高中数学精编

代数

下册

浙江教育出版社

高中数学精编

代 数

下 册

许纪传 钱孝华 丁宗武
江焕棣 陶敏之 谢玉兰

浙 江 教 育 出 版 社

(浙)新登字第 6 号

高 中 数 学 精 编

代　　数

下　册

许纪传　钱孝华　丁宗武
江焕棣　陶敏之　谢玉兰

浙江教育出版社出版　　浙江新华印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
开本787×1092　1/32　印张7.375　字数170000
1993年4月第1版　　1993年4月第1次印刷

ISBN 7-5338-1122-4/G·1123　定　价：2.40 元

目　录

第五章 不 等 式

一 不等式的性质和不等式的证明

【典型题型与解题技巧】

1. 不等式证明的常用方法

(1) 比较法. 比较法主要有差值比较（求差）和商值比较（求商）两种，即

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b \text{ 和 } \begin{cases}\dfrac{a}{b}>1,\\ b>0,\end{cases}\Leftrightarrow a>b>0.$$

例 1 设 $a,b,c\in R$，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$

证明：∵ $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0,$$

∴ $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$

例 2 设 $a,b\in R^+$，且 $a\neq b$，求证：$a^ab^b>a^bb^a$.

证明：由给出的不等式关于 a，b 的对称轮换性，可不妨设 $a>b>0$，于是

$$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}.$$

∵ $0<b<a$，∴ $\dfrac{a}{b}>1$，$a-b>0$，利用指数函数 $y=m^x$

的增减性，得$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，即

$$\frac{a^a b^b}{a^b b^a}>1，而 a^b b^a>0，\therefore\ a^a b^b>a^b b^a.$$

注意 （1）求商法中，分母大于0十分重要，在论证时这个环节必须交代清楚；

（2）本题也可就a，b的大小进行讨论，分别证之.

（2）综合法．较常用的综合法有：

①判别式法．这种方法是先设法构造一个有实数解的一元二次方程，再利用$\Delta\geqslant0$加以证明.

例3 已知实数a，b，c满足$a+b+c=0$和$abc=2$，求证：a，b，c中至少有一个不小于2.

证明：由题设，显然a，b，c中必有一个是正数，不妨设$a>0$，则

$$\begin{cases} b+c=-a, \\ bc=\dfrac{2}{a}. \end{cases}$$

这说明b，c是二次方程$x^2+ax+\frac{2}{a}=0$的两个实数根，

由$\Delta\geqslant0$，得$a^2-\frac{8}{a}\geqslant0$，即$a^3\geqslant8$，

$$\therefore\ a\geqslant2.$$

②利用基本不等式.

设a，b，$c>0$，则有

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

以上不等式自左至右分别称为调和平均值（记作H）、几何平均值（记作G）、算术平均值（记作A）、平方平均值（记作Q），于是可简记为$H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q$.

它们在不等式的证明中有比较广泛的应用.

例 4　设$a,b,c>0$，求证

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}$$

证明：由$H \leqslant A$，有

$$\frac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}}{3} \geqslant \frac{3}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}，即$$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

例 5　若正数a，b满足$a+b=1$，求证$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1} \leqslant 2\sqrt{2}$.

证明：由$A \leqslant Q$，有

$$\frac{\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{(2a+1)+(2b+1)}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2(a+b)+2}{2}}=\sqrt{2},$$

$$\therefore\ \sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1} \leqslant 2\sqrt{2}.$$

（3）分析法．分析法的实质是寻找证题途径的一种思维过程，在分析时要充分注意过程的可逆性.

例 6　已知 $0<\alpha<\pi$，求证：$2\sin 2\alpha\leqslant \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

证明：欲证的不等式即 $4\sin\alpha\cos\alpha\leqslant\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

$\because$　$0<\alpha<\pi$，$\therefore$　$\sin\alpha>0$，$1-\cos\alpha>0$，

故只需证明 $4\cos\alpha(1-\cos\alpha)\leqslant 1$.

$$\because\quad 4\cos\alpha(1-\cos\alpha)-1=-(4\cos^2\alpha-4\cos\alpha+1)$$

$$=-(2\cos\alpha-1)^2\leqslant 0,$$

$\therefore$　$4\cos\alpha(1-\cos\alpha)\leqslant 1$，故原不等式成立.

注意　分析法适用于有一定难度的证明题. 由于分析法的过程不易写好，因此我们主张此法宜"慎用".

(4) 换元法.

①三角换元. 较常用的三角换元有：

若 $0\leqslant x\leqslant 1$，则可令 $x=\sin\alpha\left(0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$或

$$x=\sin^2\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right);$$

若 $x^2+y^2=1$，则可令 $x=\cos\alpha$，$y=\sin\alpha\ (0\leqslant\alpha<2\pi)$；

若 $x^2-y^2=1$，则可令 $x=\sec\alpha$，$y=\operatorname{tg}\alpha\ (0\leqslant\alpha<2\pi)$；

若 $x\geqslant 1$，则可令 $x=\sec\alpha\ \left(0\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$；

若 $x\in R$，则可令 $x=\operatorname{tg}\alpha\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

例 7　已知 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$n\geqslant 2$，$n\in N$，求证

$$(1-x)^n+(1+x)^n\leqslant 2^n.$$

证明：由题意，令 $x=\cos\alpha\ (0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，则

$$1-x=2\sin^2\frac{\alpha}{2},\ 1+x=2\cos^2\frac{\alpha}{2},\text{于是},$$

$$
\begin{aligned}
(1-x)^n+(1+x)^n&=2^n\left(\sin^{2n}\frac{\alpha}{2}+\cos^{2n}\frac{\alpha}{2}\right)\\
&\leqslant 2^n\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\\
&=2^n.
\end{aligned}
$$

②均值换元.

例 8 已知 $x+y+z=a$，求证 $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{a^2}{3}$.

证明：设 $x=\frac{a}{3}+\alpha$，$y=\frac{a}{3}+\beta$，$z=\frac{a}{3}+\gamma$，其中

$\alpha+\beta+\gamma=0$，则

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2&=\frac{a^2}{3}+\frac{2}{3}a(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\\
&=\frac{a^2}{3}+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geqslant\frac{a^2}{3}.
\end{aligned}
$$

③设差换元.

例 9 已知 $a,b,c\in R^+$，求证 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，(当且仅当 $a=b=c$ 时取等号).

证明：根据给出式子的对称轮换性，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，令 $a=b+x$，$c=b-y$. 其中 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$.则

$$
\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
&=(b+x)^3+b^3+(b-y)^3-3b(b+x)(b-y)\\
&=(x^2+xy+y^2)(3b+x-y)\\
&=(x^2+xy+y^2)(a+b+c),
\end{aligned}
$$

$\because\ a+b+c>0$，

而 $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geqslant 0$，

故 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，当且仅当 $x=y=0$，即 $a=b=c$ 时

取等号.

(5) 构造法.

①构造函数.

例10 设 $a,b,c\in R^{+}$，且 $a+b>c$，求证：

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>\frac{c}{1+c}.$$

证明：设函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}\quad(x\in R^{+})$，

任取 x_1，$x_2\in R^{+}$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)+(1+x_2)}<0,$$

$\therefore\ f(x)$ 在 R^{+} 上单调递增，

$\because\ a+b>c$，$\therefore\ f(a+b)>f(c)$，即

$$\frac{a+b}{1+a+b}>\frac{c}{1+c},\text{ 而}$$

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}$$

$$=\frac{a+b}{1+a+b},$$

$$\therefore\ \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>\frac{c}{1+c}.$$

②构造几何图形.

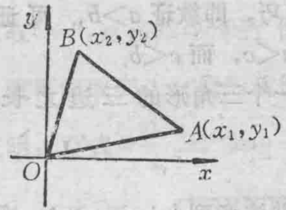
例11 求证：$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

$$\geqslant\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

略证 如图1，设点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

$\because\ |OA|+|OB|\geqslant|AB|$，

利用两点间的距离公式，即得欲证.



（图 1 ）

显然，当A，O，B三点共线且A，B在原点的异侧时，取“=”．

(6) 数学归纳法（见第六章）．

(7) 反证法．

前述几种方法均属直接证法，当直接证明命题有困难时，或者当命题以“否定”的形式给出时，可以考虑用反证法．

例12 设$0<a,b,c<1$，求证：$(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$不可能同时大于$\frac{1}{4}$．

证明：设$(1-a)b>\frac{1}{4}$，$(1-b)c>\frac{1}{4}$，$(1-c)a>\frac{1}{4}$，则

三式相乘得$abc(1-a)(1-b)(1-c)>\frac{1}{64}$． ①

但 $0<(1-a)a\leqslant\left[\frac{(1-a)+a}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$，

$0<(1-b)b\leqslant\frac{1}{4}$，$0<(1-c)c\leqslant\frac{1}{4}$，

三式相乘又得$abc(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant\frac{1}{64}$． ②

①与②矛盾，故结论成立．

注意 此例若利用公式$a_1a_2\cdots a_6\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_6}{6}\right)^6$，可直接获得$abc(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$．

2． 不等式证明的常用技巧．

(1) 放缩．所谓放缩的技巧，即欲证 $a>b$，可证 $a>c$，而 $c>b$．或欲证 $a<b$，可证 $a<c$，而 $c<b$．

例13　已知 a，b，c 分别是一个三角形的三边之长，求证：$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}<2$．

证明：不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，并注意到 $b+c>a>0$，便得

$$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\leqslant\frac{c}{b+c}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{b+c}$$

$$=1+\frac{a}{b+c}<2.$$

(2)拆项．所谓拆项，即把一项拆为两项（或若干项），以便达到逐项相消的目的．

例14　求证：$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}<1$ $(n\in N)$．

证明：左式 $=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}<1.$$

(3)“凑”（凑式或凑数）．

例15　求证：$\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\geqslant\frac{17}{4}$．

分析：左式 $=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\frac{4}{\sin^2 2\alpha}$，倘利用不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，应有左式 $\geqslant2$，但需当 $\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha=\frac{4}{\sin^2 2\alpha}$，即 $\sin^4 2\alpha$

$=16$时取“$=$”，这显然不可能. 但如果把$\frac{4}{\sin^2 2\alpha}$换成$\frac{1}{4\sin^2 2\alpha}$，“$=$”就可能取到，这就为我们找到了“凑式”的思路.

证明：左式$=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\frac{1}{4\sin^2 2\alpha}+\frac{15}{4\sin^2 2\alpha}$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\cdot\frac{1}{4\sin^2 2\alpha}}+\frac{15}{4\sin^2 2\alpha}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}+\frac{15}{4}=\frac{17}{4}.$$

当$\begin{cases}\sin^2 2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2 2\alpha}\\ \sin^2 2\alpha=1\end{cases}$时，即$\sin 2\alpha=\pm 1$时取到“$=$”.

注意 本例也可用构造函数法求解. 即令$y=\frac{t}{4}+\frac{4}{t}$，然后证明$y$在$0<t\leqslant 1$上是减函数.

(4) 逆代.

例16 已知正数a，b，c满足$a+b+c=1$，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9.$$

证明：$\because$ a，b，$c>0$，且$a+b+c=1$.

$$\therefore\quad\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9.$$

3. 不等式求最值

例17 已知a，b是给定的正数，求$\frac{a^2}{\sin^2\alpha}+\frac{b^2}{\cos^2\alpha}$的最小值.

错解：不妨设α为锐角，则

$$\frac{a^2}{\sin^2\alpha}+\frac{b^2}{\cos^2\alpha}\geqslant\frac{2ab}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{4ab}{\sin 2\alpha}\geqslant 4ab.$$

分析：证明中两次用到了“$\geqslant$”，如欲取“$=$”，需 $\begin{cases}\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\cos\alpha}\\ \sin 2\alpha=1\end{cases}$，$\therefore\alpha=45°$，即需$a=b$. 但题中没有$a=b$的条件，因此当$a\neq b$时，最小值$4ab$不能取到.

解法一：原式$=a^2\csc^2\alpha+b^2\sec^2\alpha$

$$=a^2+b^2+a^2\operatorname{ctg}^2\alpha+b^2\operatorname{tg}^2\alpha$$
$$\geqslant a^2+b^2+2\sqrt{a^2\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot b^2\operatorname{tg}^2\alpha}$$
$$=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2.$$

当$a^2\operatorname{ctg}^2\alpha=b^2\operatorname{tg}^2\alpha$，即$\operatorname{tg}\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{a}{b}}$时取到最小值.

解法二：原式$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\left(\dfrac{a^2}{\sin^2\alpha}+\dfrac{b^2}{\cos^2\alpha}\right)$

$$=a^2+b^2+a^2\operatorname{ctg}^2\alpha+b^2\operatorname{tg}^2\alpha\geqslant\cdots.$$

注意　用不等式求函数的最值时，

(1) 必须检查“$=$”能否取到；

(2) 如果多次用到了“$\geqslant$”或“$\leqslant$”必须检查取“$=$”的多个条件是否一致.

例18　已知正数a，b满足$a^2b=16$，求$2a+b$的最小值.

错解：$\because\ 2a+b\geqslant 2\sqrt{2ab}$，$\therefore$ 当$2a=b$ ($a=2$，$b=4$) 时，$2a+b$有最小值8.

分析：由不等式$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$ (x，$y>0$) 求最值时，当xy是常数K时，$x+y$有最小值$2\sqrt{K}$；当$x+y$是常数M时，xy有最大值$\dfrac{M^2}{4}$.

在这里，最重要的条件是常数：xy 是常数，或者 $x+y$ 是常数. 而上面的解法中，$2ab$ 并不是常数.

解：$\because\ 2a+b=a+a+b\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b}=3\sqrt[3]{16}=6\sqrt[3]{2}$，

$\therefore$ 当 $a=a=b$，即 $a=b=2\sqrt[3]{2}$ 时，$2a+b$ 有 最小值 $6\sqrt[3]{2}$.

例19　只有一个底面的圆柱形器皿的表面积是定值 S，求它的体积的最大值.

解：设底面半径、高分别为 R 和 h，由题意，得

$$\pi R^2+2\pi Rh=S,\qquad \therefore\ h=\frac{S-\pi R^2}{2\pi R},$$

$$V=\pi R^2h=\pi R^2\cdot\frac{S-\pi R^2}{2\pi R}=\frac{R(S-\pi R^2)}{2},$$

$$V^2=\frac{R^2(S-\pi R^2)^2}{4}=\frac{2\pi R^2(S-\pi R^2)(S-\pi R^2)}{8\pi}$$

$$\leqslant\frac{1}{8\pi}\left[\frac{2\pi R^2+(S-\pi R^2)+(S-\pi R^2)}{3}\right]^3$$

$$=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{2S}{3}\right)^3=\frac{S^3}{27\pi},$$

于是　$V\leqslant\dfrac{S\sqrt{S}}{3\sqrt{3\pi}}$.

$\therefore$ 当 $2\pi R^2=S-\pi R^2$，即 $R=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$，$h=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ 时，体积的最大值为 $\dfrac{S\sqrt{S}}{3\sqrt{3\pi}}$.

注意　(1) 若一个函数的最值不易求得时，可考虑它的平方式；

(2) 从例18，例19可以看出，若用基本不等式求最值，要设法凑出一个常数；

要求若干个正数和的最小值，就要凑出若干个数的积是常数；

要求若干个正数积的最大值，就要凑出若干个数的和是常数.

【训练题】

(A)

1．已知$a>b>0$，则下列式各中成立的是(　　)

(A) $\frac{2a+b}{a+2b}=\frac{a}{b}$.　　(B) $\frac{2a+b}{a+2b}>\frac{a}{b}$.

(C) $\frac{2a+b}{a+2b}=\frac{b}{a}$.　　(D) $\frac{2a+b}{a+2b}<\frac{a}{b}$.

2．已知$m<n<0$，则有(　　)

(A) $m^2<mn<0$.　　(B) $m^2>mn>n^2$.

(C) $m^2<n^2<0$.　　(D) $n^2>m^2>0$

3．若a，b，c，d均为实数，且$ab>0$，$-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$，则下列各式中，恒成立的是(　　)

(A) $bc<ad$.　　(B) $bc>ad$.

(C) $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.　　(D) $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

4．已知$p<0$，$-1<q<0$，则p，pq，pq^2间的大小关系是(　　)

(A) $p>pq>pq^2$.　　(B) $pq^2>pq>p$.

(C) $pq>p>pq^2$.　　(D) $pq>pq^2>p$.

5．若角α，β满足$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，则$2\alpha-\beta$的取值范围

是(　　)

(A) $-\pi<2\alpha-\beta<0$.　　(B) $-\pi<2\alpha-\beta<\pi$.

(C) $-\frac{3}{2}\pi<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.　　(D) $0<2\alpha-\beta<\pi$.

6. 设 $x>y>0$，则下列各式中正确的是(　　)

(A) $x>\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}>y$.

(B) $y>\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}>x$.

(C) $x>\frac{x+y}{2}>y>\sqrt{xy}$.

(D) $y>\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}>x$.

7. 若 a, b, c 都大于1，且 $\log_a c\cdot\log_b c=4$，则下列各式中一定正确的是(　　)

(A) $ac\geqslant b$.　(B) $ab\geqslant c$.　(C) $bc\geqslant a$.　(D) $ab\leqslant c$.

8. 若 $0<x<1, 0<y<1$，则在"$x^2+y^2, x+y, 2xy, 2\sqrt{xy}$"中，最大的一个是(　　)

(A) $2xy$. (B) $x+y$. (2) $2\sqrt{xy}$　(D) x^2+y^2.

9. 若 a，b 为非零实数，则在"① $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab$，② $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，③ $\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{ab}{a+b}$，④ $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$"中，恒成立的个数是(　　)

(A) 4.　(B) 3.　(C) 2.　(D) 1.

10. 已知 a, $b\in R$，且 $a\neq b$，$a+b=2$，则 1，ab，$\frac{a^2+b^2}{2}$ 的大小关系是(　　)