数理化竞赛辅导丛书

高中数学竞赛辅导

广西教育出版社

·数理化竞赛辅导丛书·

高中数学竞赛辅导

袁绍唐
曾紫烈　编著
陈矿初

广西教育出版社

数理化竞赛辅导丛书

高中数学竞赛辅导

袁绍唐　曾繁烈　陈矿初　编著

☆

广西教育出版社出版

（南宁市民族大道7号）

广西新华书店发行　广西大学印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　5.5印张　119千字

1990年5月第1版　1990年5月第1次印刷

印数：7001—20,000

ISBN 7-5435-0822-2/G·649　　定价2.10元

目 录

第一章　奇偶性分析　整除问题的证明方法

本章出现的字母都代表整数，N 代表自然数集，Z 代表整数集.

§1　奇偶性分析和平方数

大家早已熟悉奇偶数的一些简单性质：奇偶性相同的两个整数的和(或差)是偶数，奇偶性不同的两个整数的和（或差）是奇数；奇数个奇数之和为奇数；a 与它的正整数次幂 a^n 有相同奇偶性，等等. 不要以为这些性质很简单，解决不了较困难的问题，其实，只要能灵巧地运用它们，有许多较困难的问题（包括国际数学竞赛题）往往都能顺利解决. 善于运用奇偶性分析方法，往往有"四两拔千斤"的效用.

先看看几个很简单的例题.

例 1　证明不存在整数 x、y 满足 $y^2=x^2+1990$.

证明　若有整数 x、y 满足 $y^2=x^2+1990$，那么

$$(y+x)(y-x)=1990, \tag{1}$$

若 x、y奇偶性不同，那么$y+x$、$y-x$皆为奇数，故$(y+x)(y-x)$也是奇数，这与（1）式矛盾；若 x、y 奇偶性相同，则 $y+x$、$y-x$皆为偶数，即 $y+x$、$y-x$都是 2 的倍数，因此 $(y+x)(y-x)$ 是 4 的倍数，这也与（1）式矛盾（1990不是 4 的倍数）. 所以不能有整数 x、y 满足 $y^2=x^2+1990$.

例 2　沿江顺次有 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 六个码头，相邻两码

头的距离相等．清晨有甲、乙两船从 A_1 码头开出，各自在这些码头间来回运货，傍晚甲船停在 A_6 码头，乙船停在 A_1 码头．证明这一天甲船与乙船各自所走的总里程不相等（要求船在相邻码头间航行时不改变航向）．（福州市1981年竞赛题）

解 设相邻两码头的距离为 d，则甲船从 A_1 到 A_6 距离为 $5d$，而往返来回运货只增加了偶数倍 d 的路程，所以甲船当天航行了奇数倍 d 的路程．但乙船从 A_1 出发最后回到 A_1，航行了偶数倍 d 的路程．所以甲、乙两船航行了不同的路程．

例 3 已知整系数方程

$$x^3+bx^2+cx+d=0 \qquad (2)$$

的 $(b+c)d$ 为奇数，证明它没有整数根。（1963年北京市竞赛题）

证明 $\because (b+c)d$ 为奇数，$\therefore b+c$ 与 d 都为奇数．既然 d 为奇数，方程（2）没有偶数根；对于奇数 x，x^3+d 为偶数，而 bx^2 与 b 奇偶性相同，cx 与 c 奇偶性相同，但 $b+c$ 为奇数，$\therefore$ b 与 c 奇偶性不同，$\therefore$ bx^2 和 cx 奇偶性也不同，$\therefore$ bx^2+cx 为奇数，从而

$$x^3+bx^2+cx+d=\text{奇数}\neq 0$$

即方程（2）也无奇数根．因此方程（2）无整数根．

例 4 证明空间不可能存在这样的多面体，它有奇数个面，每个面的边数都是奇数．（1956年北京市数学竞赛题）

证明 设多面体有 k 个面，各个面的边数为 $n_1, n_2, \cdots n_k$，注意到多面体每条棱作为两个面的公共边（这是这类题的关键之处），所以多面体棱数为

$$l=\frac{n_1+n_2+\cdots+n_k}{2}$$

如果 k 和 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 都为奇数，l 就不是整数，矛盾了。

类似于例 4 的讨论，可以证明：

例 5　参加某次学术讨论会共有97个人，已知每个人至少和 3 位与会学者讨论过问题，证明：至少有一人起码和 4 个人讨论过问题。

这是因为每次双方讨论产生两次“单方讨论”，若每人只进行了 3 次“单方讨论”，总共有$3\times97=291$次“单方讨论”，不成偶数而矛盾. 故总有一人至少有四次讨论.

例 6　七个杯子口朝下摆在桌子上，每次翻转四个杯子，经过若干次这样的翻转，问可不可以出现全部杯子口朝上的情形？

解　每次翻转四个杯子是不可能出现全部杯子口朝上的情形.

这是因为每翻转一个杯子，口朝下的杯子个数的奇偶性改变了，所以每次翻动四个杯子时口朝下的杯子个数的奇偶性不变. 因为开始口朝下的杯子的个数为 7（奇数），任何次的变动（翻转四个）后口朝下的杯子个数仍为奇数，不可能出现个数为 0 的情形（口全朝上情形）.

类似这六个例子的简单问题有许许多多，只要养成了奇偶性分析的习惯，就很容易解决. 不过，在近年的数学竞赛中出现的奇偶性分析题，不再这么单纯、容易了，它要配合一些（并非很复杂）知识，例如平方数的特点，抽屉原理等等，只要善于综合运用，较难的题也不见得难.

我们先介绍几个平方数的性质：

（1）　偶数的平方必被 4 整除（易证）.

（2） 奇数的平方减1必被8整除，或者说奇数n的平方 $n^2=8a+1$（a为某整数）.

这是因为奇数 $n=2k+1$, $n^2=(2k+1)^2=4k(k+1)+1$，但 $k(k+1)$为偶数，$\therefore\ k(k+1)=2a$，$\therefore\ n^2=8a+1$.

（3） 平方数的个位数只能取 0，1，4，5，6，9 这六个数（易证）.

（4） 平方数与平方数之乘积仍为平方数（易证）；平方数与非平方数之乘积必为非平方数.（后面这个结论很重要，但要利用质因数分解定理，在此略去其证明，其结论都是到处可用的）.

例 7 证明 $\underbrace{1\cdots1}_{n}$，$\underbrace{2\cdots2}_{n}$，……，$\underbrace{9\cdots9}_{n}$ 都不是平方数（$n>1$）.

证明 11 和 111 显然不是平方数，而$n>3$时 $\underbrace{11\cdots1}_{n}=\underbrace{1\cdots1}_{n-3}000+111=8k+7$（$k$为某整数），由性质（2）知 $8k+7$ 形的奇数不是平方数，所以 $\underbrace{1\cdots1}_{n}$不是平方数.

由性质（3），平方数的个位数不能为 2、3、7、8，所以 $\underbrace{2\cdots2}_{n}$、$\underbrace{3\cdots3}_{n}$、$\underbrace{7\cdots7}_{n}$、$\underbrace{8\cdots8}_{n}$ 不是平方数.

由于 $\underbrace{1\cdots1}_{n}$不是平方数，所以它乘上 4 或 9 之后的$\underbrace{4\cdots4}_{n}$，$\underbrace{9\cdots9}_{n}$ 也不是平方数（性质（4））；偶数 $\underbrace{6\cdots6}_{n}=2\times\underbrace{3\cdots3}_{n}$ 不

是 4 的倍数，所以它也不是平方数，最后，$\underbrace{5\cdots5}_{n}=\underbrace{5\cdots5}_{n-3}000$ $+555=8k+3$，不是 $8k+1$ 形，它也不是平方数。

下面我们用奇偶性分析方法和平方数性质解决几道较复杂的题目。

例 8 证明 $5m^2-6mn+7n^2=1985$ 无整数解（第26届 IMO 题）。

证明 若有整数 m、n 满足

$$5m^2-6mn+7n^2=1985,$$

则 $25m^2-30mn+35n^2=5\times1985,$

$$\therefore (5m-3n)^2+26n^2=8\times1240+5, \qquad (3)$$

由于右边为奇数，所以 $(5m-3n)^2$ 也为奇数，即

$$(5m-3n)^2=8k+1,\quad (k\in Z)$$

此时若 n 为奇数，则 $n^2=8l+1$ $(l\in Z)$，$26n^2=8t+2$ $(t\in Z)$，由（3）式得

$$(8k+1)+(8t+2)=8\times1240+5$$

此乃矛盾；若 n 为偶数，则 $26n^2=8l$ $(l\in Z)$，（3）式成为

$$8k+1+8l=8\times1240+5$$

此也矛盾。所以无整数满足 $5m^2-6mn+7n^2=1985$。

此题若将1985改为1987，命题仍成立。

例 9 设 n 边形 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为平面上的等边 n 边形，每顶点都是格点（纵横坐标为整数的点），证明 n 必为偶数。

证明 设顶点 A_i 坐标为 (x_i,y_i)，所以 x_i，y_i 为整数，$i=1,2,\cdots,n$。此时有

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=\cdots$$

$$=(x_n-x_1)^2+(y_n-y_1)^2$$

记 $\alpha_i=x_i-x_{i+1}$（$\alpha_n=x_n-x_1$），$\beta_i=y_i-y_{i+1}$（$\beta_n=y_n-y_1$），$1\leqslant i<n$，则

$$\alpha_1^2+\beta_1^2=\alpha_2^2+\beta_2^2=\cdots=\alpha_n^2+\beta_n^2 \tag{4}$$

另方面明显地

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n=0,\ \beta_1+\cdots+\beta_n=0 \tag{5}$$

我们目的是证明满足(4)、(5)的整数组的 n 为偶数.

由于两整数之平方和只有三种情形：$\alpha^2+\beta^2=8k+2$（α、β 都为奇数），$\alpha^2+\beta^2=4k+1$（α、β 一奇一偶），$\alpha^2+\beta^2=4k$（α、β 都为偶数）. 所以，由(4)式可知:

①当 α_1、β_1 都为奇数，则 $\alpha_2,\beta_2,\alpha_3,\beta_3,\cdots,\alpha_n,\beta_n$ 全为奇数. 此时再由(5)式有

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n=0$$

∴ n 为偶数（因为奇数个奇数之和不为零）.

②当 α_1,β_1 是一奇一偶，则 α_2,β_2 也是一奇一偶，…，α_n,β_n 也是一奇一偶. 这就是说，$2n$ 个数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1\cdots,\beta_n$ 中有 n 个奇数，n 个偶数. 但由(5)式

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\beta_1+\cdots+\beta_n=0$$

∴ n 又必为偶数（因为奇数个奇数之和不等于偶数）.

③当 α_1,β_1 都为偶数，则 α_2,β_2 也都为偶数，…，α_n,β_n 也都为偶数. 这时取

$$\alpha_i'=\frac{\alpha_i}{2},\quad \beta_i'=\frac{\beta_i}{2},\ i=1,\cdots,n$$

则由(4)、(5)式立得相应的

$$\alpha_1'^2+\beta_1'^2=\cdots=\alpha_n'^2+\beta_n'^2 \tag{6}$$

$$\alpha_1'+\cdots+\alpha_n'=0,\ \beta_1'+\cdots+\beta_n'=0$$

如果有某α_i'或β_j'为奇数，仿上面情形①、②可知n为偶数；若各α_i'，β_j'仍都为偶数，再约去因子2得α_i'',β_j''，如此讨论下去，经过有限步骤之后总有某些α_i或β_j出现奇数，就知道n为偶数了。

上面的证明方法叫做递降法，它是处理整数问题的一个常用方法，其理论依据是任何正整数集合总有最小值，而且从这集合中任意一个数开始递减取下去，有限步后就达到最小值。下面例10和习题一的题30（1988年IMO题）都可用递降法处理。

例10 证明不存在非零整数x、y、z满足

$$x^2+y^2+z^2=2^n xyz,\ n\geqslant 1. \tag{8}$$

证明 若有x、y、z满足（8）式，则x、y、z只能是两个奇数一个偶数，或者全为偶数。

当x、y、z有两个是奇数一个是偶数，则$x^2+y^2+z^2=4k+2$，但$4|2^n xyz$，所以（8）式不成立。

当x、y、z全为偶数，则取

$$x'=\frac{x}{2},\ y'=\frac{y}{2},\ z'=\frac{z}{2}$$

此时x',y',z'满足

$$x'^2+y'^2+z'^2=2^{n+1}x'y'z' \tag{9}$$

由上面已讨论过的情形知x',y',z'不能有奇数，于是全为偶数，由此又作

$$x''=\frac{x'}{2},\ y''=\frac{y'}{2},\ z''=\frac{z'}{2}$$

等等。由于x不能永远被2除下去都仍得偶数（除非为0），因此总会出现矛盾。可见也不会有偶数x、y、z满足（8）。

所以方程（8）没有非零的整数解.

例11　能否把 1,1,2,2,3,3,……,1990,1990 这3980个数排成一数列 $C_1, C_2, \cdots, C_{3980}$，使得两个1之间只有一个数，两个2之间只有两个数，…，两个1990之间有1990个数？

解　这个问题解法很多，用奇偶性分析方法比较简单．设所要求数列存在，记为 $C_1, C_2, \cdots, C_{3980}$，设它们中等于 i 的两项各为 C_{a_i}，C_{b_i}，$a_i \leqslant b_i$，则按要求有

$$b_i - a_i = i + 1$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{1990}\left(b_i + a_i - 2a_i\right) = \sum_{i=1}^{1990}\left(i+1\right) = 1990 + \sum_{i=1}^{1990} i$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{1990}\left(b_i + a_i\right) - 2\sum_{i=1}^{1990} a_i = 1990 + \sum_{i=1}^{1990} i$$

但是，$\sum\limits_{i=1}^{1990}\left(a_i + b_i\right) = \sum\limits_{k=1}^{3980} k$ 是偶数，$2\sum\limits_{i=1}^{1990} a_i$ 和 1990 也是偶数，而 $\sum\limits_{i=1}^{1990} i = 995 \times 1991$ 是奇数，这乃矛盾．所以不存在所求的数列．

由上可见，奇偶性分析方法的确用处很大，但通常还要辅以一些其它手段和工具．只要养成奇偶性分析的习惯，逐渐积累经验，有许多难题也可以迎刃而解．本章习题一的1—11都是这方面的练习．

§2　整除基本性质及其应用举例

一、几个基本概念

对于整数 a, b, c，$b \neq 0$，若有 $a = bc$，就说 b 整除 a，或说 a 被 b 整除，记为 $b|a$．也就是说，a 的非零因数 b 必整

除a。若b不能整除a，就记为$b\nmid a$。显然有下面简单性质：

（1）若$c|b$，$b|a$，则$c|a$；

（2）若$c|a$，$c|b$，则$c|(a+b)$；更一般还有$c|(ka+lb)$；若$c|a$，$c\nmid b$，则$c\nmid(a+b)$；

（3）若$c|a$，$d|b$，则$cd|ab$；

（4）若$mb|ma$，则$b|a$；

（5）若$a>0$，$b>0$，$b|a$，则$b\leqslant a$。

a、b的公因数中最大者，称为a、b的最大公因数，记为(a,b)；a、b的正公倍数中最小那个称为a、b的最小公倍数，记为$[a,b]$。

当$(a,b)=1$，就说a与b互质。

只有1和本身这两个正因数的正整数称为素数(质数)，从小到大排列的素数是（有无穷个）：

$$2,3,5,7,11,13,17,\cdots\cdots$$

素数有一个很基本的性质：若素数$p\nmid a$，则p与a互质。这是因为当$p\nmid a$，必有$(p,a)\neq p$，$\therefore (p,a)=1$。

二、两个基本性质和一个基本公式

关于整除性，除了上面几个简单性质，下面两个基本性质特别重要，虽然它们的证明在这里不能介绍，但在任何竞赛中是完全可以应用的，因为它们是众所皆知的，课堂外完全可应用。

基本性质Ⅰ　如果$(a,b)=1$，则$(a,bc)=(a,c)$。特别地，有两个推论（应用较多）：

推论一　若$(a,b)=1$，$a|bc$，则$a|c$；

推论二　若$(a,b)=1$，$(a,c)=1$，则$(a,bc)=1$。

基本性质Ⅱ　设$(a,b)=1$，$a|N$，$b|N$，则$ab|N$。

例如，如能证明$2|N$，$5|N$，就说明$10|N$。

基本公式

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

或更简单地 $a^n-b^n=(a-b)\cdot m\ (m\in Z)$.

例12 证明$6|a^3-a$，a为任意整数.

证明 $\because\ a^3-a=(a-1)a(a+1)$，连续三个整数中必有一个被3整除，又必有一个被2整除，因此$3|a^3-a$，$2|a^3-a$，由此$6|a^3-a$.

例13 设$n\in N$，证明$n!6^n|(3n)!$.

证明 $\because\ 3n(3n-3)(3n-6)\cdots6\cdot3=3^n\cdot n!$，而$2|(3n-1)(3n-2)$，$2|(3n-4)(3n-5)$，$2|(3n-7)(3n-8)$，等等，

$$\therefore\ 2^n|(3n-1)(3n-2)(3n-4)(3n-5)(3n-7)(3n-8)\cdots5\cdot4\cdot2\cdot1$$

$$\therefore\ 2^n\cdot3^n\cdot n!|(3n)!.$$

例14 设p为素数，则对$r=1,2,\cdots,p-1$都有

$$p|C_p^r\ \left(C_p^r=\frac{p(p-1)\cdots(p-r+1)}{r!}\right).$$

证明 $\because\ C_p^r$为整数，$\therefore\ r!|p(p-1)\cdots(p-r+1)$. 由于$r<p$，$\therefore\ (r,p)=1$，以及$(r-1,p)=1$，$(r-2,p)=1$，$\cdots$，$(2,p)=1$，因此由性质Ⅰ有$(r!,p)=1$，因此$r!|(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)$. 这就是说，

$$\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)}{r!}=a$$

是整数而$C_p^r=p\cdot a$，$\therefore\ p|C_p^r$.

例15 已知有n使$1987|\underbrace{11\cdots1}_{n}$，证明对此$n$也有

$$1987\mid\underbrace{1\cdots1}_{n+1}\underbrace{9\cdots9}_{n+1}\underbrace{8\cdots8}_{n+1}\underbrace{7\cdots7}_{n+1}$$

（1987年全国初中数学竞赛题）。

证明 记 $N=\underbrace{1\cdots1}_{n}$，$A=\underbrace{1\cdots1}_{n+1}\underbrace{9\cdots9}_{n+1}\underbrace{8\cdots8}_{n+1}\underbrace{7\cdots7}_{n+1}$。

注意到

$$10^{n}=\underbrace{9\cdots9}_{n}+1=9N+1,$$

$$10^{kn}=(9N+1)^{k}=lN+1,\quad (l\in Z)$$

$$\begin{aligned}\therefore A&=\underbrace{1\cdots1}_{n+1}\times10^{3n+3}+\underbrace{9\cdots9}_{n+1}\times10^{2n+2}+\underbrace{8\cdots8}_{n+1}\times10^{n+1}+\underbrace{7\cdots7}_{n+1}\\
&=(\underbrace{1\cdots1}_{n}\times10^{3n+4}+10^{3n+3})+(\underbrace{9\cdots9}_{n}\times10^{2n+3}+10^{2n+2}\times9)\\
&\quad+(\underbrace{8\cdots8}_{n}\times10^{n+2}+10^{n+1}\times8)+(\underbrace{7\cdots7}_{n}\times10+7)\\
&=N\times(10^{3n+4}+9\times10^{2n+3}+8\times10^{n+2}+7\times10)\\
&\quad+1000\times10^{3n}+900\times10^{2n}+80\times10^{n}+7\\
&=N\times(10^{3n+4}+9\times10^{2n+3}+8\times10^{n+2}+7\times10)\\
&\quad+1000\times(l_1N+1)+900\times(l_2N+1)\\
&\quad+80\times(l_3N+1)+7\\
&=N\cdot k+1987,\quad(k\text{为某整数})\end{aligned}$$

而 $1987\mid N$，$\therefore$ $1987\mid A$。

在例15中多次用到二项定理．确实，二项定理在证明整除问题中是非常有用的，下面两例都是借助二项定理来解决的。

例16 证明$64\mid 9^{n}-8n-1$，$n\in N$。

证明 当 $n=1$ 时命题明显成立，当 $n>1$时

$\because\ 9^n=(8+1)^n=1+8n+8^2k,\ k\in Z,$

$\therefore\ 64k=9^n-8n-1,\ \therefore\ 64\mid 9^n-8n-1.$

例17　设 p 为奇素数，$p\mid a+b$，$p\nmid b$，则

$$p\left|\frac{a^p+b^p}{a+b}\right.，但\ p^2\nmid\frac{a^p+b^p}{a+b}.$$

证明　$\because\ \dfrac{a^p+b^p}{a+b}=\dfrac{(a+b-b)^p+b^p}{a+b}$

$$=\frac{[(a+b)^p-pb(a+b)^{p-1}+\cdots+p(a+b)b^{p-1}-b^p]+b^p}{a+b}$$

$$=(a+b)^{p-1}-pb(a+b)^{p-2}+\cdots-C_p^{p-2}(a+b)b^{p-2}+pb^{p-1},$$

而　$p\mid a+b$，$\therefore\ p\left|\dfrac{a^p+b^p}{a+b}\right.$.

但 $p^2\mid(a+b)^2$ 以及 $p^2\mid C_p^{p-2}(a+b)$，

而　$p^2\nmid pb$（$\because\ p\nmid b$），

$\therefore\ p^2\nmid\dfrac{a^p+b^p}{a+b}$.

§3　用分类法证明整除问题，个位数定理

在证明整除问题时，分类法是很有用的。分类法实质上是“同余”的方法，但我们不准备引进数论课本中的那套同余理论，而宁愿用分类法的简易叙述，这样更为实用易懂，而且一样有效。

奇偶性分析方法实际上就是将整数集 Z 分为奇数与偶数来讨论问题的方法。在讨论平方数时，又将 Z 分为八类来考虑：$8k, 8k\pm1, 8k\pm2, 8k\pm3, 8k+4$，并且知道只有 $8k+1$ 那类的数才有可能成为奇数的平方数，只有 $8k$ 和 $8k+4$ 这两类