

数理化竞赛辅导丛书

高 中 数 学
竞 赛 辅 导



广西教育出版社

•数理化竞赛辅导丛书•

高中数学竞赛辅导

袁绍唐 编著
曾繁烈
陈扩初

广西教育出版社

· 高中数学竞赛辅导 ·

导解竞赛学案中高

编著者
袁绍唐 曾繁烈 陈扩初 编著
审稿者
李鹤林

数理化竞赛辅导丛书

高中数学竞赛辅导

袁绍唐 曾繁烈 陈扩初 编著



广西教育出版社出版

(南宁市民族大道7号)

广西新华书店发行 广西大学印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 5.5印张 119千字

1990年5月第1版 1990年5月第1次印刷

印数：7001—20,000

ISBN 7-5435-0822-2/G·649 定价2.10元

目 录

(05)	去竞赛 章四数
(08)	用质数的基本性质 13
(18)	又一道几何真题 32
(28)	两个有趣的数学关系 52
(38)	甲乙的年龄 72
第一章 奇偶性分析 整除问题的证明方法 (1)	
§ 1	奇偶性分析和平方数 (1)
§ 2	整除基本性质及其应用举例 (8)
§ 3	用分类法证明整除问题，个位数定理 (12)
§ 4	能被 3、9、11 整除的数的特征 (16)
§ 5	费马小定理的应用 (19)
习题一 (22)
第二章 抽屉原理 简单图 最值方法 (26)	
§ 1	抽屉原理的应用方法 (26)
§ 2	借助简单图去解题 (37)
§ 3	组合问题的最大最小值方法 (42)
习题二 (47)
第三章 竞赛中常见的不等式 (50)	
§ 1	不等式的基本方法 (50)
§ 2	排序不等式 (57)
§ 3	平均不等式 (64)
§ 4	柯西不等式 (69)
§ 5	几何不等式 (72)
习题三 (76)

第四章 复数法	(80)
§ 1 复数的基本知识	(80)
§ 2 复数运算的几何意义	(81)
§ 3 有关复数法的几个定理	(83)
§ 4 复数法的应用	(91)
习题四	(107)
第五章 解平面几何问题的一些方法	(109)
§ 1 巧添辅助线	(109)
§ 2 几何变换	(111)
§ 3 面积问题与面积法	(119)
§ 4 凸包概念的应用	(132)
§ 5 平面几何的多解法	(136)
习题五	(143)
习题略解	(145)
(1)	圆内接四边形性质
(2)	圆外切四边形性质
(3)	圆内接六边形性质
(4)	圆内接八边形性质
(5)	圆内接十边形性质
(6)	圆内接十二边形性质
(7)	圆内接二十四边形性质
(8)	圆内接三十六边形性质
(9)	圆内接七十二边形性质
(10)	圆内接一百四十四边形性质
(11)	圆内接二百八十八边形性质
(12)	圆内接五百七十六边形性质
(13)	圆内接一千一百五十二边形性质
(14)	圆内接二千三百零四边形性质
(15)	圆内接四千六百零八边形性质
(16)	圆内接九千二百一十六边形性质
(17)	圆内接一万八千四百三十二边形性质
(18)	圆内接三万六千八百六十四边形性质
(19)	圆内接七万三千一百二十八边形性质
(20)	圆内接十四万六千五百五十六边形性质
(21)	圆内接二十九万三千一百一十二边形性质
(22)	圆内接五十八万六千二百二十四边形性质
(23)	圆内接一百一十七万三千四百四十八边形性质
(24)	圆内接二百三十四万六千八百九十六边形性质
(25)	圆内接四百六十九万三千七百九十二边形性质
(26)	圆内接九百三十八万七千五百八十四边形性质
(27)	圆内接一千八七十六万五千一百六十八边形性质
(28)	圆内接三千七十五万一千三百三十六边形性质
(29)	圆内接七千五百万二千六百七十二边形性质
(30)	圆内接一万五千万五千三百四十四边形性质
(31)	圆内接三万万一千三百零八边形性质
(32)	圆内接六万万二千五百二十六边形性质
(33)	圆内接十二万万五千零五十二边形性质
(34)	圆内接二十四万万一千三百零四边形性质
(35)	圆内接四十八万万二千五百二十六边形性质
(36)	圆内接九十六万万五千零五十二边形性质
(37)	圆内接一百九十二万万一千三百零四边形性质
(38)	圆内接三百八十四万万二千五百二十六边形性质
(39)	圆内接七百六十八万万五千零五十二边形性质
(40)	圆内接一千五百三十六万万一千三百零四边形性质
(41)	圆内接三千零七十二万万二千五百二十六边形性质
(42)	圆内接六千零一十四万万五千零五十二边形性质
(43)	圆内接一万二千零二十八万万一千三百零四边形性质
(44)	圆内接二万四千零五十六万万二千五百二十六边形性质
(45)	圆内接四万八千零十一万万五千零五十二边形性质
(46)	圆内接九万六千零二十二万万一千三百零四边形性质
(47)	圆内接一十九万二千零四十四万万二千五百二十六边形性质
(48)	圆内接三十八万四千零八十八万万五千零五十二边形性质
(49)	圆内接七十六万八千零一十七万万一千三百零四边形性质
(50)	圆内接一百五十三万六千零三十四万万二千五百二十六边形性质
(51)	圆内接三百零七万二千零六十八万万五千零五十二边形性质
(52)	圆内接六百一十四万四千零三十四万万一千三百零四边形性质
(53)	圆内接一千二百二十八万八千零六十八万万二千五百二十六边形性质
(54)	圆内接二千五百五十六万一千零三十四万万五千零五十二边形性质
(55)	圆内接五千一百一十二万四千零三十四万万一千三百零四边形性质
(56)	圆内接一万零二千二百六十四万万二千五百二十六边形性质
(57)	圆内接二万零四千五百二十六万万五千零五十二边形性质
(58)	圆内接四万零八千一百五十二万万一千三百零四边形性质
(59)	圆内接八万零一千五百二十六万万二千五百二十六边形性质
(60)	圆内接十六万零二千五百二十六万万五千零五十二边形性质
(61)	圆内接三十二万零五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(62)	圆内接六十四万零一万千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(63)	圆内接一百二十八万零二千五百二十六万万五千零五十二边形性质
(64)	圆内接三百零七万零五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(65)	圆内接六百一十四万零二千五百二十六万万二千五百二十六边形性质
(66)	圆内接一千二百二十八万零六千五百零五十二万万五千零五十二边形性质
(67)	圆内接二千五百五十六万零二千五百二十六万万一千三百零四边形性质
(68)	圆内接五千一百一十二万零二千五百二十六万万二千五百二十六边形性质
(69)	圆内接一万零二千零二十六万万五千零五十二边形性质
(70)	圆内接二万零四千零二十六万万一千三百零四边形性质
(71)	圆内接四万零八千零二十六万万二千五百二十六边形性质
(72)	圆内接八万零二千五百二十六万万五千零五十二边形性质
(73)	圆内接十六万零五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(74)	圆内接三十二万零一万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(75)	圆内接六十四万零二万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(76)	圆内接一百二十八万零四万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(77)	圆内接三百零七万零四万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(78)	圆内接六百一十四万零四万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(79)	圆内接一千二百二十八万零八万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(80)	圆内接二千五百五十六万零四万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(81)	圆内接五千一百一十二万零四万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(82)	圆内接一万零二万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(83)	圆内接二万零四万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(84)	圆内接四万零八万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(85)	圆内接八万零二万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(86)	圆内接十六万零五万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(87)	圆内接三十二万零一十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(88)	圆内接六十四万零二十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(89)	圆内接一百二十八万零四十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(90)	圆内接三百零七万零四十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(91)	圆内接六百一十四万零四十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(92)	圆内接一千二百二十八万零八十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(93)	圆内接二千五百五十六万零八十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(94)	圆内接五千一百一十二万零八十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(95)	圆内接一万零二十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(96)	圆内接二万零四十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(97)	圆内接四万零八十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(98)	圆内接八万零二十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(99)	圆内接十六万零五十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(100)	圆内接三十二万零一百万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(101)	圆内接六十四万零二百万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(102)	圆内接一百二十八万零四百万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(103)	圆内接三百零七万零四百万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(104)	圆内接六百一十四万零四百万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(105)	圆内接一千二百二十八万零八百万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(106)	圆内接二千五百五十六万零八百万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(107)	圆内接五千一百一十二万零八百万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(108)	圆内接一万零二十百万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(109)	圆内接二万零四十百万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(110)	圆内接四万零八十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(111)	圆内接八万零二十十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(112)	圆内接十六万零五十十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(113)	圆内接三十二万零一百十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(114)	圆内接六十四万零二百万十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(115)	圆内接一百二十八万零四百万十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(116)	圆内接三百零七万零四百万十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(117)	圆内接六百一十四万零四百万十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(118)	圆内接一千二百二十八万零八百万十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(119)	圆内接二千五百五十六万零八百万十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(120)	圆内接五千一百一十二万零八百万十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(121)	圆内接一万零二十百万十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(122)	圆内接二万零四十百万十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(123)	圆内接四万零八十万十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(124)	圆内接八万零二十十万十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(125)	圆内接十六万零五十十万十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(126)	圆内接三十二万零一百十万十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(127)	圆内接六十四万零二百万十万十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(128)	圆内接一百二十八万零四百万十万十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(129)	圆内接三百零七万零四百万十万十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(130)	圆内接六百一十四万零四百万十万十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(131)	圆内接一千二百二十八万零八百万十万十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(132)	圆内接二千五百五十六万零八百万十万十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(133)	圆内接五千一百一十二万零八百万十万十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(134)	圆内接一万零二十百万十万十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(135)	圆内接二万零四十百万十万十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(136)	圆内接四万零八十万十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(137)	圆内接八万零二十十万十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(138)	圆内接十六万零五十十万十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(139)	圆内接三十二万零一百十万十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(140)	圆内接六十四万零二百万十万十万五千零五十二万万二千五百二十六边形性质
(141)	圆内接一百二十八万零四百万十万十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质
(142)	圆内接三百零七万零四百万十万十万五千零五十二万万一千三百零四边形性质
(143)	圆内接六百一十四万零四百万十万十万五千零五十二万万五千零五十二边形性质

第一章 奇偶性分析 整除问题 的证明方法

本章出现的字母都代表整数， N 代表自然数集， Z 代表整数集。

§ 1 奇偶性分析和平方数

大家早已熟悉奇偶数的一些简单性质：奇偶性相同的两个整数的和（或差）是偶数，奇偶性不同的两个整数的和（或差）是奇数；奇数个奇数之和为奇数； a 与它的正整数次幂 a^n 有相同奇偶性，等等。不要以为这些性质很简单，解决不了较困难的问题，其实，只要能灵巧地运用它们，有许多较困难的问题（包括国际数学竞赛题）往往都能顺利解决。善于运用奇偶性分析方法，往往有“四两拔千斤”的效用。

先看看几个很简单的例题。

例 1 证明不存在整数 x 、 y 满足 $y^2 = x^2 + 1990$ 。

证明 若有整数 x 、 y 满足 $y^2 = x^2 + 1990$ ，那么

$$(y+x)(y-x) = 1990, \quad (1)$$

若 x 、 y 奇偶性不同，那么 $y+x$ 、 $y-x$ 皆为奇数，故 $(y+x)(y-x)$ 也是奇数，这与 (1) 式矛盾；若 x 、 y 奇偶性相同，则 $y+x$ 、 $y-x$ 皆为偶数，即 $y+x$ 、 $y-x$ 都是 2 的倍数，因此 $(y+x)(y-x)$ 是 4 的倍数，这也与 (1) 式矛盾（1990 不是 4 的倍数）。所以不能有整数 x 、 y 满足 $y^2 = x^2 + 1990$ 。

例 2 沿江顺次有 A_1, A_2, \dots, A_6 六个码头，相邻两码

头的距离相等。清晨有甲、乙两船从 A_1 码头开出，各自在这些码头间来回运货，傍晚甲船停在 A_6 码头，乙船停在 A_1 码头。证明这一天甲船与乙船各自所走的总里程不相等（要求船在相邻码头间航行时不改变航向）。（福州市1981年竞赛题）

解 设相邻两码头的距离为 d ，则甲船从 A_1 到 A_6 距离为 $5d$ ，而往返来回运货只增加了偶数倍 d 的路程，所以甲船当天航行了奇数倍 d 的路程。但乙船从 A_1 出发最后回到 A_1 ，航行了偶数倍 d 的路程。所以甲、乙两船航行了不同的路程。

例 3 已知整系数方程

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

的 $(b+c)d$ 为奇数，证明它没有整数根。（1963年北京市竞赛题）

证明 $\because (b+c)d$ 为奇数， $\therefore b+c$ 与 d 都为奇数。既然 d 为奇数，方程(2)没有偶数根；对于奇数 x ， x^3+d 为偶数，而 bx^2 与 b 奇偶性相同， cx 与 c 奇偶性相同，但 $b+c$ 为奇数， $\therefore b$ 与 c 奇偶性不同， $\therefore bx^2$ 和 cx 奇偶性也不同， $\therefore bx^2+cx$ 为奇数，从而

$$x^3 + bx^2 + cx + d = \text{奇数} \neq 0$$

即方程(2)也无奇数根。因此方程(2)无整数根。

例 4 证明空间不可能存在这样的多面体，它有奇数个面，每个面的边数都是奇数。（1956年北京市数学竞赛题）

证明 设多面体有 k 个面，各个面的边数为 n_1, n_2, \dots, n_k ，注意到多面体每条棱作为两个面的公共边（这是这类题的关键之处），所以多面体棱数为

$$l = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{2}$$

如果 k 和 n_1, n_2, \dots, n_k 都为奇数， l 就不是整数，矛盾了。

类似于例 4 的讨论，可以证明：

例 5 参加某次学术讨论会共有 97 个人，已知每个人至少和 3 位与会学者讨论过问题，证明：至少有一人起码和 4 个人讨论过问题。

这是因为每次双方讨论产生两次“单方讨论”，若每人只进行了 3 次“单方讨论”，总共有 $3 \times 97 = 291$ 次“单方讨论”，不成偶数而矛盾。故总有一人至少有四次讨论。

例 6 七个杯子口朝下摆在桌子上，每次翻转四个杯子，经过若干次这样的翻转，问可不可以出现全部杯子口朝上的情形？

解 每次翻转四个杯子是不可能出现全部杯子口朝上的情形。

这是因为每翻转一个杯子，口朝下的杯子个数的奇偶性改变了，所以每次翻动四个杯子时口朝下的杯子个数的奇偶性不变。因为开始口朝下的杯子的个数为 7（奇数），任何次的变动（翻转四个）后口朝下的杯子个数仍为奇数，不可能出现个数为 0 的情形（口全朝上情形）。

类似这六个例子的简单问题有许许多多，只要养成了奇偶性分析的习惯，就很容易解决。不过，在近年的数学竞赛中出现的奇偶性分析题，不再这么单纯、容易了，它要配合一些（并非很复杂）知识，例如平方数的特点，抽屉原理等等，只要善于综合运用，较难的题也不见得难。

我们先介绍几个平方数的性质：

（1）偶数的平方必被 4 整除（易证）。

(2) 奇数的平方减1必被8整除，或者说奇数 n 的平方 $n^2 = 8a+1$ (a 为某整数)。

这是因为奇数 $n = 2k+1$, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k(k+1)+1$, 但 $k(k+1)$ 为偶数, $\therefore k(k+1) = 2a$, $\therefore n^2 = 8a+1$.

(3) 平方数的个位数只能取 $0, 1, 4, 5, 6, 9$ 这六个数(易证)。

(4) 平方数与平方数之乘积仍为平方数(易证); 平方数与非平方数之乘积必为非平方数。(后面这个结论很重要, 但要利用质因数分解定理, 在此略去其证明, 其结论都是到处可用的)。

例7 证明 $\underbrace{1\dots 1}_n, \underbrace{2\dots 2}_n, \dots, \underbrace{9\dots 9}_n$ 都不是平方数

($n > 1$)。

证明 11和111显然不是平方数, 而 $n > 3$ 时 $11\dots 1 = \underbrace{1\dots 1}_{n-3} 1000 + 111 = 8k+7$ (k 为某整数), 由性质(2)知 $8k+7$ 形的奇数不是平方数, 所以 $1\dots 1$ 不是平方数。

由性质(3), 平方数的个位数不能为2、3、7、8, 所以 $2\dots 2, 3\dots 3, 7\dots 7, 8\dots 8$ 不是平方数。

由于 $1\dots 1$ 不是平方数, 所以它乘上4或9之后的 $4\dots 4, \underbrace{9\dots 9}_n$ 也不是平方数(性质(4)), 偶数 $6\dots 6 = 2 \times 3\dots 3$ 不

是 4 的倍数，所以它也不是平方数，最后， $5 \cdots 5 = 5 \cdots 5000$

$+ 555 = 8k + 3$ ，不是 $8k + 1$ 形，它也不是平方数。

下面我们用奇偶性分析方法和平方数性质解决几道较复杂的题目。

例 8 证明 $5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1985$ 无整数解（第 26 届 IMO 题）。

证明 若有整数 m, n 满足

$$5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1985,$$

$$\text{则 } 25m^2 - 30mn + 35n^2 = 5 \times 1985,$$

$$\therefore (5m - 3n)^2 + 26n^2 = 8 \times 1240 + 5, \quad (3)$$

由于右边为奇数，所以 $(5m - 3n)^2$ 也为奇数，即

$$(5m - 3n)^2 = 8k + 1, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

此时若 n 为奇数，则 $n^2 = 8l + 1 \quad (l \in \mathbb{Z})$ ， $26n^2 = 8t + 2$ ($t \in \mathbb{Z}$)，由(3)式得

$$(8k + 1) + (8t + 2) = 8 \times 1240 + 5$$

此乃矛盾；若 n 为偶数，则 $26n^2 = 8l \quad (l \in \mathbb{Z})$ ，(3)式成为

$$8k + 1 + 8l = 8 \times 1240 + 5$$

此也矛盾。所以无整数满足 $5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1985$ 。

此题若将 1985 改为 1987，命题仍成立。

例 9 设 n 边形 A_1, A_2, \dots, A_n 为平面上的等边 n 边形，每顶点都是格点（纵横坐标为整数的点），证明 n 必为偶数。

证明 设顶点 A_i 坐标为 (x_i, y_i) ，所以 x_i, y_i 为整数， $i = 1, 2, \dots, n$ 。此时有

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = \dots$$

$(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2$ 为两整数之平方和。
 记 $\alpha_i = x_i - x_{i+1}$ ($\alpha_n = x_n - x_1$), $\beta_i = y_i - y_{i+1}$ ($\beta_n = y_n - y_1$), $1 \leq i < n$, 则

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 = \dots = \alpha_n^2 + \beta_n^2 \quad (4)$$

另方面明显地

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0, \quad \beta_1 + \dots + \beta_n = 0 \quad (5)$$

我们目的是证明满足(4)、(5)的整数组的 n 为偶数。

由于两整数之平方和只有三种情形: $\alpha^2 + \beta^2 = 8k + 2$ (α, β 都为奇数), $\alpha^2 + \beta^2 = 4k + 1$ (α, β 一奇一偶), $\alpha^2 + \beta^2 = 4k$ (α, β 都为偶数)。所以, 由(4)式可知:

①当 α_1, β_1 都为奇数, 则 $\alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \dots, \alpha_n, \beta_n$ 全为奇数。此时再由(5)式有

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$$

$\therefore n$ 为偶数 (因为奇数个奇数之和不为零)。

②当 α_1, β_1 是一奇一偶, 则 α_2, β_2 也是一奇一偶, \dots , α_n, β_n 也是一奇一偶。这就是说, $2n$ 个数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ 中有 n 个奇数, n 个偶数。但由(5)式

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \dots + \beta_n = 0$$

$\therefore n$ 又必为偶数 (因为奇数个奇数之和不等于偶数)。

③当 α_1, β_1 都为偶数, 则 α_2, β_2 也都为偶数, \dots, α_n, β_n 也都为偶数。这时取

$$\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{2}, \quad \beta'_i = \frac{\beta_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n$$

则由(4)、(5)式立得相应的

$$\alpha'^2_1 + \beta'^2_1 = \dots = \alpha'^2_n + \beta'^2_n \quad (6)$$

$$\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n = 0, \quad \beta'_1 + \cdots + \beta'_n = 0$$

如果有某 α'_i 或 β'_j 为奇数，仿上面情形①、②可知 n 为偶数；若各 α'_i, β'_j 仍都为偶数，再约去因子 2 得 α''_i, β''_j ，如此讨论下去，经过有限步骤之后总有某些 α_i 或 β_j 出现奇数，就知道 n 为偶数了。

上面的证明方法叫做递降法，它是处理整数问题的一个常用方法，其理论依据是任何正整数集合总有最小值，而且从这集合中任意一个数开始递减取下去，有限步后就达到最小值。下面例 10 和习题一的题 30（1988 年 IMO 题）都可用递降法处理。

例 10 证明不存在非零整数 x, y, z 满足

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^n xyz, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

证明 若有 x, y, z 满足(8)式，则 x, y, z 只能是两个奇数一个偶数，或者全为偶数。

当 x, y, z 有两个是奇数一个是偶数，则 $x^2 + y^2 + z^2 = 4k + 2$ ，但 $4 \mid 2^n xyz$ ，所以(8)式不成立。

当 x, y, z 全为偶数，则取

$$x' = \frac{x}{2}, \quad y' = \frac{y}{2}, \quad z' = \frac{z}{2}$$

此时 x', y', z' 满足

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2^{n+1} x' y' z' \quad (9)$$

由上面已讨论过的情形知 x', y', z' 不能有奇数，于是全为偶数，由此又作

$$x'' = \frac{x'}{2}, \quad y'' = \frac{y'}{2}, \quad z'' = \frac{z'}{2}$$

等等。由于 x 不能永远被 2 除下去都仍得偶数（除非为 0），因此总会出现矛盾。可见也不会有偶数 x, y, z 满足(8)。

所以方程(8)没有非零的整数解。

例11 能否把 $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, 1990, 1990$ 这3980个数排成一数列 $C_1, C_2, \dots, C_{3980}$, 使得两个1之间只有一个数, 两个2之间只有两个数, …, 两个1990之间有1990个数?

解 这个问题解法很多, 用奇偶性分析方法比较简单。设所要求数列存在, 记为 $C_1, C_2, \dots, C_{3980}$, 设它们中等于 i 的两项各为 C_{a_i}, C_{b_i} , $a_i < b_i$, 则按要求有

$$\therefore \sum_{i=1}^{1990} (b_i + a_i - 2a_i) = \sum_{i=1}^{1990} (i+1) = 1990 + \sum_{i=1}^{1990} i$$

$$(8) \therefore \sum_{i=1}^{1990} (b_i + a_i) - 2 \sum_{i=1}^{1990} a_i = 1990 + \sum_{i=1}^{1990} i$$

但是, $\sum_{i=1}^{1990} (a_i + b_i) = \sum_{k=1}^{3980} k$ 是偶数, $2 \sum_{i=1}^{1990} a_i$ 和 1990 也是偶数, 而 $\sum_{i=1}^{1990} i = 995 \times 1991$ 是奇数, 这乃矛盾。所以不存在所求的数列。

由上可见, 奇偶性分析方法的确用处很大, 但通常还要辅以一些其它手段和工具。只要养成奇偶性分析的习惯, 逐渐积累经验, 有许多难题也可以迎刃而解。本章习题一的1—11都是这方面的练习。

§ 2 整除基本性质及其应用举例

一、几个基本概念

对于整数 a, b, c , $b \neq 0$, 若有 $a = bc$, 就说 b 整除 a , 或说 a 被 b 整除, 记为 $b|a$ 。也就是说, a 的非零因数 b 必整

除 a 。若 b 不能整除 a , 就记为 $b \nmid a$ 。显然有下面简单性质:

(1) 若 $c|b$, $b|a$, 则 $c|a$;

(2) 若 $c|a$, $c|b$, 则 $c|(a+b)$; 更一般还有 $c|(ka+lb)$;
若 $c|a$, $c \nmid b$, 则 $c \nmid (a+b)$;

(3) 若 $c|a$, $d|b$, 则 $cd|ab$;

(4) 若 $mb|ma$, 则 $b|a$;

(5) 若 $a > 0$, $b > 0$, $b|a$, 则 $b \leq a$.

a 、 b 的公因数中最大者, 称为 a 、 b 的最大公因数, 记为 (a, b) ; a 、 b 的正公倍数中最小那个称为 a 、 b 的最小公倍数, 记为 $[a, b]$.

当 $(a, b) = 1$, 就说 a 与 b 互质。

只有1和本身这两个正因数的正整数称为素数(质数),
从小到大排列的素数是(有无穷个):

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ……

素数有一个很基本的性质: 若素数 $p \nmid a$, 则 p 与 a 互质。这是因为当 $p \nmid a$, 必有 $(p, a) \neq p$, $\therefore (p, a) = 1$.

二、两个基本性质和一个基本公式

关于整除性, 除了上面几个简单性质, 下面两个基本性质特别重要, 虽然它们的证明在这里不能介绍, 但在任何竞赛中是完全可以应用的, 因为它们是众所皆知的, 课堂外完全可应用。

基本性质 I 如果 $(a, b) = 1$, 则 $(a, bc) = (a, c)$ 。特别地, 有两个推论(应用较多):

推论一 若 $(a, b) = 1$, $a|bc$, 则 $a|c$;

推论二 若 $(a, b) = 1$, $(a, c) = 1$, 则 $(a, bc) = 1$.

基本性质 II 设 $(a, b) = 1$, $a|N$, $b|N$, 则 $ab|N$.

例如, 如能证明 $2|N$, $5|N$, 就说明 $10|N$.

基本公式

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

或更简单地 $a^n - b^n = (a - b) \cdot m$ ($m \in \mathbb{Z}$).

例 12 证明 $6 | a^3 - a$, a 为任意整数.

证明 $\because a^3 - a = (a - 1)a(a + 1)$, 连续三个整数中必有一个被 3 整除, 又必有一个被 2 整除, 因此 $3 | a^3 - a$, $2 | a^3 - a$, 由此 $6 | a^3 - a$.

例 13 设 $n \in \mathbb{N}$, 证明 $n! 6^n | (3n)!.$

证明 $\because 3n(3n-3)(3n-6)\cdots 6 \cdot 3 = 3^n \cdot n!$, 而 $2 | (3n-1)(3n-2)$, $2 | (3n-4)(3n-5)$, $2 | (3n-7)(3n-8)$, 等等,

$$\begin{aligned}\therefore 2^n &| (3n-1)(3n-2)(3n-4)(3n-5)(3n-7)(3n-8) \\ &\cdots 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \\ \therefore 2^n \cdot 3^n \cdot n! &| (3n)!\end{aligned}$$

例 14 设 p 为素数, 则对 $r = 1, 2, \dots, p-1$ 都有

$$p | C_p^r \quad (C_p^r = \frac{p(p-1)\cdots(p-r+1)}{r!}).$$

证明 $\because C_p^r$ 为整数, $\therefore r! | p(p-1)\cdots(p-r+1)$. 由于 $r < p$, $\therefore (r, p) = 1$, 以及 $(r-1, p) = 1$, $(r-2, p) = 1$, \dots , $(2, p) = 1$, 因此由性质 I 有 $(r!, p) = 1$, 因此 $r! | (p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)$. 这就是说,

$$\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)}{r!} = a$$

是整数而 $C_p^r = p \cdot a$, $\therefore p | C_p^r$.

例 15 已知有 n 使 $1987 | \underbrace{11\cdots 1}_n$, 证明对此 n 也有

$$1987 \mid 1\cdots 1 \underbrace{9\cdots 9}_{n+1} \underbrace{8\cdots 8}_{n+1} \underbrace{7\cdots 7}_{n+1}$$

(1987年全国初中数学竞赛题)。

证明 记 $N = 1\cdots 1$, $A = 1\cdots 1 \underbrace{9\cdots 9}_{n+1} \underbrace{8\cdots 8}_{n+1} \underbrace{7\cdots 7}_{n+1}$.

注意到

$$10^n = \underbrace{9\cdots 9}_{n+1} + 1 = 9N + 1,$$

$$10^{kn} = (9N + 1)^k = lN + 1, \quad (l \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{1\cdots 1}_{n+1} \times 10^{3n+3} + \underbrace{9\cdots 9}_{n+1} \times 10^{2n+2} + \underbrace{8\cdots 8}_{n+1} \times 10^{n+1} + 7\cdots 7 \\ &= (\underbrace{1\cdots 1}_{n} \times 10^{3n+4} + 10^{3n+3}) + (\underbrace{9\cdots 9}_{n} \times 10^{2n+3} + 10^{2n+2} \times 9) \\ &\quad + (\underbrace{8\cdots 8}_{n} \times 10^{n+2} + 10^{n+1} \times 8) + (7\cdots 7 \times 10 + 7) \\ &= N \times (10^{3n+4} + 9 \times 10^{2n+3} + 8 \times 10^{n+2} + 7 \times 10) \\ &\quad - 1000 \times 10^{3n} + 900 \times 10^{2n} + 80 \times 10^n + 7 \\ &= N \times (10^{3n+4} + 9 \times 10^{2n+3} + 8 \times 10^{n+2} + 7 \times 10) \\ &\quad + 1000 \times (l_1 N + 1) + 900 \times (l_2 N + 1) \\ &\quad + 80 \times (l_3 N + 1) + 7 \\ &= N \cdot k + 1987, \quad (k \text{ 为某整数}) \end{aligned}$$

而 $1987 \mid N$, $\therefore 1987 \mid A$.
在例15中多次用到二项定理. 确实, 二项定理在证明整除问题中是非常有用的, 下面两例都是借助二项定理来解决的.

例16 证明 $64 \mid 9^n - 8n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

证明 当 $n=1$ 时命题明显成立, 当 $n>1$ 时

$$\because 9^n = (8+1)^n = 1 + 8n + 8^2k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore 64k = 9^n - 8n - 1, \therefore 64 | 9^n - 8n - 1.$$

例17 设 p 为奇素数, $p | a+b$, $p \nmid b$, 则

$$p \mid \frac{a^p + b^p}{a+b}, \text{ 但 } p^2 \nmid \frac{a^p + b^p}{a+b}.$$

证明 $\because \frac{a^p + b^p}{a+b} = \frac{(a+b-b)^p + b^p}{a+b}$

$$= \frac{[(a+b)^p - pb(a+b)^{p-1} + \dots + p(a+b)b^{p-1} - b^p] + b^p}{a+b}$$

$$= (a+b)^{p-1} - pb(a+b)^{p-2} + \dots - C_p^{p-2}(a+b)b^{p-2} + pb^{p-1},$$

而 $p | a+b$, $\therefore p \mid \frac{a^p + b^p}{a+b}$.

但 $p^2 | (a+b)^2$ 以及 $p^2 | C_p^{p-2}(a+b)$,

而 $p^2 \nmid pb$ ($\because p \nmid b$),

$$\therefore p^2 \nmid \frac{a^p + b^p}{a+b}.$$

§3 用分类法证明整除问题, 个位数定理

在证明整除问题时, 分类法是很有用的。分类法实质上是“同余”的方法, 但我们不准备引进数论课本中的那套同余理论, 而宁愿用分类法的简易叙述, 这样更为实用易懂, 而且一样有效。

奇偶性分析方法实际上就是将整数集 \mathbb{Z} 分为奇数与偶数来讨论问题的方法。在讨论平方数时, 又将 \mathbb{Z} 分为八类来考虑: $8k, 8k \pm 1, 8k \pm 2, 8k \pm 3, 8k + 4$, 并且知道只有 $8k+1$ 那类的数才有可能成为奇数的平方数, 只有 $8k$ 和 $8k+4$ 这两类