



中国人民大学经济学系列教材

# 应用计量经济学

赵国庆 编著

 中国人民大学出版社



中国人民大学经济学系列教材

# 应用计量经济学

赵国庆 编著

中国人民大学出版社  
· 北京 ·

Applied Econometrics

**图书在版编目 (CIP) 数据**

应用计量经济学/赵国庆编著. —北京: 中国人民大学出版社, 2011. 8  
中国人民大学经济学系列教材  
ISBN 978-7-300-14260-9

I. ①应… II. ①赵… III. ①计量经济学-高等学校-教材 IV. ①F224. 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 177133 号

中国人民大学经济学系列教材  
**应用计量经济学**  
赵国庆 编著  
Yingyong Jiliang Jingjixue

---

<b>出版发行</b>	中国人民大学出版社		
<b>社 址</b>	北京中关村大街 31 号	<b>邮政编码</b>	100080
<b>电 话</b>	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
<b>网 址</b>	<a href="http://www.crup.com.cn">http://www.crup.com.cn</a> <a href="http://www.ttrnet.com">http://www.ttrnet.com</a> (人大教研网)		
<b>经 销</b>	新华书店		
<b>印 刷</b>	北京华正印刷有限公司		
<b>规 格</b>	185mm×260mm 16 开本	<b>版 次</b>	2011 年 9 月第 1 版
<b>张 数</b>	12.75 插页 1	<b>印 次</b>	2011 年 9 月第 1 次印刷
<b>印 数</b>	290 000	<b>定 价</b>	24.00 元

---

**版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换**

# 中国人民大学经济学系列教材

## 编辑委员会

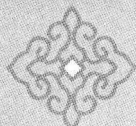
学术顾问：卫兴华 林 岗 杜厚文 胡乃武 吴易风

主 编 杨瑞龙

副 主 编 高德步 黄卫平 张 宇

编 委 (按姓氏音序排名)

陈享光	陈彦斌	方福前	顾海兵
郭 杰	韩小明	韩玉军	侯景新
黄泰岩	雷 达	李义平	刘凤良
刘 瑞	刘元春	卢 荻	邱海平
孙久文	王晋斌	吴汉洪	姚开建
赵国庆	郑超愚	郑新业	周业安



## 内容简介

本书旨在使读者掌握常用的计量经济理论与方法，强调以解决实际问题为导向。习题的计算是理解计量经济学必不可少的重要环节，本书每章都配备了大量的习题，并给出了详细的解答。本书主要内容如下：两变量回归分析中，最小二乘法计算、估计结果评价与检验； $k$  变量线性回归模型的估计、模型评价指标及检验统计量；误差项不相关与同方差假设条件不成立时的估计与检验；模型中虚拟变量的使用、经济结构变化的检验、分布滞后模型的估计；联立方程组模型的偏误、识别及 TSLS 估计量。二元选择、受限因变量、面板数据以及 SUR 模型的估计与检验；本书最后给出利用 EViews 对经济模型进行建模的部分案例。

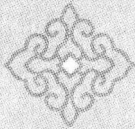
## 作者简介

赵国庆，1996 年获日本京都大学经济学博士学位，现任中国人民大学经济学院教授、博士生导师。

研究方向：计量经济学理论与应用。

### 主要成果：

1. Unit Root Analyses of the Causality between Japanese Money and Income, *Japanese Economic Review*, 1997. (with Morimune. K.)
2. Heuristics for Replenishment with Linear Decreasing Demand, *International Journal of Production Economics*, 2001. (with Yang. J. and Rand G. K. )
3. Uncovering the Relationship between FDI, Human Capital and Technological Progress in Chinese High-technology Industries, *China & World Economy*, 2010. (with Zhang Z. )



## 迎接中国经济学时代的到来 (总序)

自改革开放以来，伴随着经济体制的深刻变化和经济的快速发展，我国的经济学研究 与教学也呈现出了前所未有的繁荣局面，各种中外文版的经济学教材也层出不穷。怎样在 新时期编写出一套在马克思主义经济学的指导下，既与国际接轨，又具有中国特色、中国 气派、中国风格的经济学教材体系是摆在我们面前的一项重要任务。

伴随着改革开放而处于不断创新中的经济学研究与教学无论在基本理论分析框架还是在 经济学分析范式方面都发生了深刻的变化。首先是经济学摆脱了传统政治经济学分析范 式的束缚，从只关注生产关系到同时十分关注资源配置，不断通过理论创新推动马克思 主义经济学的中国化；其次是经济学从封闭式的一枝独秀到开放性的百家争鸣；再次是经济 学界从纯理论推导到十分重视理论联系实际，勇于直面经济改革与发展中遇到的重大问 题，并力图运用现代经济学分析方法对这些重大问题给予实事求是的解释，进而提出各种 政策建议，服务于改革开放与经济实践的 实践；最后是从单调的分析方法到多元化的分析 方法。经济学界开始把规范分析与实证分析相结合、把定性分析与定量分析相结合、把静 态分析与动态分析相结合。

时代的变迁赋予经济学创新的动力和平台。我们可以从我国经济学在最近三十多年的 发展轨迹中感悟到如何始终保持经济学旺盛生命力的真谛。

第一，理论是灰色的，生命之树常青。所谓理论是指人们由实践概括出来的关于自然 界和人类社会的知识的系统的结论，它对人们未来的实践活动具有重要的借鉴与参考价 值，但由于实践本身是不断变化的，如果把已有的理论奉为放之四海而皆准的真理，不敢 越雷池一步，那就难免要犯错误。毛泽东曾说过，真正的理论在世界上只有一种，就是从 客观实际抽出来又在客观实际中得到证明的理论，没有任何别的东西可以称得起我们所讲 的理论。也就是说，真正有生命力的理论并不是指那种从书本到书本、从概念到概念的纯 粹思辨逻辑，而是指那种源于实践又回到实践最后被实践证明是正确的理论结晶。因此，

概括自改革开放以来经济学发展的最大特点，那就是从过去的教条主义束缚中解脱出来，开始走向社会，走向实践，以问题为导向，采用实证分析方法，回答改革开放中出现的重点与疑难问题，从而推动经济学的创新。

第二，无论是照搬照抄马克思主义经典作家的个别“结论”还是西方经济学的定理都是危险的。把马克思主义经济学教条化是过去长期形成的学风，研究者遵循的是从书本到书本、从概念到概念的分析方法，只关注研究的结论与马克思主义经典作家说过的话是否一致，从而导致理论的僵化。但近年来另一个值得注意的倾向是把西方主流经济学教条化，言必称斯密、凯恩斯、科斯等，当实践与所谓“标准”的经济学不一致时，就断言实践错了，应按照主流经济学的逻辑来设计改革路径。其实，把马克思主义经济学或者西方经济学教条化，都会导致中国经济学的发展走入死胡同。我们常常看到在有关中国问题的研究中出现了一些伪命题，其原因在于理论忽视了所探讨问题的复杂性。因此，为了准确揭示我国的经济运行特点，就需要坚持马克思主义经济学的基本立场、观点与方法，推进马克思主义经济学的中国化进程，在吸收西方经济学的过程中注意中国的国情。概言之，就是要坚持实事求是，理论联系实际的学风。

第三，推进了中国经济学研究范式和教学模式的创新。理论的生命力在于创新，但创新并非贴标签，也不是故意的标新立异，更不是胡思乱想，而是跳出原有的思维定式，突破原有的理论框框和教条，立足现实，面向实际，解放思想，通过对现象的深入剖析来检验和发展现有的理论。如果现有的理论不足以回答现象所隐含的问题，就需要我们反思理论本身。中国改革开放的伟大实践为经济学理论的发展提出了前所未有的机遇和挑战。在这种情况下，总结中国经济改革和经济发展的经验，从理论上科学地回答新的历史阶段提出的一系列新问题，推动经济学理论的创新和发展，努力建设和发展具有中国特色、中国风格、中国气派的中国经济学的理论体系与教材体系，对于我国经济学学科的建设工作具有重大意义。

第四，迎接中国经济学时代的到来。改革开放的实践所提出的很多疑难问题显然无法从现成的理论著作中找到一劳永逸的解决方案。同时，我们也无法利用现有的理论分析框架清晰地从具有鲜明中国特色的改革道路、开放道路与发展模式中概括与提炼出一般的经济学理论体系。因此，无论是为了解决实际问题，还是为了实现理论创新，都首先必须直面中国的现实。改革开放以来，中国的经济改革与经济发展取得了举世瞩目的伟大成就，“中国模式”、“中国经验”、“中国道路”正在受到全世界日益广泛的关注。中国改革开放的伟大实践对经济学理论的发展提出了前所未有的机遇和挑战。总结中国经济改革和经济发展的经验，从理论上科学地回答新的历史阶段提出的一系列新问题，推动经济学理论的创新和发展是我们这一代经济学者应担负的历史使命。

坚持直面现实的研究态度和方法所强调的是，当理论与实践相冲突时，让理论服从现实，而不是让现实适应理论。直面现实式的研究并非不要理论，而是从我国经济改革和经济发展中出现的特殊现象入手，通过对现象的深入剖析来检验现有的理论。如果现有的理论不足以回答所隐含的问题，那就需要我们反思理论本身，直至根据现实修正理论。经济学的理论和教材一旦脱离现时代的经济改革与发展的实践，就成为无本之木、无源之水，甚至有可能成为阻碍生产力发展的因素。理论联系实际应该是适应时代要求的经济学创新

的基本原则。为此，一方面，应反对脱离实际的理论，这会导致“老八股”式的空泛经济学；另一方面，也应排斥完全抛弃理论的经验主义，那会导致公说公有理、婆说婆有理的实用主义经济学。

直面现实的经济学分析方法要求实现经济学的现代化。学术界对经济学的现代化有不同的看法。一种极端的看法是，经济学的大厦只有一座，那就是以个体主义成本收益分析为主线的西方主流经济学。我国经济学家所做的工作就是为这座大厦添砖加瓦，实现经济学的“国际化”，不存在一个具有独立理论体系的“中国经济学”。这种把“全盘西化”等同于国际化的看法我们是不能苟同的。国际化并非经济学现代化的全部内容，特别是不等于照搬照抄西方经济学。例如，一个发展中国家到底应该选择什么样的改革发展道路才能摆脱贫困走上富裕之路，信奉新自由主义的学者提出了私有产权条件下资本与市场全面开放的“华盛顿共识”。随着我国改革开放所取得的成就日益被国际社会所公认，作为直接挑战“华盛顿共识”并建立在中国经验基础上的“北京共识”愈益被国内外学术界所广泛关注。我国学者所做的研究证明，一个国家的改革和发展模式必须依据本国的国情自主地探索与选择，任何照搬照抄外国经验或书本上的教条的做法都是注定要失败的；强调发展的包容性、兼容性，把市场机制的调节作用与政府的宏观调控结合起来，有效地处理好公平与效率之间的关系、经济高速增长与社会全面发展之间的关系；强调以人为本的发展目标与统筹兼顾的发展手段，避免发展中的严重两极分化，追求共同富裕等。这些研究成果突破了新古典主义的教条。当然，如果把中国经济学看成与已有的任何经济学流派没有血脉关系、纯粹以我国的经济运行为研究对象、完全由自己独创的理论体系，那么这样理解中国经济学则有些偏窄。任何学术流派的产生和发展总是站在前人的肩膀之上的，人们对前人丰富思想的继承和发展不仅可使后人少走许多弯路，而且使学术思想具有可交流性。这种从中国国情出发来吸收与消化西方经济学的有用成分，创立一个在马克思主义经济学的指导下，既符合国际的学术规范、又能解决中国问题的经济学，我们称之为经济学的本土化，它也构成经济学现代化的重要内容。

所谓中国经济学，实际上就是在马克思主义经济学的指导下，在充分吸收现有经济学分析体系中有价值的思想与分析方法的基础上，根据我国改革和发展中面临的实际问题，拓宽现有理论的某些假设条件，或者通过案例分析、计量检验等来检验现有经济学的某些结论和基本原理，进而使这种经过修正和发展的经济学流派打上鲜明的中国烙印，甚至创立具有中国风格和气派的经济学分析体系。我国正在进行的改革开放实践为中国经济学的诞生和发展提供了大量的案例和取之不尽的研究素材，世界上越来越多的经济学家关注和研究中国的经济问题，原因就在于此。我国经济学国际化与本土化的交互作用所推进的现代化过程将催生出中国经济学。

最近十年来，中国人民大学经济学院以“985”项目与“211”工程建设为契机，围绕中国经济学理论体系、教材体系与教学体系的建设这一核心，全面推进教学、科研，以及学科建设、队伍建设和人才培养工作，努力建设世界一流的有中国特色的经济学学科体系与教学体系。“中国经济学”建设计划的主要内容有，中国经济学的本科生与研究生的系列教材、“中国经济学”学术专著系列丛书、中国经济学系列精品课程建设计划、以《政治经济学评论》、《西方经济学评论》、《开放经济学评论》等为主体的“中国经济学”学术

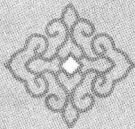


期刊计划、中国宏观经济分析与预测报告の定期发布以及中英文报告的出版、以“世纪经英论坛”、“人大经济讲堂”、“经济学院学术沙龙”、“研究生学术论坛”等品牌学术活动为主要内容的中国经济学系列学术讲座计划、面向全球招收硕士研究生的“中国经济”全英文硕士项目、中国经济学研究全球战略合作伙伴计划、中国经济学数据库建设与经济实验室建设计划等。

本次推出的经济学类（涵盖各个经济学专业的广义经济学）本科生与研究生教材系列就是中国经济学学科建设的成果之一，内容主要涉及中国人民大学经济学院涉及各个专业的经济学本科生及硕士研究生培养计划中的学科基础课、专业课以及主要选修课的课程，其中有一些教材已经出版了多年，这次进行了重新修订，有的则是完全重新编写。本次教材的编写者以中青年教师为主，他们大部分是在我国改革开放的大潮中成长起来的新生代经济学家，他们既系统地接受了马克思主义经济学的教育，又系统地了解现代西方经济学，并对我国改革开放与经济实践的实践有切身的经历与体会，新生代经济学家的迅速成长让我们看到了中国经济学的未来发展希望。当然，编写出一套中国经济学的系列教材并非一件容易的事情，尽管我们的每个编写者都很努力，但由于主客观原因，还是有不少不成熟的地方，我们恳切地希望得到来自我们的同行以及实际部门的指正，以便我们在今后的教材修订和教学实践中不断改进与提高，为推动中国经济学的发展做出我们的贡献。

**杨瑞龙**

2011年7月于中国人民大学明德楼



# 引 言

构造计量经济模型是研究经济现象的一种方法，它使人们能够客观地解释经济现象背后的形成机制，其主要目的在于经济理论的数量化研究。近年来，计算机的日益更新和计量软件的多样化发展也给计量经济分析方法的利用与普及提供了强有力的支撑。《应用计量经济学》一书旨在使读者掌握常用的计量经济理论与方法，强调以解决实际问题为导向，训练读者的数量化基本技能。众所周知，计量经济习题的计算对于理解计量经济学是必不可少的重要环节，在计算过程中要用到 EViews 软件，基于这样的考虑，本书每章都配备了大量的习题，并给出了习题解答，在习题的答案中详细给出了 EViews 软件的输出结果和部分程序。我们希望通过对问题的分析与估算逐步培养读者对经济问题的理解力，使读者能够更好地运用计量经济分析方法解决实际经济应用问题，在此基础上，达到对经济变化趋势进行预测和政策评价之目的。

本书共由七章构成。第一章为一元线性回归模型，对于两个变量  $X$  和  $Y$  之间关系的度量，在  $X$  为原因、 $Y$  为结果关系已知的情况下，回归分析比两个变量间的相关分析更为有效。本章将讨论两变量回归分析中最小二乘法的含义、计算方法、估计结果的评价和检验等基本内容。第二章为多元线性回归分析，是第一章两变量分析方法的扩展，将讨论包含  $k$  个变量的线性回归模型，主要包括：模型的参数估计、估计结果的评价指标，以及对估计结果的检验等内容，同时，对实证分析中遇到的多重共线性问题加以说明。第三章讨论模型中误差项假定的诸问题，如果误差项的经典假设条件不成立，会给最小二乘估计与检验结果带来很大影响，本章将讨论误差项不相关和同方差的假设条件不成立时，如何进行估计的问题，同时给出序列相关和异方差性的检验方法；第四章是对线性模型的扩展，前三章主要研究线性模型的推断问题。本章将扩展前面有关线性模型的讨论，主要内容包括模型的类型与变换、解释变量中虚拟变量的使用、经济结构变化的检验、分布滞后变量对模型的影响等内容。第五章为联立方程组模型的估计，一般经济变量之间都存在着相互

依存关系。对这种互相依存关系的处理，要借助于联立方程组模型，方程组模型对经济预测和政策评价来说都是非常重要的工具。本章在讨论联立方程组模型的偏误的基础上，解释方程组模型存在的识别问题，重点介绍模型估计方法 TSLS。第六章为模型估计方法的扩展，本章介绍近年来在实证分析中经常使用的一些模型，包括：二元选择模型、受限因变量模型、面板数据模型，以及 SUR 方程的估计问题；第七章讨论如何利用 EViews 对经济数据进行建模，EViews 是国际上通用的计量经济分析软件包，是初学者掌握计量方法的有效工具，本章主要介绍 EViews 软件包的一些基本功能，同时给出运用 EViews 对经济模型进行估计和预测的一些简单实例，本章的学习最好结合前面六章的习题解答中 EViews 估计结果一并进行。

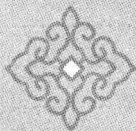
过去对于计量经济分析方法的学习，建模者通常是在充分掌握计量经济理论后，再对模型进行估推断。这种学习计量经济学的时代已经过去，今天是在进行模型估算的同时学习必要的计量分析理论，对计量经济学本身而言，这可能是一个必然的发展趋势。不需要难懂的计量分析理论，掌握必要的计量分析方法与计量软件的时代已经来临。《应用计量经济学》一书正是基于这一理念而设定的。

在本书的定稿过程中，中国人民大学数量经济学专业博士生张中元、林梦瑶、任宇宁、尹慧等参与了部分工作，值此书付梓之际，向他们表示感谢。

本书是中国人民大学经济学院第一批立项的经济学系列教材，本书的编著过程始终得到学院的关心与支持，中国人民大学出版社的编辑杨琳也为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此表示由衷的感谢。

赵国庆

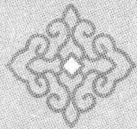
2011年8月



# 目 录

<b>第一章 一元线性回归模型</b> .....	1
1.1 模型的假定 .....	1
1.2 参数的最小二乘估计 .....	2
1.3 最小二乘估计量的性质 .....	6
1.4 系数的显著性检验 .....	11
1.5 预测误差和预测区间 .....	14
习题 .....	16
习题解答与提示 .....	19
<b>第二章 多元线性回归分析</b> .....	26
2.1 $k$ 变量回归模型的假定 .....	26
2.2 参数的最小二乘估计 .....	27
2.3 最小二乘估计量的性质 .....	29
2.4 决定系数和修正的决定系数 .....	31
2.5 估计结果的检验 .....	32
2.6 多重共线性 .....	38
习题 .....	40
习题解答与提示 .....	44
<b>第三章 模型中误差项假定的诸问题</b> .....	52
3.1 广义最小二乘估计 .....	52
3.2 序列相关 .....	55
3.3 异方差性 .....	69
习题 .....	75

习题解答与提示 .....	78
<b>第四章 线性模型的扩展 .....</b>	<b>84</b>
4.1 模型的类型与变换 .....	84
4.2 虚拟变量的使用 .....	88
4.3 结构变化的检验 .....	93
4.4 分布滞后模型 .....	96
4.5 工具变量法 .....	110
习题 .....	112
习题解答与提示 .....	112
<b>第五章 联立方程组模型的估计 .....</b>	<b>116</b>
5.1 联立方程组模型的结构式与简化式 .....	116
5.2 联立方程组模型估计的偏误 .....	117
5.3 间接最小二乘法 .....	118
5.4 识别问题 .....	119
5.5 两阶段最小二乘估计 .....	122
5.6 模拟分析 .....	125
习题 .....	126
习题解答与提示 .....	127
<b>第六章 估计方法的扩展 .....</b>	<b>133</b>
6.1 离散选择模型 .....	133
6.2 受限因变量模型 .....	139
6.3 面板数据分析 .....	144
6.4 SUR 模型 .....	150
习题 .....	153
习题解答与提示 .....	154
<b>第七章 计量软件 EViews 入门 .....</b>	<b>160</b>
7.1 EViews 的主要功能 .....	160
7.2 EViews 的基本规则 .....	162
7.3 EViews 中方程的设定与估计 .....	167
7.4 EViews 中变量的引用和显示 .....	175
7.5 EViews 中矩阵的运算 .....	178
7.6 EViews 中 View 键的使用 .....	180
<b>附表 统计表 .....</b>	<b>184</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>189</b>



## 一元线性回归模型

### 一、本章主要内容

1. 模型的假定
2. 参数的最小二乘估计
3. 最小二乘估计量的性质
4. 系数的显著性检验
5. 预测误差和预测区间

### 二、习题

### 三、习题解答与提示

对于两个变量  $X$  和  $Y$  之间关系的度量，在  $X$  是原因， $Y$  是结果的因果关系已知的情  
况下，回归分析比相关分析更为有效。本章将讨论一元回归分析中，所使用的最小二乘法  
的含义、对估计结果的解释和检验等基本内容。

### 1.1 模型的假定

假设根据经济理论，变量  $Y_t$  和变量  $X_t$  之间有如下线性关系成立：

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \quad (t = 1, 2, \dots, n) \quad (1-1)$$

模型中  $Y$  与  $X$  分别称为被解释变量和解释变量， $Y_t$  表示  $t$  期的被解释变量， $X_t$  表示  $t$  期  
的解释变量。模型 (1-1) 被称为线性回归模型，其中  $\alpha$ 、 $\beta$  为回归参数。模型 (1-1)  
中的  $u_t$  表示  $t$  期的随机误差项，误差项  $u_t$  被认为是关于  $Y_t$  的变化不能被  $X_t$  解释的微小变

动的部分，或者说没有在模型中明确表示的所有影响  $Y_i$  因素的总和。为使模型 (1—1) 中参数的最小二乘估计量具有良好的统计性质，有必要对模型作如下假定：

- (1)  $E(u_t) = 0 \quad (t = 1, 2, \dots, n)$  ;
- (2)  $\text{var}(u_t) = \sigma^2 \quad (t = 1, 2, \dots, n)$  ;
- (3)  $E(u_t u_s) = 0 \quad (t \neq s; t, s = 1, 2, \dots, n)$  ;
- (4)  $E(X_t u_t) = 0 \quad (t = 1, 2, \dots, n)$  ;
- (5)  $u_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (t = 1, 2, \dots, n)$ 。

假定 (1) 成立，意味着  $E(Y_i | X_i) = \alpha + \beta X_i$ ，表明  $Y_i$  的条件期望随  $X_i$  变化而改变。假定 (2) 表明误差项的方差不随时间变动。如果把模型 (1—1) 看成消费函数，假定 (2) 成立，意味着无论收入高低，消费的变动幅度（分散程度的水平）保持不变。假定 (3) 表明不同时点的误差项之间不相关，意味着不同收入对应的误差项之间互不相关。当假定  $X_i$  为非随机变量时，假定 (4) 自然成立。假定 (5) 是模型假设检验的需要，由于误差项代表模型中没有出现的所有影响被解释变量因素的总和，中心极限定理保证了这一假定的合理性。

## 1.2 参数的最小二乘估计

我们假定模型 (1—1) 的估计回归直线为：

$$Y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X \tag{1—2}$$

式中， $\hat{\alpha}$ ， $\hat{\beta}$  为参数  $\alpha$ ， $\beta$  的估计值。对于  $Y_i$  和  $X_i$  的  $n$  个观察值，定义残差如下：

$$e_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i) \tag{1—3}$$

考虑如下的函数式：

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^n [Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n e_i^2 \end{aligned} \tag{1—4}$$

最小二乘法 (ordinary least squares, OLS) 的含义是：求出参数估计量  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ ，使残差平方和  $Q$  达到最小值。由残差平方和  $Q$  最小化的一阶条件：

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\alpha}} = 0, \frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}} = 0$$

可得：

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i)] = 0 \tag{1—5}$$

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i)]X_i = 0 \tag{1—6}$$

式 (1—5) 和式 (1—6) 称为正规方程, 下面我们统一用  $\sum$  代替  $\sum_{t=1}^n$ , 表示对变量从  $t=1$  到  $t=n$  求和。对正规方程组求解, 得到参数  $\alpha$ 、 $\beta$  的最小二乘估计量  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum (X_t - \bar{X})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (1-7)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \quad (1-8)$$

式中:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_t, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_t$$

$$S_{xx} = \sum (X_t - \bar{X})^2, S_{xy} = \sum (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})$$

估计的回归方程记为:

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X \quad (1-9)$$

如果把解释变量  $X$  的观测值  $X_t$  代入式 (1—9), 可得到:

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_t \quad (t = 1, 2, \dots, n) \quad (1-10)$$

$\hat{Y}_t$  称为  $Y_t$  的估计值或预测值。

**例 1—1** 根据表 1—1 给出的  $X$  和  $Y$  的数据, 计算线性回归模型 (1—1) 中参数  $\alpha$ 、 $\beta$  的最小二乘估计。

**表 1—1** 解释变量  $X$  和被解释变量  $Y$  的数据

观测值	$X_t$	$Y_t$	$X_t^2$	$Y_t^2$	$X_t Y_t$	$e_t$	$\hat{Y}_t$
1	19	18	361	324	342	0.425 532	17.574 47
2	20	19	400	361	380	0.633 819	18.366 18
3	22	20	484	400	440	0.050 392	19.949 61
4	24	21	576	441	504	-0.533 03	21.533 03
5	29	24	841	576	696	-1.491 60	25.491 6
6	31	28	961	784	868	0.924 972	27.075 03
7	37	30	1 369	900	1 110	-1.825 31	31.825 31
8	40	33	1 600	1 089	1 320	-1.200 45	34.200 45
9	40	37	1 600	1 369	1 480	2.799 552	34.200 45
10	42	36	1 764	1 296	1 512	0.216 125	35.783 87
求和	304	266	9 956	7 540	8 652	0	266

利用表 1—1 的计算结果得到:



$$\bar{X} = \frac{304}{10} = 30.4$$

$$\bar{Y} = \frac{266}{10} = 26.6$$

$$S_{xx} = 9\,956 - 10 \times 30.4^2 = 714.4$$

$$S_{xy} = 8\,652 - 10 \times 30.4 \times 26.6 = 565.6$$

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{565.6}{714.4} = 0.791\,713$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \\ &= 26.6 - 0.791\,713 \times 30.4 = 2.531\,925\end{aligned}$$

估计的回归方程为：

$$\hat{Y} = 2.531\,9 + 0.791\,7X$$

由正规方程组，可以证明估计回归方程的以下性质：

(1) 点  $(\bar{X}, \bar{Y})$  一定通过估计直线：

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$$

由正规方程式 (1—5) 可得：

$$\sum Y_i = n\hat{\alpha} + (\sum X_i)\hat{\beta}$$

等式两端同除以样本容量  $n$ ，得到：

$$\bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}$$

(2)  $\sum e_i = 0$ 。

利用正规方程式 (1—5) 直接可得上述结果。这一性质表明残差序列  $e_1, e_2, \dots, e_n$  的算术平均值：

$$\bar{e} = \frac{\sum e_i}{n} = 0$$

(3)  $\sum X_i e_i = 0$ 。

利用正规方程式 (1—6) 可得上述结果。

(4)  $\sum e_i \hat{Y}_i = 0$ 。

只需要把  $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$  代入等式的左端，再利用性质 (2) 和 (3) 即可。

(5)  $\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ 。

证明：左式 =  $\sum (Y_i - \bar{Y} + Y_i - \hat{Y}_i)^2$

$$= \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + 2\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \hat{Y}_i) + \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

如果能够证明上式中交叉项部分为 0，就完成了性质 (5) 的证明。 $(Y_i - \hat{Y}_i)$  为残差  $e_i$ ，利用残差  $e_i$  和估计值  $\hat{Y}_i$  不相关的性质 (4) 以及残差求和为 0 的性质 (2)，显然交叉