



Math

21 世纪数学教育信息化精品教材



大学数学立体化教材

# 高等数学 上册

(理工类 · 第四版)

◎ 吴赣昌 主编

 中国人民大学出版社



Math

21 世纪数学教育信息化精品教材



大学数学立体化教材

# 高等数学 上册

## (理工类 · 第四版)

◎ 吴赣昌 主编

中国人民大学出

· 北京 ·

### 图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学. 理工类. 上册/吴赣昌主编. —4 版. —北京: 中国人民大学出版社, 2011. 6

21 世纪数学教育信息化精品教材 大学数学立体化教材  
ISBN 978-7-300-13970-8

I. ①高… II. ①吴… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 123870 号

21 世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

高等数学 (理工类) 上册

第四版

吴赣昌 主编

Gaodeng Shuxue

---

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)	010-62511398 (质管部)	
	010-82501766 (邮购部)	010-62514148 (门市部)	
	010-62515195 (发行公司)	010-62515275 (盗版举报)	
网 址	<a href="http://www.crup.com.cn">http://www.crup.com.cn</a> <a href="http://www.ttrnet.com">http://www.ttrnet.com</a> (人大教研网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京宏伟双华印刷有限公司	版 次	2006 年 4 月第 1 版 2011 年 8 月第 4 版
规 格	170 mm×228 mm 16 开本	印 次	2011 年 8 月第 1 次印刷
印 张	26.5 插页 1	定 价	42.80 元(配网络学习空间)
字 数	590 000		

---

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

## — 内容简介 —

本书根据高等院校理工类本科专业高等数学课程的最新教学大纲及考研大纲编写而成，并在第三版的基础上进行了修订和完善，注重数学概念的实际背景与几何直观的引入，强调数学建模的思想和方法，紧密联系实际，服务专业课程，精选了许多实际应用案例并配备了相应的应用习题，增补并调整了部分例题与习题，书中还融入了数学历史与数学建模的教育。

本次升级改版的另一重大特色是：每本教材均配有网络账号，通过它可登录作者团队为用户专门设立的网络学习空间，与来自全国的良师益友进行在线交流与讨论。该空间设置了课程论坛、学习问答、学习软件、教学视频、名师导学、教学博客、科学搜索等功能栏目，并全面支持文字、公式与图形的在线编辑、修改与搜索。

本书共分上、下两册，本册包括函数与极限、一元微分学、一元积分学、微分方程等知识。

本书可作为高等院校理科、工科和技术学科等非数学类本科专业的高等数学教材，并可作为上述各专业领域读者的教学参考书。

# 前 言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段。对于大学非数学专业的学生而言，大学数学的教育，其意义不仅仅是学习一种专业的工具而已。中外大量的教育实践事实充分显示了：优秀的数学教育，是一种人的理性的思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在的能动性与创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的。

随着我国高等教育自 1999 年开始迅速扩大招生规模，至 2009 年的短短十年间，我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡，走完了其它国家需要三五十年甚至更长时间才能走完的道路。教育规模的迅速扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战，如大众化教育阶段入学群体的多样化问题、学生规模扩张带来的大班和多班教学问题、由于院校合并导致的“一校多区”及由此产生的教学管理不科学以及师生间交流缺乏等问题，这些都是过去“精英教育”阶段没有遇到的。

进入大众化教育阶段，大学数学的教育问题首当其冲受到影响。过去大学数学教育是面向少数精英的教育，由于学科的特点，数学教育呈现几十年、甚至上百年一贯制，仍处于经典状态。当前大学数学课程的教学效果不尽如人意，概括起来主要表现在以下两方面：一是教材建设仍然停留在传统模式上，未能适应新的社会需求。传统的大学数学教材过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与其它课程及学生自身专业的衔接，进而造成了学生“学不会，用不了”的尴尬局面；二是计算机技术迅猛发展的今天，信息化技术本应给数学教育提供空前广阔的天地，但遗憾的是，在数学教育领域，信息化技术的使用远没有在其它领域活跃。正如我国著名数学家张景中院士所指出的，计算机进入数学教育在国内还只是刚刚起步，究其原因有两方面：一是没有充分考虑把信息化技术和数学教学的学科特点结合起来；二是在强调教育技术的同时没有充分发挥教师的作用，这样就难以把信息化技术和数学教学完美结合起来。

关于大学数学教育改革的出路问题,在此,我们引用教育部数学基础课程教学指导分委员会前主任、清华大学数学系冯克勤教授专门撰文所指出的一句话:“数学教育的关键是彻底转变观念。”当前大学数学教学所面临的问题,实际上已经指出了大学数学教育改革的目标:一是深化教学内容和教材体系的改革;二是积极推进大学数学教育信息化建设。

自2000年初起,我们成立了一个由专家、教师与软件技术人员组成的研发团队,围绕上述改革目标进行攻关,2002年推出了第一个“高等数学多媒体教学系统”;2005年由中国人民大学出版社出版了12套面向普通本科院校理工类与经管类专业使用的“大学数学立体化教材”及其配套的多媒体教学系统;2007年对其修订后出版了第二版,并同时出版了面向高职高专院校和文科类专业的立体化教材及其配套的多媒体教学系统,初步完成了大学数学试题库系统与大学数学精品课程网站等信息化配套建设工作;2009年对上述教材完成了进一步的升级改版工作,并同时出版了农林类与医药类的教材,鉴于教材的立体化与信息化配套建设显著加强,为更加突出教材的特色和内涵,我们将上述系列教材统一冠名为“21世纪数学教育信息化精品教材”。令人感到欣慰的是,上述教材及其信息化建设成果已被国内数百所高等院校广泛采用,并对当前大学数学的教育改革起到了积极的推动作用。

2009年以来,作者团队彻底突破了制约当前教育信息化建设的技術瓶颈——基于Web的公式与图形的在线编辑、复制、粘贴、修改、搜索与识别问题。这一核心技术的突破使我们的各项信息化建设有了质变的跨越,集成了网页公式编辑系统(Web-FormulaEdit)与网页图形编辑系统(Web-GraphEdit)的在线答疑平台、在线测试平台、课程论坛平台、师生互动平台以及集成性的网络学习平台陆续完成并投入使用。将这些最新研究与建设的成果及时融入上述系列教材的建设是此次升级改版的动因。

2011年,“21世纪数学教育信息化精品教材”升级改版后,共计27套各专业类别的大学数学教材,版本分别有:面向普通本科院校的“理工类·第四版”、“经管类·第四版”、“文科类·第三版”、“农林类·第二版”、“医药类·第二版”;面向三本院校或少学时类的“理工类·简明版·第四版”、“经管类·简明版·第四版”;面向高职高专院校的“理工类·第三版”、“经管类·第三版”、“综合类·第二版”。

本次升级改版后的“21世纪数学教育信息化精品教材”具有以下特点:

#### 一、在教学内容建设方面:

1. 为让读者对经典数学概念在现代科学研究中的应用有更深刻的理解和更高的视角,我们做了深入的研究和建设工。例如,从微分的几何意义出发,引入了

函数在某点的“线性化”定义，从定积分的微元法出发，进一步引入有限单元化的思想，而有限单元化和线性化是用数学解决复杂应用问题的基本思想方法。不同课程教材的内容建设前后呼应，比如，在《线性代数（理工类·第四版）》第3章的引言中就进一步介绍了如何利用有限单元化和线性化方法来解决复杂应用问题，等等。

2. 对部分章节引言做了改进。例如，对数列极限的概念，先从其描述性定义引入，然后以定量分析的观点进一步给出数列极限的严格定义，这样的安排既符合数学发展的本源，又利于学生更好地理解极限的概念。更多参考包括数学建模——函数关系建立、函数连续性、数学建模——最优化、矩阵、线性方程组等章节的引言，这些引言对于学生理解即将学习的数学内容的实质能起到重要的作用。

3. 紧密联系实际，服务专业课程，精选了不少只涉及基本数学知识、能体现数学建模精神、能吸引学生且学生以后又可能接触到的应用范例和数学建模问题，如函数模型的建立及其应用，作为变化率的导数在几何学、物理学、经济学和医药学中的应用，最优化方法及其在工程、经济、农业、医药领域中的应用，逻辑斯蒂模型及其在人口预测、新产品的推广模型与经济增长预测方面的应用，网络流模型及其应用，人口迁移模型及其应用，常用概率模型及其应用，等等，并为所有应用范例配备了相应的应用习题。这些实际应用范例既为学生理解数学的抽象概念提供了认识基础，也有助于加强与后续专业课程的联系。

4. 习题调整方面，除前面提到的补充了不少应用习题外，还在难度梯度上对习题进行了调整，尤其是增补了部分计算比较简单又利于加强概念理解的习题，并重新校订了全部习题及其答案。

5. 值得一提的还有，在《高等数学》与《微积分》中插入了历史上对数学（尤其是近代数学）有杰出贡献的八位伟大数学家的简介，从他们的身上既能管窥近代数学发展的基本过程，又能领略数学家坚韧不拔地追求真理的人格魅力和科学精神。

二、每本教材均配有网络账号，通过它可登录作者团队为用户专门设立的网络学习空间，与来自全国的良师益友在线交流与讨论学习中遇到的问题。网络学习空间设置了课程论坛、学习问答、软件下载、教学视频、名师导学、教学博客、科学搜索等栏目。该学习空间由于集成了数苑网页公式编辑系统与网页图形编辑系统，支持公式与图形的在线编辑、复制、粘贴、修改、搜索与识别，从而全面支持专业学科内容的网络交流与互动。

三、为每位教材用户提供配套的集成性、交互式多媒体学习软件，其中设计了多媒体教案、习题详解、综合训练、实验教学等功能模块。在多媒体教案模块中，我们按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画，直击数学思想本质，利于突破学习中的重点和难点，同时可以大大减少课堂教学中的笔记工作量；在习题详解模块



中,我们以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法,利于读者课后学习;在综合训练模块中,我们总结了每章的教学知识点,并通过精选的总习题进一步揭示解题的一般规律和技巧,利于读者综合提高;在系统的交互与集成方面,我们利用多媒体开发软件的网页特性,为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互与导航,利于读者高效率地学习。

四、为所有教师用户提供配套的集成性、交互式与信息资源立体化的多媒体教学系统,该系统同时兼容了Flash和PPT两类课件,兼顾了共享动画演示和个性化修改功能。内容模块中包括了多媒体教案、备课系统、习题解答、综合训练、实验教学与实验案例库等;系统功能中包括了长期开发积累的满足专业教学需求的多媒体教学动画演示功能、供教师在教学过程中进行手写板书的手写笔功能、供教师在教学过程中进行知识点交互和数学家介绍的系统导航功能等。如能配合遥控器与手写板等外接小型设备,则既可以充分发挥信息化集成与交互教学的优势,也能够很好地融入板书教学等个性化特色。

五、配套建设了技术领先、功能实用且管理维护方便的大学数学网络学习平台,它包含自主建设、课程问答、师生互动与在线测试等模块。此外,作者团队还建设了在线答疑平台MathQ、试题库系统平台、课程论坛平台、教学博客平台等一系列软件平台,它们均集成了数苑网页公式编辑系统与网页图形编辑系统,支持课程教学内容的网络交流与互动。

六、在教学资源建设、共享与服务方面,以作者为核心的“数苑团队”倾力建设了面向全国广大师生服务的教育门户网站——“数苑网”(www.math168.com),旨在为广大师生提供数学教育资讯、网络教学资源、网络教学平台以及教学支持服务,打造移动学习、全民学习与终生学习的共享教育平台。

## 致学生

在你进入高校即将学习的所有大学课程中,就巩固你的学习基础、提升你的学习能力、培养你的科学素质和创新能力而言,大学数学是最有用且最值得你努力的课程。事实上,像《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》这些大学数学基础课程,无论怎样评价其重要性都不为过,而学好这些大学数学基础课程,你将受益终生。

主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变,这一点在大学数学的学习中尤为重要,不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了,事实上,你需要在课后花更多的时间主动去做相关训练才能真正掌握所学知识。

在大学数学的学习过程中,概念和计算同等重要。只有反复、认真地阅读教材,你才能真正掌握大学数学的基本概念。每个章节的习题中都安排了简单的计算



题，目的是帮助你检查对基本算法的理解，在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，便于发现哪些知识自己还没有真正理解。在今后的工作中，你当然可以使用计算机来完成这些计算，但你必须学会选择算法，理解计算结果的意义并且向他人解释清楚。

从某种意义上说，大学数学就是一门语言——科学的语言。你必须像对待外语一样，每天都学习它。为了真正理解教材中某一部分的内容，你往往需要完全掌握前面章节的内容和习题。跟上课程的进度可以节省很多时间并且避免很多麻烦。

经常登录作者团队倾力为你配套建设的网络学习空间，你将会获得意想不到的收获。在那里，你可以进一步拓展自己的学习空间，寻找到更多教材之外的学习资源，并与全国的良好师友建立联系。

### 致教师

我们开发的“21世纪数学教育信息化精品教材”是名副其实的信息化精品系列教材，因为在纸质教材之外，我们从教、学、考三方面为它定制了一系列配套的信息化建设，包括教学课件、备课系统、网络学习空间、网络学习平台、试题库系统、在线考试平台与在线答疑平台等。如果您和您的学生正在使用或准备使用本系列教材，请通过下面的邮箱与我们联系以取得相应的教学支持。

此外，欢迎尽早加入我们在“数苑网”建设的面向全国同行提供交流与服务的“教师空间”。该空间将为广大教师提供教学软件下载、教学资源下载、教学研究交流以及教学研究合作等服务。教师空间以实名制方式注册，有意愿加入的教师只需将单位、姓名与注册邮箱发送到下面的邮箱，我们便会尽快给您发送登录账户信息。教师空间的登录账号是教师专用的6位数字，它也是您登录我们开发的新一代即时通讯软件 MathQ 的账号。

MathQ 是我们开发的主要面向教育学习群体、学术研究群体与工程技术人员的新一代即时通讯软件。与同类即时通讯软件相比，该软件最大的特色是它集成了网页公式编辑系统 (Web-FormulaEdit) 与网页图形编辑系统 (Web-GraphEdit)，从而使其能全面支持人们基于文字、公式、图形、语音和视频等多种媒体进行各学科专业知识的在线交流。

经常登录作者团队倾力建设的教师空间，您将会获得意想不到的收获。在那里，您可以进一步拓展自己的教学交流空间，获得更多的教学资源，并与全国的良好师友建立联系。

### 结束语

正如美国《托马斯微积分》的作者 G. B. 托马斯 (G. B. Thomas) 教授精辟指

出的，“一套教材不能构成一门课；教师和学生在一起才能构成一门课”，教材只是支持这门课程的信息资源。教材是死的，课程是活的。课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体，只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，并充分发挥教师的核心指导作用，才能使之成为富有成效的课程。而本系列教材及其配套的信息化建设将为教学双方提供支持其课程的充分的信息资源，帮助教师在教学过程中发挥其才华，并利于学生富有成效地学习。

与传统的教材不同的是，有一支实力雄厚、专业专职的作者团队——数苑团队在为本系列教材的使用者提供长期的、日常的教学服务与技术支持。如果在使用本系列教材及其配套的信息化建设过程中遇到任何问题，你可以通过下面的邮箱随时与我们联系：[math168@vip.188.com](mailto:math168@vip.188.com)。

**编者**

2011年6月28日

# 目 录

绪言	1
<b>第1章 函数、极限与连续</b>	
§ 1.1 函数	6
§ 1.2 初等函数	19
§ 1.3 数列的极限	30
§ 1.4 函数的极限	36
§ 1.5 无穷小与无穷大	43
§ 1.6 极限运算法则	48
§ 1.7 极限存在准则 两个重要极限	53
§ 1.8 无穷小的比较	59
§ 1.9 函数的连续与间断	62
§ 1.10 连续函数的运算与性质	69
总习题一	76
数学家简介 [1]	78
<b>第2章 导数与微分</b>	
§ 2.1 导数概念	81
§ 2.2 函数的求导法则	89
§ 2.3 高阶导数	99
§ 2.4 隐函数的导数	105
§ 2.5 函数的微分	114
总习题二	124
数学家简介 [2]	128
<b>第3章 中值定理与导数的应用</b>	
§ 3.1 中值定理	130
§ 3.2 洛必达法则	137
§ 3.3 泰勒公式	143
§ 3.4 函数的单调性、凹凸性与极值	149
§ 3.5 数学建模——最优化	160
§ 3.6 函数图形的描绘	168
§ 3.7 曲率	173
总习题三	180
数学家简介 [3]	183

**第4章 不定积分**

§ 4.1 不定积分的概念与性质	184
§ 4.2 换元积分法	191
§ 4.3 分部积分法	199
§ 4.4 有理函数的积分	203
总习题四	212
数学家简介[4]	214

**第5章 定积分**

§ 5.1 定积分概念	216
§ 5.2 定积分的性质	223
§ 5.3 微积分基本公式	228
§ 5.4 定积分的换元积分法和分部积分法	235
§ 5.5 广义积分	243
§ 5.6 广义积分审敛法	247
总习题五	253
数学家简介[5]	256

**第6章 定积分的应用**

§ 6.1 定积分的微元法	259
§ 6.2 平面图形的面积	261
§ 6.3 体积	265
§ 6.4 平面曲线的弧长	269
§ 6.5 功、水压力和引力	273
总习题六	278

**第7章 微分方程**

§ 7.1 微分方程的基本概念	281
§ 7.2 可分离变量的微分方程	286
§ 7.3 一阶线性微分方程	295
§ 7.4 可降阶的二阶微分方程	302
§ 7.5 二阶线性微分方程解的结构	305
§ 7.6 二阶常系数齐次线性微分方程	313
§ 7.7 二阶常系数非齐次线性微分方程	317
§ 7.8 欧拉方程	323
§ 7.9 常系数线性微分方程组	324
§ 7.10 数学建模——微分方程的应用举例	327
总习题七	337

**附录 I 大学数学实验指导**

前言	340
Mathematica 入门	341
项目一 一元函数微分学	346
实验1 一元函数的图形(基础实验)	346
实验2 极限与连续(基础实验)	350
实验3 导数(基础实验)	354
实验4 导数的应用(基础实验)	358
实验5 抛射体的运动(综合实验)	363
项目二 一元函数积分学与微分方程	364
实验1 一元函数积分学(基础实验)	364
实验2 微分方程(基础实验)	370
实验3 抛射体的运动(续)(综合实验)	375
实验4 蹦极跳运动(综合实验)	377

**附录 II 预备知识与常用曲线**

附录 II-1 预备知识	380
附录 II-2 常用曲线	383

**附录 III 利用 Excel 软件做线性回归** 387**习题答案**

第1章 答案	389
第2章 答案	392
第3章 答案	396
第4章 答案	399
第5章 答案	404
第6章 答案	407
第7章 答案	408

# 绪 言

考虑到数学有无穷多的主题内容，数学，甚至是现代数学也是处于婴儿时期的一门科学。如果文明继续发展，那么在今后两千年，人类思维中压倒一切的新特点就是数学悟性要占统治地位。

—— A.N. 怀特海

## 一、为什么学数学

大学数学(包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计)是高等院校理工类、经管类、农林类与医药类等各专业的公共基础课程。如今，即使以往一般不学数学的纯文科类专业也普遍开设了大学数学课程。为什么现在对它的学习受到如此大的重视呢？具体来说，大致有以下两方面的原因：

首先是因为当代数学及其应用的发展。进入20世纪以后，数学向更加抽象的方向发展，各个学科更加系统化和结构化，数学的各个分支学科之间交叉渗透，彼此的界限已经逐渐模糊。时至今日，数学学科的所有分支都或多或少地联系在一起，形成了一个复杂的、相互关联的网络。纯粹数学和应用数学一度存在的分歧在更高的层面上趋于缓和，并走向协调发展。总而言之，数学科学日益走向综合，现在已经形成了一个包含上百个分支学科、各学科相互交融渗透的庞大的科学体系，这充分显示了数学科学的统一性。

数学与其它学科之间的交叉、渗透与相互作用，既使得数学领域在深度和广度上进一步扩大，又促进众多新兴的交叉学科与边缘学科的蓬勃发展，如金融数学、生物数学、控制数学、定量社会学、数理语言学、计量史学、军事运筹学，等等。这种交融大大促进了各相关学科的发展，使得数学的应用无处不在。20世纪下半叶，数学与计算机技术的结合产生了数学技术。数学技术的迅速兴起，使得数学对社会进步所起的作用从幕后走向台前。计算机的迅速发展和普及，不仅为数学提供了强大的技术手段，也极大地改变了数学的研究方法和思维模式。所谓数学技术，就是数学的思想方法与当代计算机技术相结合而成的一种高级的、可实现的技术。数学的思想方法是数学技术的灵魂，拿掉它数学技术就只剩下一个空壳。数学技术对于人类社会的现代化起着极大的推动作用。正是在这个意义上，联合国教科文组织把21世纪的第一年定为“世界数学年”，并指出“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙”。

其次是因为数学能够很好地培养人的理性思维。数学除了是科学的基础和工具外，还是一种十分重要的思维方式与文化精神。美国国家研究委员会在一份题为“人人关心数学教育的未来”的研究报告中指出：“除了定理和理论外，数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、由数据进行推断以及符号运算等。它们是普遍适用的、强有力的思考方式。应用这些数学思考方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代里日益重要的一种智力。它使人们能批判地阅读，能识别谬误，能探索偏见，能估计风险，能提出变通办法。数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界。”数学在形成人类的理性思维方面起着核心的作用，而我国的传统文化教育在这方面恰恰是不足的。一位西方数学史家曾说过：“我们讲授数学不只是一要教涉及量的推理，不只是把它作为科学的语言来讲授——虽然这些都很重要——而且要让人们知道，如果不从数学在西方思想史上所起的重要作用方面来了解它，就不可能完全理解人文科学、自然科学、人的所有创造和人类世界。”

## 二、数学是什么

《数学是什么》是20世纪著名数学家柯朗(R. Courant)的名著。每一个受过教育的人都不会认为自己不知道数学是什么，但是每个读过这本书的人都受益匪浅。人们了解数学是通过阅读有关算术、代数、几何与微积分等方面的教材和著作，知道数学的一些内容。但这只是数学极小的一部分。柯朗认为，数学教育应该使人了解数学在人类认识自己和认识自然中所起的作用，而不只是一些数学理论和公式。

凡是学过数学的人，都能领略到它的特点——理论抽象、逻辑严密，从而显示出一种其它学科无法比拟的精确和可靠。但是人们更需要了解的是数学对整个人类文明的重要影响。回顾人类的文明史，2500年来，人们一直在利用数学追求真理，而且成就辉煌。数学使人类充满自信，因为由此能够俯视世界、探索宇宙。人类改变世界和自身所依赖的是科学，而科学之所以能实现人的意志是因为科学的数学化。马克思曾说过：“一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步。”一百多年前，成功地由数学完善其理论的不过是力学、天文学和某些物理学的分支，化学很少用到数学，生物学与数学毫无关系。而现在就完全不同了，几乎所有的科学，不仅是自然科学，而且包括社会科学和人文科学的各个领域，都正在大量应用数学理论。这正是20世纪人类社会和自然面貌迅速改变的原因。我们还可以回顾一下，在人类进入近代文明之前，对于现实世界的认识和描述大多是定性的，诸如“日月星辰绕地球旋转”、“重的物体比轻的物体下落得快”，等等。而现在的科学则要求定量地知道，一个物体以什么样的速度沿什么样的轨道运行，怎样可以准确无误地把人送到月球上指定的地点，等等。一个科学理论，必须经得起反复的观察验证，而且可以精确地预言即将出现的事物和现象，只有这样才能按照人的意志改造客观世界。不论是验证还是预言，都需要有定量的标准，这就要求科学数学化。现在，数



学化了的科学已经渗透到社会的所有领域的各个层面，人类可以在大范围内预报中长期的气象，可以预测一个地区、一个国家甚至全世界的经济前景。这是因为现在对于这些看似纷乱的现象已经可以建立数学模型，然后经过演算和推理就能得出人们想知道的结论。金融、保险、教育、人口、资源、遗传，甚至语言、历史、文学都不同程度地采用数学方法，许多领域的科学论文都以它所使用的数学工具作为重要的评估标准之一。电视、通信、摄影技术正在数字化，其目的在于通过计算机技术更准确细微地反映图像、声音。甚至计算歌星与球队的排名都有许多方法。因此有人说：“一个国家的科学水平可以用它消耗的数学来度量。”

20世纪初期，科学的深刻变化促使人们从哲学高度进行反思，从整个文明发展进程的角度来加以总结，并认识到：数学是一种语言，它精确地描述着自然界和人类自身；数学是一种工具，它普遍地适用于所有科学领域；数学是一种精神，它理性地促使人类的思维日臻完善；数学是一种文化，它决定性地影响着人类的物质文明和精神文明的各个方面。

### 三、数学科学的形成与发展

当人类试图按照自己的意志来支配和改造自然界时，就需要用数学的方法来构想、描述和落实，因此，在人类文明之初就诞生了数学。古代的巴比伦、埃及、中国、希腊和印度在数学上都有重要的创新，不过从现代意义上说，数学形成于古希腊。著名的欧几里得几何学是第一个成熟的数学分支。相比于欧几里得几何学，其它文明中的数学并未形成一个独立的体系，也没有形成一套方法，而是表现为一系列相互无关的、用于解决日常问题的规则，诸如历法推算和用于农业与商业的数学法则等。这些法则如同人类的其它知识一样是源于经验归纳而成的，因此往往只是近似正确的。例如，有许多像“径一周三”这样以三表示圆周率的命题。欧几里得几何学则完全不同，它是一个逻辑严密的庞大体系，仅从10条公理出发，就推导出487个命题，采用的是与归纳思维法相反的演绎推理法。归纳法是由特殊现象归纳出一般规律的思维方法，而演绎法则正好相反，它从已有的一般结论推导出特殊命题。例如，假定有“一个运用数学的学科是成熟的学科”这样一个公认正确的一般结论，即所谓的大前提；“物理学运用了数学”这是一个特殊的命题，即所谓的小前提；由以上两点可以得出结论：“物理学是成熟的学科”。这就是常说的“三段论”逻辑。演绎法就运用了这样的逻辑，其主要特征是在前提正确的情况下，结论一定正确。意识到逻辑推理的作用是古希腊文明对人类的一项巨大贡献。

在希腊被罗马帝国统治之后，希腊的数学研究中断了将近2000年。在与罗马的历史平行的1100年间，希腊没有出现过一位数学家。他们夸耀自己讲究实际，兴建过许多庞大的工程。但是过于务实的文化不能产生深刻的数学。在那之后统治欧洲的基督教提倡为心灵做好准备，以便死后去天国，对于现实的物理世界缺乏兴趣。这一时期，数学在中国、印度和阿拉伯地区继续发展，也有许多重要的创新。但是这些古代文明不像希腊文明那样追求绝对可靠的真理，因此没有形成大规模的理论

结构体系。例如，著名的祖冲之提出的圆周率领先欧洲1 000多年，但是他没有给出推导密率的理论依据。

被罗马帝国和基督教逐出的希腊文明，在1 000多年后重返欧洲。当时，教会仍然主宰一切，真理只存在于圣经之中。饱受压抑而善于思索的学者们看清了希腊文明远比教会高明，于是他们立即接受了这份遗产，特别是“世界是按数学设计”的信念。哥白尼经过多年的观察和计算，创立了日心说，认定太阳才是宇宙的中心，而不是地球。日心说不仅改变了那个时代人类对宇宙的认识，而且动摇了宗教的基本教义：上帝把最珍贵的创造物——人类安置在宇宙的中心——地球。日心说是近代科学的开端，而科学正是现代社会的标志。科学使处于低水平的西欧文明迅速崛起，短短两三百年后领先于全世界。

在这之后，科学发展具有决定性意义的一步是由伽利略(G. Galileo)迈出、由牛顿完成的，这就是科学的数学化。伽利略认为，基本原理必须源于经验和实验，而不是智慧的大脑。这是革命性的关键的一步，它开辟了近代实验科学的新纪元。人脑可以提供假设，但假设和猜想必须通过检验。哥白尼的日心说如此，牛顿的万有引力如此，爱因斯坦的相对论也是如此。为了使科学理论得以反复验证，伽利略认为科学必须数学化，他要求人们不要用定性的模糊的命题来解释现象，而要追求定量的数学描述，因为数量是可以反复验证和精确测定的。追求数学描述而不顾物理原因是现代科学的特征。

17世纪60年代，牛顿用这种新的方法论取得了辉煌的成功，以至于几乎所有科学家都立即接受了这种方法，并取得了丰硕的成果。这种方法称为西欧工业革命的科学基础。牛顿决心找出宇宙的一般法则，他提出著名的力学三定律和万有引力假设。然后用他发明的微积分方法，经过复杂的计算和演绎，既导出了地球上物体的运动规律，也导出了太空中物体的运动规律，统一了宇宙中的各种运动，而这些都是由数学推导完成的，从而引起了巨大的轰动。17世纪的伟大学者们发现了一个量化的世界，这就是繁荣至今的科学数学化的开始。

牛顿的广泛的研究方向，以及他和莱布尼茨(G. W. Leibniz)共同创造的微积分，成为从那以后的100多年间科学家研究的课题。由于追求量化的结论，当时的科学家都是数学家，而伟大的数学家也毫无例外地都是科学家。科学家寻求一个量化的世界的努力一直延续至今，他们的主要目标不再是解释自然，而是为了作出预测，以便实现各种理想和愿望。在这个过程中，以几何为基础的数学，重心转移到了代数、微积分及其各种数量关系的后续分支上。

代数成为一门学科可以认为开始于韦达(F. Viète)的研究。在此之前，代数是文字表示的一些应用问题，只不过是一些实用的方法和计算的“艺术”，没有自己的理论。韦达的功绩是用一整套符号表示代数中的已知量、未知量和运算。这使得代数问题可以抽象归结为符号算式，这样就脱离了它的具体背景，然后根据一整套规定的法则作恒等变形，直至求出答案。后来，笛卡尔(R. Descartes)用坐标方法，