"十二五"职业教育规划教材

经济数学

主 编 曹令秋

京师职教

文化课

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

"十二五"职业教育规划教材

经济数学

主 编 曹令秋

京师职教 文化课

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济数学/曹令秋主编. 一北京：北京师范大学出版社，2015.8
（“十二五”职业教育规划教材）
ISBN 978-7-303-19399-8

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①曹… Ⅲ. ①经济数学一高等专业学校一教材 Ⅳ. ①F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 185684 号

营销中心电话 010-58802181 58805532
北师大出版社职业教育分社网 http://zjfs.bnup.com
电子信箱 zhijiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：三河兴达印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1092 mm 1/16
印　　张：11
字　　数：255 千字
版　　次：2015 年 8 月第 1 版
印　　次：2015 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：19.80 元

策划编辑：庞海龙　　责任编辑：庞海龙
美术编辑：高　霞　　装帧设计：高　霞
责任校对：陈　民　　责任印制：陈　涛

前言

本书是针对高职院校经济管理类各专业学生编写的公共基础课教材，其主要特点是把教学内容与专业学习、职业活动和职场能力对数学素养的需求紧密结合，突出数学思想方法在经济量化分析中的应用价值。

随着社会经济的迅猛发展，社会中各个行业及高校的各个专业都对数学应用能力提出了新的更高的要求，注重学生用数学的意识，培养学生用数学的能力显得更加紧迫和重要。为了将经济数学的教学变得更实用一些，我们坚持“以职业为导向、能力为本位、学生为中心”的原则，编写了这本教材。

在编写本书时，我们注意了以下几点：

第一，采用“问题驱动”教学法，从经济管理中的实例出发，引入基本概念、理论和方法，反过来利用它们解决更多的经济应用问题，突出“用数学”能力的培养，使学生在学习的过程中，通过持续地解决问题，不断地积累起可迁移的经验应用于未来的职场，解决工作中遇到的新问题。

第二，以实用为原则，以实际应用为背景，概念阐述简明、通俗，适当降低对解题技巧训练的要求，增强数学思想方法和经济量化分析等方面训练，提高学生用好数学的信心。

第三，在继承和保持经典经济数学教材的优点基础上，适当介绍了经济数学实践中必要的基本运算技能，使学生具备基本的数字应用能力；加强了对经济学上的两个重要概念——边际与弹性的讨论，加强了对定积分微元法思想的介绍及其经济应用内容，加强了多元函数微分学在经济学中应用的内容，介绍了对经济学和其他学科都十分有用的最小二乘法，从而加强

了对学生的经济应用能力的培养，增强了培养适应新时代对经济管理人才的要求的针对性。

本书注重应用，文字流畅，叙述详尽，例题丰富，每节配有技能训练，章末配有本章小结、自我检测和能力评估，便于学生自主学习，能有效地促进学生的学习能力和创新能力的提高。

由于编者水平有限，虽经多次推敲、反复校对，教材中一定仍存在不妥之处，恳请专家、同行、读者批评指正，以使本书在教学实践中不断完善，在此表示衷心感谢。

编者

2015 年 6 月

目录

一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步.

——马克思

第 1 章　利息与年金

资金具有时间价值，资金时间价值是指资金在生产和流通过程中随着时间推移而产生的增值．经历的时间不同，资金金额的变化也不同，我们可以将某一时点的资金金额折算为其他时点的金额.

【学习目标】

通过本章的学习和实践，你将掌握以下内容：

1. 会利息的计算；
2. 会现值和终值的计算；
3. 会年金现值的计算；
4. 会年金终值的计算；
5. 会不带息票据贴现的贴现利息和贴现金额的计算；
6. 会带息票据贴现的贴现利息和贴现金额的计算.

【学习任务】

掌握单利计息法与复利计息法，正确运用利息与年金的计算数据进行正确的融资决策.

问题 1. 我国民间所称的“驴打滚”的计算方法指的是什么？

问题 2. 有人说：“闰年的期票比平年的期票更有价值.”这种说法是否对？为什么？

问题 3. 贷款人如何提高实际利率？

问题 4. 内科医生通过实地检查了解病人的状况，汽车技师通过诊断测试来了解汽车的情况，经营管理人士则是利用财务报表来了解企业的运营状况. 在月度报表中，企业通常计算哪些指标来了解企业的运营状况？

案例 1　某矿业公司决定将其一处矿产开采权公开拍卖，甲公司和乙公司都参与投标. 甲公司的投标书显示，从获得开采权的第 1 年开始，每年末向矿业公司交纳 10 亿美元的开采费，直到 10 年后开采结束. 乙公司的投标书表示，直接付给矿业公司 40 亿美元，在第 8 年后开采结束，再付给 60 亿美元．如果矿业公司要求的年投资回报率达到 15%，问：应该接受哪个公司的投标？

案例 2　张先生看中一套 100 m^2 的住房，现在市场价格为 2 000 元/m^2/. 若分期付款，要求首期支付 10 万元，然后分 6 年每年年末支付 3 万元. 现在银行利率为 6%，问：张先生是分期付款好些，还是一次性付清好些？

案例 3　小王连续 6 年在每年年初存入银行 3 000 元，若银行存款利率为 5%，问：小王在第 6 年末能一次性取出本利和多少元？

§1.1 利息

尽管现在银行还提供大量的其他服务，但存贷款业务始终是其基本业务，存贷款业务都涉及利息的问题，银行对所有的贷款(loan)业务收取利息，对存款支付利息.

大多数企业和个人在购买某些资产时并不是当场立刻付清所有款项，而是在之后的某一时间内付清即可．卖方给予买方的这种赊销有时会收取一定的费用，所收取的费用就是**利息**(Interest). 如果卖方收取过高的利息，买方就会向包括银行在内的第三方借款，借取的款项称为**本金**；借款方会在借款日和偿还日之间收取利息，这段时间叫做**计息期**，利息是计息期内本金的一个百分比，年利率 10%是指一年的利息为本金的 10%.

通常一个简单的利息问题包括以下基本量，为方便起见，假定用字母表示如下：I 为利息，P 为本金，i 为利率，n 为计算利息的期数，F 为本金与利息之和，简称**本利和**.

1.1.1 单利基本公式

单利(simple interest)是指获利不加入本金，每次都以原有的本金计利．比如，假定某项投资每年有 10%的获利，若以单利计算，投资 100 万元，每年可赚 10 万元，十年可以获利 100 万元，多出一倍.

单利的特点是无论存期有多长，利息都不加入本金．单利的基本公式是：

利息＝本金×利率×期数，$I = Pni$；

本利和＝本金＋利息，$F = P(1 + ni)$.

【例 1】 小刘将 2 000 元存入银行，年利率为 3%，试问：9 个月后结算时的本利和是多少？

解 计算利息时，利率与计息期数的时间单位须一致，月利率＝年利率÷12.

利息：$I = 2\ 000 \times 3\% \times \dfrac{9}{12} = 45$(元)；

本利和：$F = P + I = 2\ 000 + 45 = 2\ 045$(元).

即 9 个月后本利和是 2 045 元.

1.1.2 复利基本公式

银行按规定在一定时间结息一次，结息后即将利息并入本金，也就是将前一期的本金与利息的和作为后一期的本金来计算利息，逐期滚动计算，俗称“利滚利”，这种计算方法叫做**复利**(compound interest). 比如，设某投资年利率 10%，若以复利计算，每年实际赚取的“金额”会不断增加，投资 100 万元，第一年赚 10 万元，第二年赚的却是 110 万元的 10%，即 11 万元，第三年赚的则是 12.1 万元，第十年投资获得的利润是将近 160 万元，增长 1.6 倍，这就是所谓“复利的魔力”.

一般地，复利时各期的利息及期终本利和如表 1-1 所示：

表 1-1　复利各期利息及期终本利和表

时间	期初本金	利率	利息	期终本利和
第 1 期	P	i	Pi	$P(1+i)$
第 2 期	$P(1+i)$	i	$P(1+i)i$	$P(1+i)^2$
第 3 期	$P(1+i)^2$	i	$P(1+i)^2 i$	$P(1+i)^3$
…	…	i	…	…
第 n 期	$P(1+i)^{n-1}$	i	$P(1+i)^{n-1} i$	$P(1+i)^n$

所以复利的基本公式是：

第 n 期末的本利和 $F = P(1+i)^n$；

第 n 期末的利息　$I = P[(1+i)^n - 1]$.

【例 2】 银行贷款一般都采用“复利计息法”计算利息．张某从银行贷款 20 万元，贷款期限为 5 年，年利率为 6.84%，如果 5 年后一次性还款，那么张某应偿还银行多少钱？(以元为单位精确到分)

解　$F = 20 \times (1+6.84\%)^5 = 20 \times 1.0684^5 \approx 27.841\,934$ (万元).

答：张某应偿还银行 278 419.34 元.

技能训练 1.1

1. 现有初始本金 10 000 元，假设银行年储蓄利率为 2%，(1)按单利计算，3 年末的本利和为多少？(2)按复利计算，3 年末的本利和为多少？

2. 某人从银行贷款 10 000 元，贷款期限为 2 年，年利率为 6.84%，计算到期后，此人应偿还银行多少？

3. 某人于年初存入 10 万元，在年利率 10%、每半年复利计息一次的情况下，到第 10 年末，该人能得到的本利和是多少？

4. A 君和 B 君都欲向 C 君租房．A 君打算租一年的房子，租金在租前一次性付清；B 君同样打算租一年的房子，但租金在一年后支付．A 君愿意付 10 000 元，B 君愿意付 11 000 元．假设 B 君信誉良好，年利率为 15%，请问：C 君应该把房子租给谁？

§1.2　现值与终值

终值(future value)又称将来值，是现在一定量的资金折算到未来某一时点所对应的金额．**现值**(present value)是指未来某一时点上的一定量资金折算到现在所对应的金额．现实生活中计算利息时的本利和就是本金的终值，与终值相对应的初始本金就是该终值的现值，如图 1-1 所示.

银行年利率为 2%，100 元本金一年后的本利和是 102 元，那么，100 元一年后的终值就是 102 元，而一年后的 102 元的现值就是 100 元.

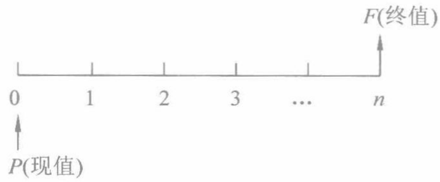

图 1-1　终值与现值图

1.2.1　单利的现值和终值

单利现值 $P=\dfrac{F}{1+ni}$；单利终值 $F=P(1+ni)$.

【例 1】　某人为了 10 年后能从银行取出 24 万元，在单利年利率 2%的情况下，目前应存入银行的金额是多少？

解　$P=\dfrac{F}{1+ni}=\dfrac{24}{1+10\times 2\%}=20$ (万元).

【例 2】　某人将 10 万元存入银行，单利年利率 2%，求 5 年后的终值.

解　$F=P(1+ni)=10(1+5\times 2\%)=11$ (万元).

1.2.2　复利的现值和终值

复利现值 $P=\dfrac{F}{(1+i)^n}$；复利终值 $F=P(1+i)^n$.

【例 3】　30 年之后要筹措到 300 万元的养老金，假设平均的年回报率是 3%，求现在必须投入的本金.

解　$P=\dfrac{F}{(1+i)^n}=\dfrac{3\ 000\ 000}{(1+3\%)^{30}}\approx 1\ 235\ 960$ (元).

【例 4】　某人将 10 000 元存入银行，复利年利率 2%，求 2 年后的终值.

解　$F=P(1+i)^n=10\ 000(1+2\%)^2=10\ 404$ (元).

技能训练 1.2

1. 某家长计划存一笔钱，3 年后儿子读大学用．已知存款的年利率是 3%，按单利计息，若 3 年后所需费用为 60 000 元，问：现在应存多少元？

2. 已知年利率为 5%，按单利计算，想要把 8 000 元变为 10 000 元，需要存款多少年？

3. 某人用 20 000 元作一项为期 18 个月的投资．该投资的年利率为 7.5%，按单利计算，问：该投资到期的终值为多少元？

4. 郑先生下岗获得 50 000 元现金补助，他决定存起来以解决自己的养老问题，先找工作糊口．若银行存款复利年利率为 3%，那么，20 年后这笔款项连本带利是多少？

5. 某人四年前在一项目里投资了一笔钱，年利率 9%，这笔钱现在的价值是70 582 元，问：他当初存了多少元？

§1.3 年金

所谓**年金**(annuity)，是指在一定时期内，每隔相等的时间收入或支出固定金额的系列款项．如某人退休后每年年末收到的养老金 10 000 元，即为年金．

年金按其每次收付款项发生的时点不同，可以分为普通年金(后付年金)、即付年金(先付年金)、递延年金(延期年金)、永续年金等类型．

1.3.1 普通年金

普通年金是指从第一期起，在一定时期内每期期末等额收付的系列款项，又称为**后付年金**，如图 1-2 所示．

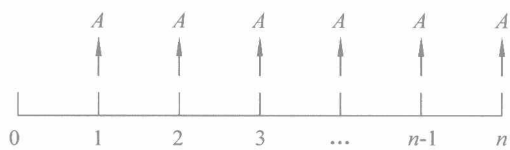

图 1-2 普通年金图

1. 普通年金终值

若每期期末发生年金为 A，利率为 i，共 n 期，那么在普通年金情况下，最后一期的年金 A 就发生在 n 期末，没有利息，如图 1-3 所示．

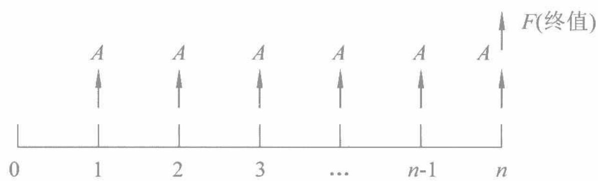

图 1-3 普通年金终值图

从最后一期往前推导，每期的本利和如表 1-2 所示：

表 1-2 普通年金各期年金的终值表

期　数	1	2	…	$n-1$	n
每期末年金	A	A	…	A	A
n 期末终值	$A(1+i)^{n-1}$	$A(1+i)^{n-2}$	…	$A(1+i)$	A

最后一行的和就是普通年金终值 F，它是一个公比为 $(1+i)$ 的等比数列前 n 项的和，即

$$F = A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = A(\frac{F}{A}, i, n).$$

式中 $(\frac{F}{A},i,n)=\frac{(1+i)^n-1}{i}$ 称为年金终值系数，可查附录 1“年金终值系数表”获得.

【例 1】 某企业进行技术改造，投资 80 万元，每年末可增加收入 20 万元，使用期是 10 年，试以 10%复利计息，计算该企业的净收益.

解 10 年收入的终值：$F=A\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}=20\times\frac{1.1^{10}-1}{0.1}=318.7$（万元），

投资终值：$80\times(1+0.1)^{10}=207.5$（万元），

净收益：$318.7-207.5=111.2$(万元).

2. 普通年金现值

如图 1-4 所示，已知每期期末等额收付的年金为 A，则每期年金的现值如表 1-3 所示：

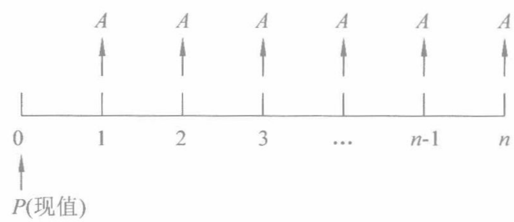

图 1-4 普通年金现值图

表 1-3 普通年金各期年金的现值表

期　数	1	2	3	…	n
每期末年金	A	A	A	…	A
现　值	$\frac{A}{1+i}$	$\frac{A}{(1+i)^2}$	$\frac{A}{(1+i)^3}$	…	$\frac{A}{(1+i)^n}$

最后一行之和是普通年金现值 P，是以 $\frac{1}{1+i}$ 为公比的等比数列前 n 项的和，即

$$P=A\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=A(\frac{P}{A},i,n).$$

式中 $(\frac{P}{A},i,n)=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ 的值可通过查附录 2“年金现值系数表”获得.

【例 2】 某人出国 3 年，请小李代付房租，每年租金为 1 万元，设银行存款利率为 10%，那么这个人应当现在存入多少钱？

解 $A=1$, $i=10\%$, $n=3$.

$$P=A\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=1\cdot\frac{1-(1+10\%)^{-3}}{10\%}\approx 2.4869(\text{万元}).$$

1.3.2 即付年金

即付年金是指从第一期起，在一定时期内每期期初等额收付的系列款项，又称**先**

付年金．即付年金与普通年金是年金的基本形式，区别仅在于付款时间的不同，普通年金发生在期末，而即付年金发生在期初，如图 1-5 所示．

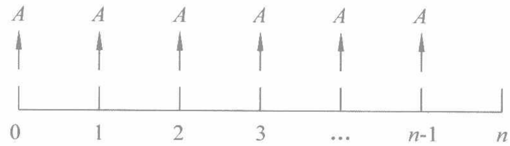

图 1-5 即付年金图

1. 即付年金终值

即付年金终值是指把即付年金每个等额 A 都换算成第 n 期期末的数值，再求和．

在即付年金的情况下，最后一期的年金 A 至期末的本利和是 $A(1+i)$，从最后一期往前推导，每期的本利和如表 1-4 所示：

表 1-4 即付年金各期年金的终值表

期　数	1	2	…	$n-1$	n
每期初年金	A	A	…	A	A
n 期末终值	$A(1+i)^n$	$A(1+i)^{n-1}$	…	$A(1+i)^2$	$A(1+i)$

最后一行之和就是即付年金终值 F，它是以 $(1+i)$ 为公比的等比数列前 n 项的和，即

$$F = A(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} = A(1+i)\left(\frac{F}{A},i,n\right).$$

【例 3】 某企业进行技术改造，投资 60 万元，每年初可减少费用 18 万元，使用期 10 年，以年利率 10%复利计息，试计算该企业的净收益．

解 10 年节支的终值：$F = 18\times1.1\times\frac{1.1^{10}-1}{0.1} = 315.6$（万元），

投资终值：$60\times(1+0.1)^{10} = 155.6$（万元），

净收益：$315.6 - 155.6 = 160$（万元）．

2. 即付年金现值

即付年金的现值就是把即付年金每个等额的 A 都换算成第一期期初的数值，再求和．

已知每期期初等额收付的年金是 A，则每期年金的现值如表 1-5 所示：

表 1-5 即付年金各期年金的现值表

期　数	1	2	3	…	n
每期初年金	A	A	A	…	A
现值	A	$\frac{A}{1+i}$	$\frac{A}{(1+i)^2}$	…	$\frac{A}{(1+i)^{n-1}}$

最后一行之和是即付年金现值 P，是公比为 $\frac{1}{1+i}$ 的等比数列前 n 项和，即

$$P = A(1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = A(1+i)\left(\frac{P}{A}, i, n\right).$$

【例 4】 某企业拟增添新设备一项，每年可增加收益 8 万元，使用期 10 年后报废．购买该设备的价值为 25 万元；如果租借该设备则每年初付租金 3 万元．试以年复利 8%分别计算购买与租借两种方案的净收益现值.

解 两种方案的年收益相同，每年收益 8 万元的现值是：

$$P_1 = A \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 8 \times \frac{1-1.08^{-10}}{0.08} = 53.68\text{（万元）}.$$

每年初付租金 3 万元的现值是：

$$P_2 = A(1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 3 \times 1.08 \times \frac{1-1.08^{-10}}{0.08} = 21.74\text{（万元）}.$$

所以，购买方案的净收益是：$53.68 - 25 = 28.68$（万元）.

租借方案的净收益是：$53.68 - 21.74 = 31.94$（万元）.

1.3.3 递延年金

递延年金是指第一次收付款发生时间与第一期无关，而是隔若干（m）期后才开始发生的系列等额收付款项，也称为**延期年金**，如图 1-6 所示.

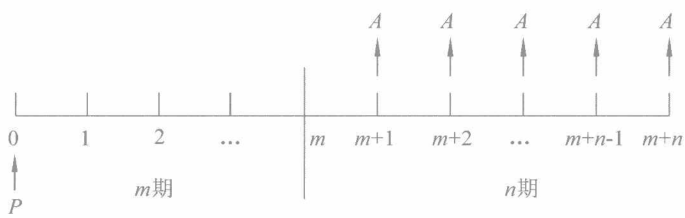

图 1-6 递延年金图

1. 递延年金终值

递延年金终值的计算与普通年金、即付年金的终值计算一样，只是要注意 n 是年金 A 发生的期数或 n 是连续收支期数，与递延期无关.

【例 5】 一项投资，前三年每年初投资 5 万元，第 4 年至第 6 年每年末投资 3 万元，若以复利年利率 6%计息，试计算该项投资在第 10 年末的终值.

解 前三年投资在第 10 年末的终值：

$F_1 = 5\,(1+0.06)^{10} + 5\,(1+0.06)^9 + 5\,(1+0.06)^8 = 25.37$（万元）；

第 4 到第 6 年投资在第 10 年末的终值：

$F_2 = 3\,(1+0.06)^6 + 3\,(1+0.06)^5 + 3\,(1+0.06)^4 = 12.06$（万元）.

该项投资在第 10 年末的终值是 $F_1 + F_2 = 37.43$（万元）.

2. 递延年金现值

如果在 m 期后的每一期期末发生年金 A，连续 n 期，如图 1-7 所示，

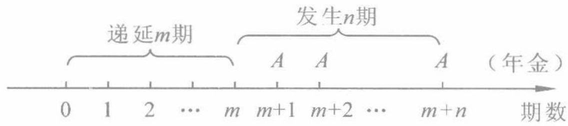

图 1-7　每期期末发生的递延年金图

则在 0 点的年金现值是

$$P=\frac{A}{(1+i)^{m+1}}+\frac{A}{(1+i)^{m+2}}+\cdots+\frac{A}{(1+i)^{m+n}},$$

在点 $m+n$ 的年金终值是

$$F=A\,(1+i)^{n-1}+A\,(1+i)^{n-2}+\cdots+A.$$

如果在 m 期后的每期期初发生年金 A，连续 n 期，如图 1-8 所示，

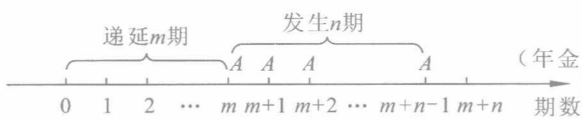

图 1-8　每期期初发生的递延年金图

则在 0 点的年金现值是

$$P=\frac{A}{(1+i)^{m}}+\frac{A}{(1+i)^{m+1}}+\cdots+\frac{A}{(1+i)^{m+n-1}},$$

在点 $m+n$ 的年金终值是

$$F=A(1+i)^{n}+A\,(1+i)^{n-1}+\cdots+A(1+i).$$

1.3.4　永续年金

永续年金是指无限期等额收付的特种年金，它是普通年金的特殊形式，即期限趋于无穷的普通年金，是一种没有终止的现金流量，如图 1-9 所示.

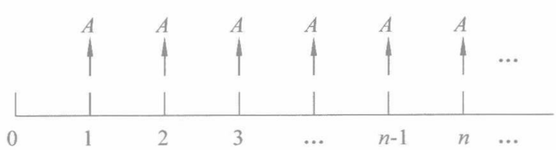

图 1-9　永续年金图

当年金的期数永远继续，即 $n\to\infty$ 时，就是永续年金．所以永续年金的终值是发散的；永续年金的现值可以看成是一个 n 为无穷大的普通年金的现值，即

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{A}{i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^{n}}\right]=\frac{A}{i}.$$

(参考第 2 章 2.2 极限)

有些永续性奖金，就是设立一笔基金 P，每期提取年金 A 作为奖金，年金可以永远提取，实际上每期只提取利息(即 $A=Pi$)，而基金 P 永远保持下去.

【例 6】 吴先生要设立奖学金，每年发放一次，奖励每年高考的文理科状元各 10 000 元. 奖学金的基金保存在银行，银行一年的定期存款利率为 2%，计算吴先生要投资的奖励基金是多少？

解 $A=20\ 000$, $i=2\%$, $n\to\infty$.

永续年金现值为：$P=\dfrac{A}{i}=\dfrac{20\ 000}{2\%}=1\ 000\ 000$（元）.

即吴先生要存入 1 000 000 元作为基金，才能保证这一奖学金的成功运行.

技能训练 1.3

1. 某人拟在 5 年后还清 10 000 元债务，从现在起每年末等额存入一笔款项，假设年利率为 10%，求每年需存入多少元？
2. 张女士购房一套，分期付款，每年年初付款 60 000 元，分 10 年付清. 若银行利率为 6%，则该项分期付款相当于一次现金支付的购买价是多少？
3. 建立一种永续性奖金，总额 1 万元，每年发放一次. 奖金的来源是使用基金存款的利息，若以年利率 2%计算，基金应为多少？
4. 解答案例 1、案例 2 和案例 3.

§1.4 票据贴现

票据贴现(discounted note)是票据所有人将未到期的票据所有权转让给银行，银行按照一定利率扣除贴现利息后支付给票据所有人现金的一种授信方式.

从定义看出，这里所说的票据是指具有债权的应收票据. 应收票据在现实经济生活中有带息和不带息两种，贴现时应根据具体情况计算贴现金额.

1.4.1 不带息票据贴现

不带息票据在票据持有人向银行申请贴现时，所获贴现金额按下列方法计算：

贴现金额＝票面金额－贴现利息(贴现利息归银行所有，贴现金额归票据持有人所有)，

贴现利息＝票面值×提前贴现期×贴现利率(注：利率和期限要匹配).

贴现期即提前支取的时间，从贴现之日起至票据到期之日止，按天计算，头尾只算一天.

【例 1】 企业 7 月 11 日将 6 月 20 日收到的一张承兑期为 60 天、金额为 100 000 元的商业承兑汇票到银行申请贴现，银行按月利率 0.6%计算，试问：扣除贴现利息后，银行付给企业现金多少？

解 提前贴现期＝60－20＝40，

贴现利息＝100 000×40×0.6%÷30

＝800(元)，

贴现金额＝100 000－800＝99 200(元).