普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学教学丛书

线性代数

主编 闫 厉
编者 董小刚 徐俊彦
李映红 王春月

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学教学丛书

线性代数

主编　闫　厉

编者　董小刚　徐俊彦

李映红　王春月

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书根据教育部课程指导委员会制定的《线性代数教学基本要求》编写而成.

本书融入了作者多年来在教学改革实践中的研究成果，并注重线性代数在工程技术及经济管理领域中的应用，具有知识点突出、难点分散、证明和计算过程严谨的特点，其中的例题、习题具有代表性和启发性，体现了现代数学思想的特点. 全书共分六章，内容包括行列式、矩阵、初等矩阵与线性方程组、向量及向量空间、相似矩阵、二次型. 章末配置了 A、B 层次的习题及内容小结，便于学生深入理解教材中的内容.

本书可作为普通高等学校理工类各专业、经济管理有关专业或高等专科学校有关专业的线性代数课程教材或参考书，也可供工程技术人员、自学考试或报考硕士研究生的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/闫厉主编. —北京：科学出版社，2010
普通高等教育“十一五”规划教材·大学数学教学丛书

ISBN 978-7-03-028170-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①闫… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 123397 号

责任编辑：张中兴 王国华 于俊杰／责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 8 月第一次印刷 印张：12 1/4
印数：1—4 000 字数：240 000

定价：19.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

丛 书 序

本丛书是为普通高等院校本科学生所编写的数学系列教材，是由长春地区五所普通高校具有丰富教学和科研经验的教师联合编写的，是集体智慧的结晶. 本丛书从酝酿到出版经历了近十年的时间，几经修改终于成稿. 在教材内容的编排上，我们一方面借鉴了国内一些品牌教材的先进模式，另一方面结合新形势下的新要求，并根据五所普通高校本科学生的特点，先后编写了逾百万字的教材与讲义，在多年使用过程中不断提炼修订，逐步趋于完善. 应该说，本套教材凝聚着五所高校几代数学教师的心血和汗水，希望能培养出更多的创新性人才.

本套教材包括《微积分(经管类)》、《概率论与数理统计》(两本)、《线性代数》、《计算方法简明教程》、《数学建模》、《复变函数与积分变换》. 编者在取材上着眼于本科生未来的发展和当今世界科学技术的发展，充分反映国内外教学前沿信息和最新学术动态，本着"夯实基础、适当延伸，注重应用、强化实践"的原则，大胆摆脱了普通高等院校教材编写的传统套路，使这套教材具有很强的实用性、一定的可读性、较高的艺术性和丰富的实践性；同时还保持了数学知识的系统性、严密性、连贯性等特点，内容翔实，清晰易读，便于教学与自学. 另外，本套教材充分考虑了有志报考研究生同学的需要，每一本教材都配备了丰富的、梯度配置的例题与习题，紧扣学生学习和报考研究生复习的需要，既具有明显的启发性，又具有典型的应用意义，可供普通高校理工科各专业使用.

本套教材从选题、大纲、组织编写到编辑出版，自始至终得到了科学出版社数理出版分社的支持，同时也得到了长春工业大学、吉林建筑工程学院、长春大学、长春工程技术师范学院、长春建筑学院教务处及数学系各位领导的支持和帮助，在此，我们一并表示衷心的感谢.

编 者

2010 年 3 月

前　　言

线性问题广泛存在于自然科学、工程技术的各个领域,而很多非线性问题在一定条件下也可以转化为线性问题予以解决,线性代数的思想、理论和方法在科学技术、管理科学及社会科学的众多领域都有着广泛的应用. 因此线性代数是理工科大学一门重要的基础课程.

近年来,随着我国经济建设与科学技术的快速发展,高等教育进入了一个飞速发展时期. 我国从 1999 年开始迅速扩大招生规模,高等教育已经由昔日的精英教育发展成大众化教育. 办学规模的不断扩大,给我国高等教育带来了一系列的问题与挑战. 高等学校的教育教学思想必须不断更新,教学改革需要不断深入. 为了适应我国数学教育发展的需要,吉林省五所地方高等学校数学基础课任课教师经多次研讨,联合编写了这套高等学校非数学类专业使用的数学系列教材,《线性代数》是其中之一.

本书是编者根据多年讲授线性代数课程的教学经验,融入教学改革实践中的多项成果编写而成的. 在编写过程中,编者博采众多国内外同类教材所长,吸纳编者所在学校数学同仁的教学改革实践经验,力求编写出一本知识点突出、难点分散、证明和计算过程严谨、例题与习题具有代表性和启发性、体现现代数学思想的教材.

本书的主要内容有行列式、矩阵、初等矩阵与线性方程组、向量及向量空间、相似矩阵、二次型. 适合普通高等学校非数学类专业学生使用,适用课时 32~50 学时使用.

本书由闫厉主编,编者有董小刚、徐俊彦、李映红、王春月. 吉林大学的王国铭教授、长春工业大学的孙长春教授认真审阅了本书,提出许多宝贵意见. 在本书的编写过程中,还得到长春工业大学许多数学同仁、青年教师的热心帮助. 在此一并致谢!

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中难免存在不妥之处,诚望各位同行、读者批评指正.

编　者

2010 年 6 月

目　录

第 1 章　行　列　式

在线性代数课程中, 行列式是一个重要的工具, 它在数学的各个领域及其他各学科都有着广泛的应用.

本章主要内容: n 阶行列式的定义及其性质; 行列式的计算; 求解一类非齐次线性方程组的克拉默 (Cramer) 法则以及由此得到的方程个数与未知数个数相同的齐次线性方程组有非零解的必要条件.

§1.1　n 阶行列式的定义

1.1.1　二阶与三阶行列式

行列式的概念首先是在求解方程个数与未知量个数相同的一次方程组时提出的. 例如, 对于一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 用消元法求解, 得其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

我们在式 (1.2) 中可以发现, 如果记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

则式 (1.2) 可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}, \tag{1.3}$$

将形如式 (1.3) 中的 D 称为**二阶行列式**.

对于由 9 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成三行三列的式子, 定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.4}$$

并称它为**三阶行列式**.

上述定义表明三阶行列式含 6 项, 每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号, 其规律遵循图 1.1 所示的对角线法则: 图中有三条实线看成是平行于主对角线的连线, 三条虚线看成是平行于副对角线的连线, 实线上三元素的乘积冠以正号, 虚线上三元素的乘积冠以负号.

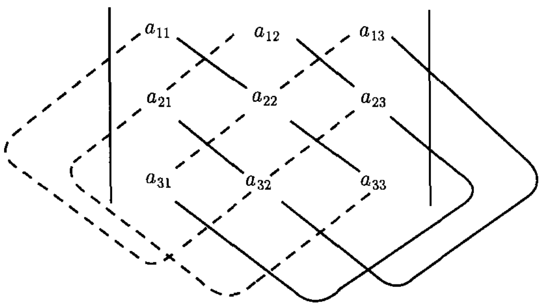

图 1.1　对角线法则图示

如果三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

用消元法求解这个方程组, 可得

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \tag{1.5}$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 是常数项 b_1, b_2, b_3 替换 D 中的第 j 列所得到的三阶行列式, 即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.1.1　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　按对角线法则, 有

$$\begin{aligned} D&=3\times(-3)\times2+2\times4\times4+2\times(-5)\times3-3\times(-3)\times4-2\times2\times2-3\times4\times(-5)\\ &=-18-30+32+36+60-8=72. \end{aligned}$$

例 1.1.2　求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 6 & 4 & x^2 \end{vmatrix}=0.$$

解　方程左端的三阶行列式记作 D, 则

$$\begin{aligned} D&=2x^2+6x+4-12-x^2-4x\\ &=x^2+2x-8, \end{aligned}$$

于是得

$$x^2+2x-8=0,$$

解方程, 得

$$x=2,\quad x=-4.$$

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式, 对于四阶以及四阶以上的高阶行列式就不适用了.

1.1.2　排列与逆序

定义 1.1.1　由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个没有重复数字的 n 元有序数组, 称为一个 n**级排列**, 简称**排列**, 记作 $(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如, (4231) 是一个 4 级排列, (653412) 是一个 6 级排列, 而 (1523) 不是一个排列.

定义 1.1.2　在一个 n 级排列 $(i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)$ 中, 如果数 $i_s>i_t$, 则称数 i_s 与 i_t 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**, 记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

由逆序数的定义, 可以按下面方法计算逆序数.

设在一个 n 级排列 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 中所有比 $i_t(t=1,2,\cdots,n)$ 大的且排在 i_t 前面的数共有 t_i 个, 则 i_t 的逆序数的个数为 t_i, 而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数, 即

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

例 1.1.3 计算排列 (32514) 的逆序数.

解 因为 3 排在首位, 故其逆序的个数为 0;

在 2 的前面比 2 大的数有 1 个, 故其逆序的个数为 1;

在 5 的前面比 5 大的数有 0 个, 故其逆序的个数为 0;

在 1 的前面比 1 大的数有 3 个, 故其逆序的个数为 3;

在 4 的前面比 4 大的数有 1 个, 故其逆序的个数为 1.

易见所求排列的逆序数为

$$\tau(32514)=0+1+0+3+1=5.$$

定义 1.1.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列; 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

所以, (32514) 是奇排列.

定义 1.1.4 把一个排列 $(i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)$ 中某两个数 i_s, i_t 的位置互换, 而其余数不动, 得到另一个排列 $(i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)$, 这样的变换称为一个**对换**, 记为 (i_s,i_t).

将两个相邻元素对换, 称为**相邻对换**.

定理 1.1.1 任意一个排列经过一个对换后, 改变奇偶性.

也就是说, 经过一次对换, 奇排列变为偶排列, 偶排列变为奇排列.

证明 第一种情形, 先看相邻对换的情况.

设排列为 $(a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m)$, 对换 a 与 b, 变为 $(a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m)$, 显然, $a_1\cdots a_l, b_1\cdots b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变, a, b 两元素的逆序数改变为:

当 $a<b$ 时, 经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变;

当 $a>b$ 时, 经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1.

所以, 排列 $(a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m)$ 与排列 $(a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m)$ 的奇偶性改变.

第二种情形, 再看一般情况.

设排列为 $(a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n)$, 对它作 m 次相邻对换, 变成 $(a_1\cdots a_lab\,b_1\cdots b_mc_1\cdots c_n)$; 再作 $m+1$ 次相邻对换, 变成 $(a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n)$. 总之, 经 $2m+1$ 次相邻对换, 排列 $(a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n)$ 变成排列 $(a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_ma\,c_1\cdots c_n)$, 所以这两个排列的奇偶性改变.

定理 1.1.2 在 n 个自然数 $(n>1)$ 的 $n!$ 个 n 级排列中, 奇偶排列各占一半.

证明 n 级排列的总数为 $n!$ 个. 设其中奇排列为 p 个, 偶排列为 q 个, 若对每个奇排列都作同一对换, 则由定理 1.1.1, p 个奇排列均变成偶排列, 故 $p\leqslant q$. 同理, 对每个偶排列都作同一对换, 则 q 个偶排列均变为奇排列, 故 $q\leqslant p$, 从而 $p=q=\dfrac{n!}{2}$.

1.1.3 n 阶行列式

通过观察三阶行列式的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

可得如下结论:

(1) 三阶行列式共有 3! 项;

(2) 每项都是取自不同行、不同列的三个元素的乘积;

(3) 每项的符号取决于, 当该项元素的行标按自然数顺序排列后, 如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号, 奇排列则取负号.

所以, 三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 为对所有 3 级排列 $(j_1j_2j_3)$ 求和.

由此, 可以把行列式的定义推广到 n 阶行列式.

定义 1.1.5 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行、n 列构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.6}$$

称为 **n 阶行列式**, 其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $(j_1j_2\cdots j_n)$ 求和, 行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$, 这里 a_{ij} 称为**行列式的元素**.

n 阶行列式的定义具有以下规律:

(1) 行列式由 $n!$ 项求和而成.

(2) 每项是取自不同行、不同列的 n 个元素乘积, 每项各元素行标按自然数顺序排列后就是行列式的一般项形式

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

(3) 若行列式每项的行标都按自然数的顺序排列, 其中 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 是该项的符号, 列标构成 n 级排列 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$, 若此排列为奇排列则此项取负号, 若此排列为偶排列则此项取正号, 所以行列式项的符号一半为正, 一半为负.

例如, 四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中有 $4! = 24$ 项.

又如, $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 行标排列为 (1234), 元素取自不同行; 列标排列为 (1234), 元素取自不同列, 且逆序数 $\tau(1234) = 0$, 即元素乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 前面应冠以正号, 所以 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 为 D 的一项.

再如, $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 行标排列为 (1234), 元素取自不同行; 列标排列为 (4312), 元素取自不同列, 且逆序数 $\tau(4312)=5$, 即(4312)为奇排列, 所以元素乘积 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前面应冠以负号, 即 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 为 D 的一项.

而 $a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$ 有两个元素取自第四列, 所以它不是 D 的一项.

定理 1.1.3　n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}, \tag{1.7}$$

其中, t 为行标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数.

证明　按行列式定义有

$$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

记

$$D_1 = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

由上面讨论知: 对于 D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$, 总有且仅有 D_1 中某一项 $(-1)^s a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等; 反之, 对于 D_1 中的任一项 $(-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots$

$a_{p_n n}$, 也总有且仅有 D 中某一项 $(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 与之对应并相等, 于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等, 从而 $D=D_1$.

例 1.1.4 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值, 其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 记行列式的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

D 中有很多项为零, 现在考查有哪些项不为零. 一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行, 但第一行中只有 a_{11} 不为零, 因而 $j_1=1$, 即 D 中只有含有 a_{11} 的那些项可能不为零, 其他项均为零; 一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行, 第二行中有 a_{21} 和 a_{22} 不为零, 因第一个元素 a_{11} 已取自第一列, 因此第二个元素不能再取自第一列, 即不能取 a_{21}, 所以第二个元素只能取 a_{22}, 从而 $j_2=2$, 即 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$ 的那些项可能不为零, 其他项均为零, 这样推下去, 可得 $j_3=3, j_4=4,\cdots,j_n=n$. 因此, D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为零, 其他项均为零. 由于 $\tau(12\cdots n)=0$, 因此这一项应取正号, 于是可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}, \tag{1.8}$$

称上面形式的行列式为**下三角形行列式**.

同理可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}, \tag{1.9}$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

特殊情况:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}, \tag{1.10}$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$. 这种行列式称为**对角行列式**. 行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**.

三角形行列式及对角行列式的值, 均等于主对角线上元素的乘积.

类似地, 可以证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

因为在给定行列式中, 非零项只有一项, 即

$$(-1)^{\tau(n\ (n-1)\ \cdots 2\ 1)}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1},$$

同理, 有

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}. \tag{1.12}$$

这些结论在以后行列式的计算中可直接应用.

由行列式定义不难得出: 一个行列式若有一行 (或一列) 中的元素皆为零, 则此行列式必为零.

例 1.1.5　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$, 现考察不为零的项. a_{1j_1} 取自第一行, 但只有 $a_{14}\neq 0$, 故只可能 $j_1=4$, 同理可得 $j_2=3$, $j_3=2$, $j_4=1$. 即行列式中不为零的项只有 $(-1)^{\tau(4321)}1\times 2\times 3\times 4=24$, 所以 $D=24$(或直接利用式 (1.12) 的结果).

例 1.1.6 已知 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{ij}a_{56}a_{14}$ 是六阶行列式中的一项, 求 i,j, 并确定该项的符号.

解 由行列式的定义可知, 行列式的每一项的元素均取自不同行、不同列. 所以有 $i=6, j=5$, 再将该项的行标按自然数的顺序排好, 得

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65},$$

列标的逆序数为 $\tau(431265)=1+2+2+1=6$, 为偶排列, 故此项符号为正号.

例 1.1.7 利用行列式的定义计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 1)}a_{1n-1}a_{2n-2}\cdots a_{nn} \\ &= (-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 1)}1\times 2\times\cdots\times(n-1)\times n \\ &= (-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 1)}n!, \end{aligned}$$

所以

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

§1.2 行列式的性质

1.1 节介绍了行列式的定义, 但是我们发现用行列式的定义来计算行列式是非常麻烦的, 因此, 本节由行列式的定义推导出一些性质, 用以简化行列式的计算.

1.2.1 n 阶行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1.2.1　行列式与它的转置行列式相等.

证明　记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D^{T} 的 (i,j) 元素为 b_{ij}, 则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 按定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

由定理 1.1.3, 有

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

故 $D^{\mathrm{T}}=D$, 证毕.

由此性质可知, 行列式中的行与列具有同等的地位, 行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立, 反之亦然.

性质 1.2.2　互换行列式的两行 (列), 行列式变号.

证明　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 对换 i,j 两行得到的, 即当 $k\neq i,j$ 时, $b_{kp}=a_{kp}$; 当 $k=i,j$ 时, $b_{ip}=a_{jp},b_{jp}=a_{ip}$, 于是

$$\begin{aligned} D_1 &=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

其中, $(1\cdots i\cdots j\cdots n)$ 为自然排列, t 为排列 $(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)$ 的逆序数. 设排列 $(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)$ 的逆序数为 t_1, 则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$, 故

$$D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D,$$

证毕.

用 r_i 表示行列式的第 i 行, 用 c_i 表示行列式的第 i 列, 交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$, 交换 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.