 0.1 元,则收购量可增加 400kg,求鸡蛋的线性供给函数.

解 设鸡蛋的线性供给函数为

$$S=-c+dp \qquad (c>0,d>0)$$

由题意有

$$\begin{cases}5000=-c+4.5d\\5400=-c+4.6d\end{cases}$$

解得 $d=4000, c=13000$,所求供给函数为

$$S=-13000+4000P.$$

例 1.1.12 已知某商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q=14.5-1.5p,\ S=-7.5+4p$$

求该商品的均衡价格 p_0.

解 由供需均衡条件 $Q=S$,可得

$$14.5-1.5p=-7.5+4p$$

因此,均衡价格为 $p_0=4$.

(Ⅱ)总成本函数、收入函数和利润函数

在生产和产品的经营活动中,人们总希望尽可能降低成本,提高收入和利润. 而成本、收入和利润这些经济变量都与产品的产量和销售量 q 密切相关,它们都可以看成是 q 的函数,分别称为总成本函数,记为 $C(q)$;收入函数,记为 $R(q)$;利润函数,记为 $L(q)$.

总成本函数由固定成本 C_1 和可变成本 $C_2(q)$ 两部分组成,固定成本与产量 q 无关,如设备维修费、企业管理费等;可变成本随产量 q 的增加而增加,如原材料费、动力费等. 即

$$C(q)=C_1+C_2(q)$$

总成本函数 $C(q)$ 是 q 的单调增加函数. 最典型的成本函数是三次函数

$$C=a_0+a_1q-a_2q^2+a_3q^3 \quad (a_i>0, i=0,1,2,3)$$

但有时为了使问题简化,也常采用线性成本函数

$$C=a+bq\ (a>0,b>0) \quad 即二次成本函数.$$

只给出总成本不能说明企业生产的好坏,为了评价企业的生产状况,需要计算产品的平均成本,即生产 q 件产品时,单位产品成本平均值,记为$\overline{C}$,则

$$\overline{C}=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_1}{q}+\frac{C_2(q)}{q}$$