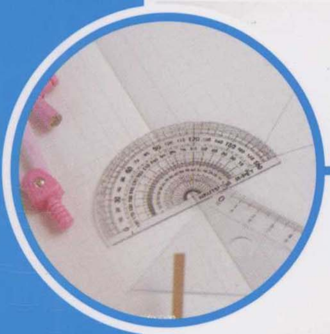
高等教育“十二五”规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU



赵临龙 主 编
郭 芳 李 超 范玉莲 副主编

科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

线性代数

赵临龙　主编
郭　芳　李　超　范玉莲　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共五章，内容包括：行列式、矩阵、n元向量与线性方程组、特征值与特征向量和二次型，章末均有每章小结，并配有A、B、C三类习题，供不同水准的学习者选用。

本书主要针对应用型本科培养应用型人才的目标，弱化理论的推导与证明，加强理论的应用与习题的训练，达到应用线性代数的理论和方法解决问题的目的。

本书可作为普通高等院校理工、经管等专业的教材，也可供有关科技工作者参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/赵临龙主编. —北京：科学出版社，2011
（高等教育“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-03-031487-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第110443号

策划：姜天鹏 冯 涛
责任编辑：隽青龙/ 责任校对：柏连海
责任印制：吕春珉/ 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011年7月第 一 版 开本：787×960 1/16
2011年7月第一次印刷 印张：9 1/2
印数：1—3 000 字数：200 000

定价：25.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新蕾〉）
销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62135517-2037

前　　言

自从高等教育由精英教育转向大众教育以来，一方面使更多的人可以享受到高等教育，另一方面也出现了一些新的情况，例如对于应用型本科这一类高校在高等数学教学中产生了很大难度。高等数学是高科技与信息化的基础，其重要性是不言而喻的，然而一些学生对数学缺乏兴趣，不愿学习数学。广大数学教育工作者为解决这一问题付出了辛勤劳动，但收效甚微。我们认为，要真正解决这一问题，必须从转变数学教育观念入手，从数学教材改革入手。

正像汽车司机不必费很大精力去学习和研究汽车的设计制造以及发动机工作原理等知识，要紧的是掌握驾驶技术。学生的数学教育也是如此。应用型本科的培养目标都定位在“应用型人才”上，学生学习数学的目的是应用数学，而不是追求理论的来源。在实际教学中，我们总是舍不得放弃数学的理论和推导，非得把一些繁复而深奥的数学推导过程讲清不可，生怕不严谨、不系统、不全面而影响数学的“形象”。正是这种观念长期束缚着我们，从而不针对独立学院的实际，使学生“云里雾里”地学不好数学，对数学敬而生畏，甚至放弃数学。

诚然，像汽车司机懂得汽车的工作原理有利于驾驶好汽车一样，必要的理论是不可少的，但是毕竟不能因为理论而影响理论的应用。突出理论的应用，这是十分关键的。

我们在理论教学上略去了一些证明，代之以对理论的诠释和直观形象说明，加强了对理论的应用，通过例题熟悉理论，掌握并应用解决问题的方法和技巧。

书中每章章末均有该章小结，每章的问题归纳都可在习题中找到例子，以供习题课使用，书中配有较大篇幅习题，分为 A、B、C 三个层次，分别为基本题、达标题和提高题，可以针对学生具体情况适量选用。“较大的题量”是本教材的特色，编者意在贯彻“精讲多练”的教学方法。精讲：简单明了，通俗易懂，方便学习；多练：加强训练，掌握解题方法和技巧，增强思维能力。“习题分为 A、B、C 三个层次”是本教材的另一个特色，对于数学学习感到吃力的学生可以从解决 A 层次（基本）题开始，

多数学生应当达到掌握B层次（达标）题，对于少部分学有余力，并准备进一步深造的学生可以尝试解决C层次（提高）题。数学教学分层次是因材施教的具体化，对数学习题的分层次，可以实现数学的分层次教学。

本书由赵临龙担任主编，由郭芳、李超、范玉莲担任副主编。

由于编者水平有限，本书不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2011年6月

目　　录

第一章　行列式 …………………………………………………… 1

第一节　n 阶行列式 …………………………………………………… 1

第二节　行列式的性质 …………………………………………………… 4

第三节　行列式的计算 …………………………………………………… 9

第四节　克莱默法则 …………………………………………………… 14

本章小结 …………………………………………………… 16

习题一 …………………………………………………… 17

第二章　矩阵 …………………………………………………… 26

第一节　矩阵及其运算 …………………………………………………… 26

第二节　矩阵的特殊情形 …………………………………………………… 31

第三节　逆矩阵 …………………………………………………… 34

第四节　矩阵的初等变换 …………………………………………………… 38

第五节　分块矩阵 …………………………………………………… 43

本章小结 …………………………………………………… 48

习题二 …………………………………………………… 49

第三章　n 元向量与线性方程组 …………………………………………………… 56

第一节　n 维向量的线性相关性 …………………………………………………… 56

第二节　向量组的秩与矩阵的秩 …………………………………………………… 60

第三节　齐次线性方程组 …………………………………………………… 64

第四节　非齐次线性方程组 …………………………………………………… 68

本章小结 …………………………………………………… 72

习题三 …………………………………………………… 73

第四章　特征值与特征向量 …… 79

第一节　矩阵的特征值与特征向量 …… 79
第二节　相似矩阵 …… 83
第三节　向量内积与正交矩阵 …… 87
第四节　实对称矩阵的特征值与特征向量 …… 90
本章小结 …… 94
习题四 …… 95

第五章　二次型 …… 103

第一节　二次型与对称矩阵 …… 103
第二节　二次型与对称矩阵的标准形 …… 107
第三节　二次型与对称矩阵的有定性 …… 112
本章小结 …… 115
习题五 …… 116

习题答案与提示 …… 122

主要参考文献 …… 145

第一章 行 列 式

行列式是解线性方程组、研究向量和矩阵的重要工具，它在许多科学领域里都有广泛的应用．本章在二阶、三阶行列式定义的基础上，介绍高阶行列式的定义、性质、计算以及用克莱姆法则解线性方程组.

第一节 n 阶行列式

在中学里，我们在解二元一次方程组时，曾用过符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，这个符号称为二阶行列式，由 2^2 个数组成，它代表算式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 表示行列式的第 i 行第 j 列相交处的元素.

由 3^2 个数组成的算式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式，它与二阶行列式一样是按一定规则计算的，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.1}$$

例如：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\times1 - 1\times(-3) = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times1\times1+(-1)\times2\times1+1\times0\times(-2)-1\times1\times1-1\times(-1)\times0-1\times2\times(-2)$$

$$= 2$$

为了给出四阶、五阶乃至 n 阶行列式的定义，可以将式（1.1）中三阶行列式（这里记为 D ）改写为

$$\begin{aligned} D &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13} \end{aligned}$$

其中，$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$，$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. 它们分别是在三阶行列式中去掉第 1 行第 1 列、第 1 行第 2 列和第 1 行第 3 列以后，保留三阶行列式中原来的数而得到的二阶行列式.

如果令 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}(j=1,2,3)$，那么三阶行列式可以表示为

$$D = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

如果我们定义一阶行列式 $|a|=a$（注意：这里不是取绝对值），那么二阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ (-1)^{1+1}\,|a_{22}|+a_{12}\ (-1)^{1+2}\,|a_{21}| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

按上述规律，我们可以定义四阶、五阶……直到 n 阶行列式.

定义 1.1 设 $n-1$ 阶行列式已经定义，令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \tag{1.2}$$

其中，A_{1j} 表示等式左边划去第 1 行第 j 列后余下的元素组成的 $n-1$ 阶行列式，并乘以 $(-1)^{1+j}(j=1,2,\cdots,n)$，式（1.2）称为一个 n 阶行列式，等式右边算出来的数称为此 n 阶行列式的值.

【例 1.1】 计算下面行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

解：由定义 1.1

$$D = 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 5\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+1\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 + 45 + 3 = 51$$

【例 1.2】 计算 n 阶行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$（该行列式称为下三角行列式）

解：$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

作为本例的特殊情况，有

$$\begin{vmatrix} d_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1d_2\cdots d_n$$

定义 1.2 在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} ；记 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ ，则 A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

由此定义我们知道，n 阶行列式 D 等于它的第 1 行上所有元素与其对应的代数余子式乘积之和，我们称为行列式按第 1 行展开. 行列式可以按任意一行（或一列）展

开，即

定理 1.1 n 阶行列式 D 等于它的任意一行（列）的元素与其对应代数余子式乘积之和．即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in} (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} (j = 1,2,\cdots,n)$$

【例 1.3】 计算行列式．

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

解：首先对四阶行列式按第 3 行展开，再对三阶行列式按第 3 列展开，得

$$D = 2 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = -40$$

第二节　行列式的性质

直接用定义计算 n 阶行列式，一般是较繁琐的．为此我们给出如下性质，以简化行列式的计算．

性质 1.1 行列互换，行列式的值不变．即如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D = D^{\mathrm{T}}$，行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式．

证明：用归纳法证明，当 $n = 1$ 时显然为真．假定对 $n-1$ 阶行列式，性质 1.1 成立，于是对 D 按第一行展开，便有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$$

而对 D^{T} 按第一列展开，便为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} M_{i1} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{j1}$$

注意到 M_{1j} 与 M_{j1} 都是 $n-1$ 阶行列式，并且将 M_{1j} 行列互换正好是 M_{j1} ，所以由归纳假设，$M_{1j} = M_{j1}$. 于是性质 1.1 为真.

由性质 1.1 可知，行列式对行所具有的性质，对列也一定成立 . 因此，行列式的性质仅对行研究即可.

性质 1.2 把行列式的某一行（列）上所有元素同乘以数 k，相当于把行列式乘以 k. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把上式左端按第 i 行展开即可得到右端结果.

性质 1.3 如果行列式中有一行（列）元素全是零，那么，这个行列式的值为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

其中，性质 1.3 是性质 1.2 中 $k=0$ 的特殊情况.

性质 1.4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把上式左端按第 i 行展开可得等式右端.

性质 1.5 行列式交换两行（列）其值改变符号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } k \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

证明： 先对 $k = i + 1$ 的情形加以证明，即先考虑交换相邻两行的情形，此时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

而

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+1+j} a_{ij} M_{ij}$$

比较以上两式得知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对于 $k = i + p$ 的情形，从行列式

$$\begin{array}{|cccc|l}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & (\text{第 } i \text{ 行}) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & (\text{第 } k \text{ 行}) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} &
\end{array}$$

中第 i 行向下逐次交换 $p-1$ 次得到如下的行列式

$$\begin{array}{|cccc|l}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)n} & (\text{第 } i \text{ 行}) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & (\text{第 } k \text{ 行}) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} &
\end{array}$$

然后将第 k 行向上逐次交换 p 次得到

$$\begin{array}{|cccc|l}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & (\text{第 } i \text{ 行}) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & (\text{第 } k \text{ 行}) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} &
\end{array}$$

于是

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = (-1)^{2p-1}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

这样就证明了性质 1.5.

利用性质 1.5，很容易得到如下两个性质.

性质 1.6 有两行（列）相同的行列式，其值为零．即当 $a_{il}=a_{jl}(i\neq j,l=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

性质 1.7 如果行列式中有两行（列）对应元素成比例（即 $a_{jl}=ka_{il},i\neq j,l=1,2,\cdots,n,k$ 是常数），其值为零.

利用性质 1.4 和性质 1.7，便有性质 1.8.

性质 1.8 如果把行列式中某一行（列）的所有元素同乘以 α 加到另一行（列）上，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+\alpha a_{k1} & a_{i2}+\alpha a_{k2} & \cdots & a_{in}+\alpha a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.9 n 阶行列式的某一行（列）中各元素与另一行（列）中对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}A_{ij}=0(k\neq i)$，其中 A_{ij} 是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{ij} 的代数余子式.

证明：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij} = \begin{array}{|cccc|l} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 第 i 行 \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 第 k 行 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \end{array} = 0$$

即性质 1.9 成立.

【例 1.4】 化简行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} \end{vmatrix}$$

解： $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

【例 1.5】 计算上三角行列式.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解： 由性质 1.1 和例 1.2

$$D = D^{\mathrm{T}} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

第三节 行列式的计算

为了说明行列式 D 的化简过程，我们用 r_i 和 c_j 分别表示 D 的第 i 行和第 j 列，并采用如下规定.

规定 1 互换的 i，j 两行（列），记为 $r_i \leftrightarrow r_j$（$c_i \leftrightarrow c_j$）；

规定 2 数 $k \neq 0$ 乘 D 的第 i 行（列）记为 $kr_i(kc_i)$；

规定 3 数 k 乘 D 的第 j 行（列）加到第 i 行（列）上去，记为 $kr_j + r_i(kc_j + c_i)$.

【例 1.6】 计算

$$D=\begin{vmatrix}1&0&5&1\\2&-1&-1&0\\0&2&1&-1\\-1&1&0&2\end{vmatrix}$$

解：将 D 化为上三角行列式

$$D\xlongequal[r_1+r_4]{(-2)r_1+r_2}\begin{vmatrix}1&0&5&1\\0&-1&-11&-2\\0&2&1&-1\\0&1&5&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_2+r_4]{2r_2+r_3}\begin{vmatrix}1&0&5&1\\0&-1&-11&-2\\0&0&-21&-5\\0&0&-6&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-\frac{6}{21}r_3+r_4}\begin{vmatrix}1&0&5&1\\0&-1&-11&-2\\0&0&-21&-5\\0&0&0&\frac{51}{21}\end{vmatrix}=51$$

【例 1.7】 计算

$$D=\begin{vmatrix}1&4&-1&4\\2&1&4&3\\4&2&3&11\\3&0&9&2\end{vmatrix}$$

解：利用性质把行列式的第 2 列元素化简为只剩一个非零元素，再把它按该列展开，从而降阶计算.

$$D\xlongequal[(-2)r_2+r_3]{(-4)r_2+r_1}\begin{vmatrix}-7&0&-17&-8\\2&1&4&3\\0&0&-5&5\\3&0&9&2\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\times1\times\begin{vmatrix}-7&-17&-8\\0&-5&5\\3&9&2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_2}\begin{vmatrix}-7&-25&-8\\0&0&5\\3&11&2\end{vmatrix}=(-1)^{2+3}\times5\times\begin{vmatrix}-7&-25\\3&11\end{vmatrix}=-5\times(-77+75)=10$$