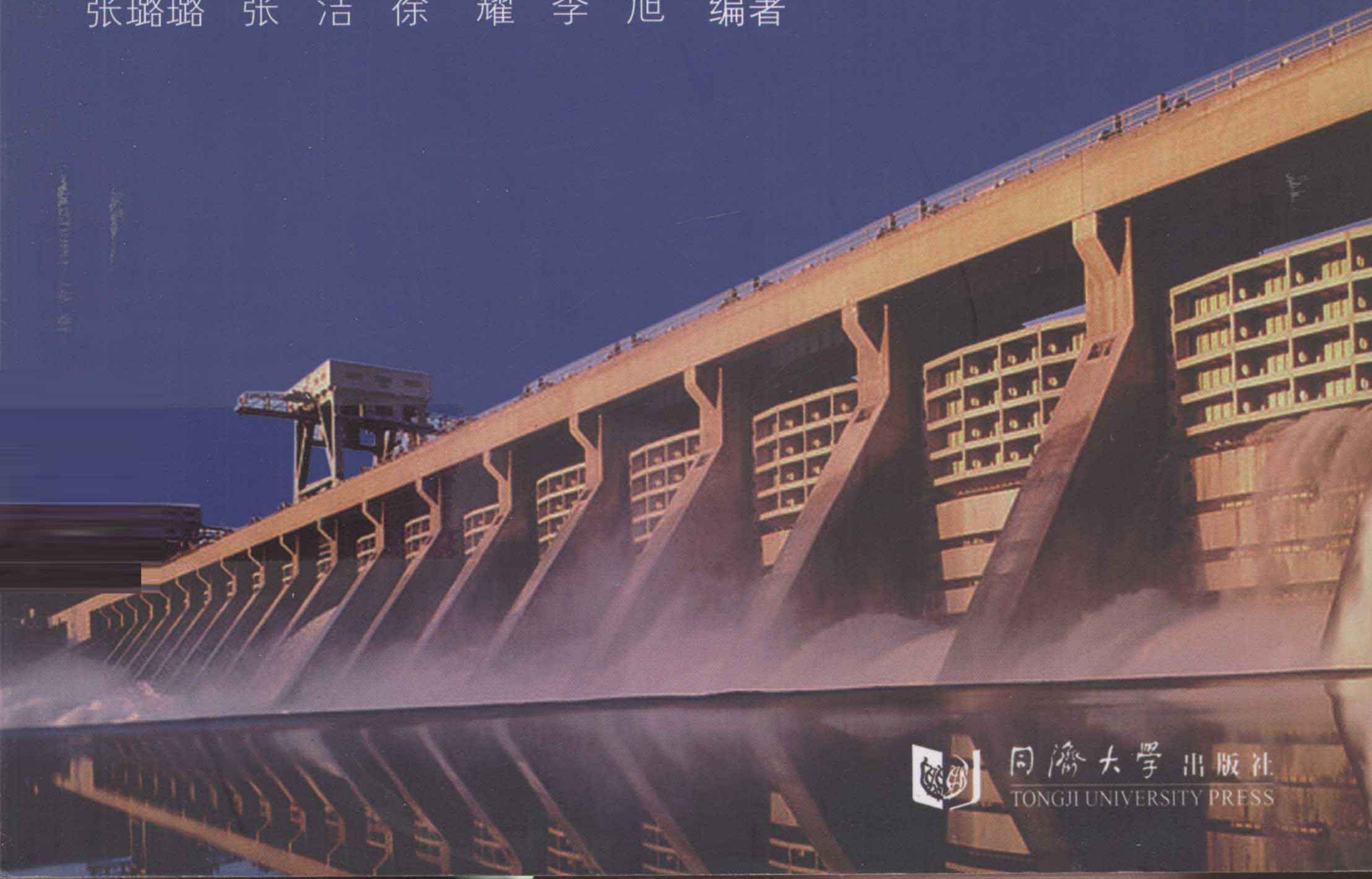
百校土木工程专业“十二五”规划教材

岩土工程可靠度理论

张璐璐 张洁 徐耀 李旭 编著



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

岩土工程可靠度理论

张璐璐　张　洁　徐　耀　李　旭　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

编　委　会

前　言

由于岩体和土体的特殊性以及岩土工程的特点，采用概率的方法研究岩土的性状和工程性能成为必然要求。自20世纪中期岩土领域开展可靠度研究以来，岩土工程可靠度的研究工作已开始被广泛接受，国内外近10年来编制的一些标准和手册开始列入此方面的内容，岩土工程可靠度的理论已经对工程实践产生了重大影响。

本书系统地介绍了岩土工程可靠度分析和设计的基本概念和主要方法。全书共分9章，主要内容有：绪论、概率与统计分析基础知识、可靠度的基本概念、一次二阶矩法、蒙特卡罗方法、响应面法、系统可靠度、岩土工程可靠度设计原理以及可靠度分析的工程实例。

本书在编写过程中，努力做到内容深入浅出、重点突出、图文详尽、例题典型、理论和方法的实施兼顾，在介绍各种分析计算方法的同时，尽量给出Excel函数或Matlab源程序，便于读者理解和掌握。通过可靠度方法在具体工程实例中的应用，使学生了解在实践中应用可靠度理论的方法。

本书由上海交通大学土木工程系张璐璐、同济大学地下建筑与工程系张洁、中国水利水电科学研究院徐耀、北京交通大学土木建筑工程学院李旭共同编写。其中，第1，4，8章和第2，3，9章的部分内容由张璐璐编写，第2章的部分内容由徐耀编写，第5，7章和第3，9章的部分内容由张洁编写，第6章由李旭编写，全书由张璐璐、张洁统稿。上海交通大学土木工程系研究生何晔、左自波和同济大学地下建筑与工程系研究生何军涛、白天明等在图文整理方面做了一些工作。

限于编者水平，书中难免有疏漏和错误之处，敬请各方面专家学者和广大读者不吝批评指正。

编　者

2011年1月

目　　录

1 绪 论

1.1 岩土工程的范畴和特点

岩土工程是土木工程的一个分支，是以工程地质学、岩石力学、土力学与基础工程为理论基础、涉及岩石和土的利用、整治和改造的一门技术科学。土木工程中所有涉及土体和岩体的部分都可包括在岩土工程的范围之内。岩土工程是一门既古老又新兴的专业技术。上古时代，人类修道路、挖渠道、建居室，就与岩石和土打交道。近代工业化过程中，在建厂房、开矿山、修铁路、兴水利等土木工程实践中，涉及到许多与岩土有关的问题，如地基的承载、边坡的稳定、地下水的控制、岩土材料的利用等。但岩土工程真正成为一门独立的专业，则尚不到100年。

岩土工程主要包括以下几个主要方面：土质学、地质学（包括水文）、工程勘察、地基处理、基础工程、边坡工程、基坑工程、隧道和地下工程、环境岩土工程、地质灾害防治、工程检测与监测。

岩土工程作为土木工程的分支，是以传统力学为基础发展起来的。但单纯的力学计算不能解决实际问题。原因主要在于对自然条件的依赖性和计算条件的不确知性。结构工程师面临的材料是混凝土、钢材等人工制造的材料，材质相对均匀，材料和结构都是由工程师在设计时选定，是可控的，计算条件十分明确。而岩土材料都是自然形成的岩体和土体，其性质不能由工程师选定和控制，只能通过勘察探测而又不可能完全查明。因而存在条件的不确知性和参数的不确定性，同时，不同程度地存在计算条件的模糊性和信息的不完全性。目前，虽然岩土工程计算方法取得了长足进步，发挥了重要作用，但由于计算假定、计算模式、计算参数与实际之间存在很多差别，计算结果与工程实际之间总存在不同程度的差距，需要岩土工程师综合判断。

1.2 岩土工程的不确定性

岩土工程研究的对象是岩体和土体。岩体在其形成和存在的整个地质历史过程中，经受了各种复杂的地质作用，因而有着复杂的结构和地应力场环境。而不同地区的不同类型的岩体，由于经历的地质作用过程不同，其工程性质往往具有很大的差别。岩石出露地表后，经过风化作用而形成土，它们或留存在原地，或经过风、水及冰川的剥蚀和搬运作用在异地沉积形成土层。在各地质时期，各地区的风化环境、搬运和沉积的动力学条件均存在差异性，因此，土体不仅工程性质复杂，而且其性质的区域性和个性很强。

岩石和土的强度特性、变形特性和渗透特性常通过试验测定。在室内试验中，原状试样的代表性、取样过程中不可避免的扰动以及初始应力的释放、试验边界条件与地基中实际情况不同等客观原因所带来的误差，使室内试验结果与地基中岩土实际性状发生差异。在原位试验中，现场测点的代表性、埋设测试元件时对岩土体的扰动以及测试方法的合理性等因素也可能引入显著的测试误差。

几乎在工程的所有阶段，岩土工程师们都会遇到不确定性，如：不良地质条件；场地地质勘

察不充分;需确定的参数值(如强度、渗透参数)不明确;分析得到的重要数值的准确性(如安全系数)不够。这些因素都将影响岩土工程设计的安全性。岩土工程中的不确定性可分为客观不确定性和主观不确定性。客观不确定性主要来自于岩土工程的荷载环境(例如:岩土中的初始应力场、上部结构传到基础的荷载)、岩土特性参数(例如:土的抗剪强度、渗透系数)、不同施工环境与条件等。主观不确定性主要是由于对岩土体变形破坏机理认识不清,导致对岩土力学分析和模拟不足,如计算模型、参数的选取、条件的假定、简化计算、信息描述、测量精度以及设计施工数据与信息等。

1.3 岩土工程的可靠度分析

传统的设计方法采用确定性的途径。取土样,做一定数量的试验(物理力学性质试验或原位试验)来确定某些指标的数值,将各种设计条件、各种指标和参数都定值化并选用一定的计算模式来进行计算,把那些未知的、不定的因素都归结到一个总的安全系数上,这就是常用的所谓容许应力设计法。在确定性方法中,计算所用的土工指标是作为确定的量来考虑的,计算公式模型等也是作为确定的正确的模型来使用,而实际岩土工程中存在上述诸多不确定性因素,这样就造成了设计中经常出现工程师的估计和计算结果与实际相差甚远的情况。

此外,在确定性设计方法中,安全系数与建筑物的安全性到底有什么联系以及安全系数应如何取值等一系列问题都不是很清楚。在现实的工程问题中,常会出现这样的情况,两种建筑物的安全系数相同,但其安全程度并不一样,甚至安全系数大者,安全程度反而低,因此,单一的安全系数无法为安全度提供统一的度量标准。

可靠度分析能对各种不确定性分别加以某种形式的定量考虑,使用统一的度量工程结构安全程度标准,使得工程结构物设计得更为安全和经济。

与上部结构工程相比,岩土工程的可靠度分析有以下几大特点:

(1) 岩土工程的规模和尺寸一般比结构工程大得多,其实际范围是半无限空间,在计算分析中采用的边界是近似和模糊的。

(2) 岩土的各种土性参数的变异性大,而且是空间的函数,土性之间或空间不同点之间的土性具有较强的相关性。

(3) 岩土试样的性质和原位土的性质往往存在较大差别。即使原位试验所反映的也是岩土的“点”性质(如现场十字板试验)或“线”性质(如静力触探)。而岩土工程的行为往往由空间平均性质决定。因此,要注意“点”、“线”到空间平均的概率统计指标问题。

(4) 岩土体是一种非线性材料,岩土工程可靠度分析的极限状态方程(即计算模型)常具有较高的非线性。

(5) 岩土工程的极限状态方程往往也具有较大的不确定性或不精确性。

(6) 岩土体性质和岩土工程性能受施工工艺、质量的影响很大。

自从 20 世纪中期岩土领域开展可靠度研究以来,岩土工程可靠度的研究工作已开始被广泛接受,并对工程实践产生了重大影响。事实上,国际上近 10 年来编制的一些标准和手册已开始列入此方面的内容。如美国、加拿大、欧洲等国家和地区的地基基础设计规范已采用极限状态设计法,并用分项系数描述设计表达式;我国《建筑地基基础设计规范》也规定按概率极限状态设计,考虑承载力和正常使用两种极限状态,并采用分项系数和标准值的实用设计表达式。这些都是岩土可靠度理论走向实用的良好开端。

2 概率与统计分析基础知识

教学目标和学习要求

(1) 掌握事件的基本关系、概率基本公理；

(2) 熟练掌握独立性、条件概率的定义；

(3) 理解并熟练掌握全概率公式和贝叶斯公式；

(4) 掌握概率密度函数、分布函数的概念；

(5) 能熟练计算常用随机变量的均值、方差和概率。

2.1 概 述

概率论和数理统计是可靠度理论的基础。本章从概率论的基本概念开始，重点介绍概率计算的基本公理和工程中常用的随机变量以及其主要性质，为后续章节中的概率可靠度方法介绍做准备。

2.2 概率论的基本概念

自然界和社会上发生的现象是多种多样的。有一类现象，在一定的条件下必然发生，称为确定性现象。而另一类现象，在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果。但人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性。这种在个别试验中其结果呈现出不确定性、在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，我们称为随机现象。概率论是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科。

下面首先介绍几个概率论的基本概念。

1. 随机试验

我们把试验作为一个含义广泛的术语，包括各种各样的科学实验，甚至对某一事物的某一特征的观察也可以看为是一种试验。在概率论中，将具有以下三个特点的试验称为随机试验。

(1) 可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前，不能确定哪一个结果会出现。

2. 样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的。我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S。样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点。

3. 随机事件

一般我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，简称事件。在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生。

特别地，对于一个样本点组成的单点集，称为基本事件。

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中，它总是发生的，S 称为必然事件。空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，$\varnothing$ 称为不可能事件。

4. 事件间的基本关系

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理。下面给出事件间关系的提法，并给出它们在概率论中的含义。

设试验 E 的样本空间为 S，而 A，B，$A_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 是 S 的子集。

(1) 若 $A \subset B$，则称事件 B 包含事件 A，这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生。

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即称事件 A 与事件 B 相等。

(2) 事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件。当且仅当 A，B 中至少一个发生时，事件 $A \cup B$ 发生。

类似地，称 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的和事件。

(3) 事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件。当且仅当 A，B 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生。$A \cap B$ 也记作 AB。

类似地，称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的积事件。

(4) 事件 $A - B = \{x \mid x \in A 且 x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件。当且仅当事件 A 发生、事件 B 不发生时，事件 $A-B$ 发生。

(5) 若 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的，或互斥的。这里指事件 A 与事件 B 不能同时发生。基本事件是两两互不相容的。

(6) 若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，又称对立事件。这里指对每次试验而言，事件 A 与事件 B 中必有一个发生，且仅有一个发生。A 的对立事件记为 $\overline{A}$。$\overline{A} = S - A$。

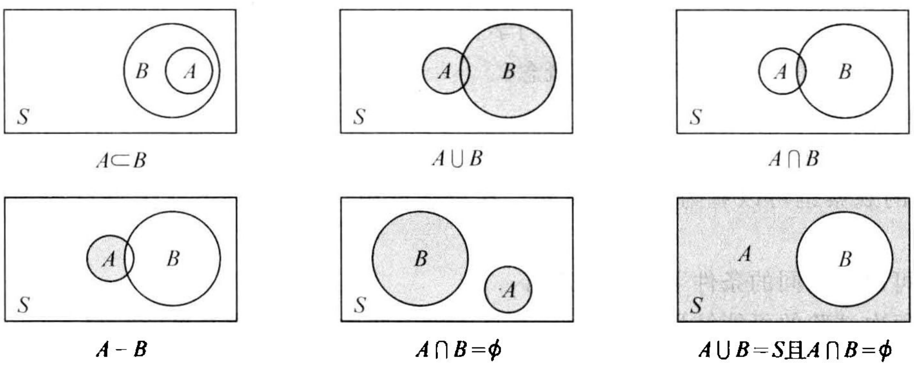


图 2－1　事件的基本关系

2.2.1　概率基本公理

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间。对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，

若 $P(A)$满足下列三条公理，则称为事件 A 的概率。

(1) 非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性：对于必然事件 S，有 $P(S) = 1$；

(3) 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots$，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

由概率的定义，可以得到概率的一些重要性质。

性质 1 $P(\varnothing) = 0$

性质 2 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \tag{2-1}$$

式(2-1)称为概率的有限可加性。

性质 3 设 A, B 是两个事件，若 $A \subset B$，则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \tag{2-2}$$

$$P(B) \geqslant P(A) \tag{2-3}$$

性质 4 对于任一事件 A，有

$$P(A) \leqslant 1 \tag{2-4}$$

性质 5 对于任一事件 A，有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{2-5}$$

性质 6 对于任意两事件 A 和 B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{2-6}$$

这个性质还可以推广到多个事件的情况。对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，可以得到

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}^{n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n}^{n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n) \tag{2-7}$$

2.2.2 独立性

考虑两个(或两个以上)事件发生的可能性是否相互影响的问题，称其为事件的独立性问题。

设 A, B 是试验 E 的两个事件，若 $P(A) > 0$，可以定义 $P(B \mid A)$。一般的，A 的发生对 B 发生的概率是有影响的，这时，$P(B \mid A) \neq P(B)$。只有在这种影响不存在时，才会有 $P(B \mid A) = P(B)$。

【例 2-1】 设试验 E 为“对两块试样分别进行加载，观察试样是否破坏的情况”。设事件 A 为“甲试样破坏”，事件 B 为“乙试样破坏”，如果破坏试样用 F 表示，未破坏试样用 T 表示，则 E 的样本空间为 $\Omega = \{FF, FT, TF, TT\}$。则 $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$，$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$，$P(B \mid$

$A) = \frac{1}{2}$，$P(AB) = \frac{1}{4}$。在这里，我们看到 $P(B \mid A) = P(B)$，而 $P(AB) = P(A)P(B)$。事实上，由题意易知，甲试样是否破坏与乙试样是否破坏是互不影响的。

如果随机事件 A 与事件 B 满足关系

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{2-8}$$

则称随机事件 A 与 B 是相互独立的，简称 A 与 B 独立。

这里要指出的是，采用定义两事件相互独立性时，不必加 $P(A) > 0$ 和 $P(B) > 0$ 的限制条件，因而有更广泛的适用性。而且可以证明，概率为 0 或 1 的事件与任一事件独立，从而不可能事件和必然事件与任一事件独立。

事件相互独立的概念可以推广至多个事件的情形：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，若对任意的 $k(1 < k \leqslant n)$ 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}(1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n)$，均有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \tag{2-9}$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立。

若对任意两个事件 A_i 和 $A_j(i \neq j)$，均有

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \tag{2-10}$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立。式(2-9)实际包含了 $(n-1)$ 组共 $C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - n - 1$ 个等式。如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则必两两独立；但反之不一定成立。如 $n = 3$ 时，相互独立性包含下述两组共 4 个等式：

$$(1)\begin{cases} P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) \end{cases} \qquad (2)\ P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \tag{2-11}$$

而且，其中一组等式成立并不能保证另一组等式的成立。

下面介绍两条常用的关于独立事件的性质。

性质 1 若事件 A 与事件 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

【证】 $\overline{A}$ 与 B 相互独立是因为由 $\overline{A}B = B - AB$，且 $B \supset AB$（图 2-1），可得

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = [1 - P(A)]P(B) = P(\overline{A})P(B) \tag{2-12}$$

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 个事件相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意多个事件换成其对立事件后所得到的 n 个事件仍然相互独立。

性质 2 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则有

$$P(\sum_{k=1}^{n} A_k) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A}_k) \tag{2-13}$$

【证】 利用事件的关系与运算以及 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的独立性，直接计算即得

$$P(\sum_{k=1}^{n} A_k) = 1 - P(\prod_{k=1}^{n} \overline{A}_k) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A}_k)$$

在应用事件的独立性解决问题之前还需说明一点：在实际应用中，我们很少用独立性的定

义来判断事件 A 与事件 B 是否相互独立，而是从试验的具体条件以及试验的直观意义来判断事件的独立性。如果事件独立，就可以用独立事件定义中的公式来计算事件乘积得到概率，这将使得这类概率的计算变得相对容易。

这里需要强调的是：事件的独立性与互斥性是两个不同的概念。互斥性表示两个事件不能同时发生，是从事件本身来考虑的。容易证明对概率不为 0 的事件 A 与事件 B，则 A 与 B 独立和 A 与 B 互斥不能同时成立。

2.2.3 条件概率

在自然界和人类生活中，有许多事物是相互联系、相互影响的。在概率论中，除了要考虑随机事件 A 发生的概率 $P(A)$外，常常还需要考虑在事件 B 已经发生的条件下事件 A 发生的概率，我们记为 $P(A \mid B)$。一般而言，这两个概率是不相同的。

【例 2－2】 将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正反面的情况。设硬币正面向上为 H，事件 A 为"至少有一次为 H"，事件 B 为"两次掷出同一面"。现在来求已知事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率。

【解】 这里，样本空间为 $S = \{HH, HT, TH, TT\}$，$A = \{HH, HT, TH\}$，$B = \{HH, TT\}$。已知事件 A 已发生，有了这一信息，知道 TT 不可能发生，即知试验所有可能结果缩成的集合就是 A。A 中共有 3 个元素，其中只能 $HH \in B$，于是，在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率（记为 $P(B \mid A)$）为

$$P(B \mid A) = \frac{1}{3}$$

在这里，我们看到 $P(B) = \frac{2}{4} \neq P(B \mid A)$。这是因为在求 $P(B \mid A)$ 时，我们是限制在事件 A 已经发生的条件下考虑事件 B 发生的概率的。

下面我们从古典概型出发，导出条件概率的定义。设在 n 次试验中，事件 B 及事件 AB 各发生 n_B 及 n_{AB} 次，于是在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的频率为

$$f_n(A \mid B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{f_n(AB)}{f_n(B)} \tag{2-14}$$

当 $n \to \infty$ 时，频率就会接近于概率，故可得 $P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$。由此出发，我们可以给出条件概率的一般定义。

设 A，B 为同一随机试验中的两个事件，且 $P(B) > 0$，称

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{2-15}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率，简称条件概率。

不难验证，条件概率满足概率的公理化的三个条件：

(1) $P(A \mid B) \geqslant 0$； (2－16)

(2) $P(\Omega \mid B) = 1$； (2－17)

(3) 设可列事件 A_1，A_2，…两两不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \mid B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$。 (2－18)

由条件概率所满足的上述三条基本性质，可以类似得到条件概率满足的另外一些性质：

(1) $P(\varnothing \mid B) = 0$; (2-19)

(2) $P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A)$; (2-20)

(3) $P(B \cup C \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A) + P(BC \mid A)$，等等。

一般来讲，条件概率就是在附加一定的条件之下所计算的概率。从广义的意义上说，任何概率都是条件概率，因为，我们是在一定的试验之下去考虑事件的概率的，而试验是有条件的。在概率论中，规定试验的那些基础条件被看作是已定不变的。如果不再加入其他条件或假定，则算出的概率就叫做"无条件概率"，就是通常所说的概率。当说到"条件概率"时，总是指另外附加的条件，其形式可以归结为"已知某事件发生了"。

由条件概率的定义立即可得 $P(AB) = P(B)P(A \mid B)$ $(P(B) > 0)$；当还有 $P(A) > 0$ 时，则

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) \tag{2-21}$$

式(2-21)称为乘法公式，这个公式可以推广到 n 个事件的情况：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

这是因为 $P(A_1) \geqslant P(A_1A_2) \geqslant \cdots \geqslant P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$，所以

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\cdots A_n) &= P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdot\cdots\cdot\frac{P(A_1A_2\cdots A_n)}{P(A_1A_2\cdots A_{n-1})} \\ &= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \end{aligned} \tag{2-22}$$

【例 2-3】 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为 $\frac{1}{2}$；若第一次落下时未打破，第二次落下时打破的概率为 $\frac{7}{10}$；若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为 $\frac{9}{10}$。试求透镜落下三次而未打破的概率。

【解】 以 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 表示事件"透镜第 i 次落下打破"，以 B 表示事件"透镜落下三次而未打破"。因为 $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$，故有

$$P(B) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(\overline{A}_1) = \left(1-\frac{9}{10}\right)\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{200}$$

另解，按题意

$$\overline{B} = A_1 \cup \overline{A}_1A_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

而 A_1，$\overline{A}_1A_2$，$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 是两两互不相容的事件，故有

$$P(\overline{B}) = P(A_1) + P(\overline{A}_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

已知 $P(A_1) = \frac{1}{2}$，$P(A_2 \mid \overline{A}_1) = \frac{7}{10}$，$P(A_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2) = \frac{9}{10}$，即有

$$P(\overline{A}_1A_2) = P(A_2 \mid \overline{A}_1)P(\overline{A}_1) = \frac{7}{10}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{20}$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P(A_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(\overline{A}_1)$$

$$= \frac{9}{10}\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{200}$$

故得

$$P(\overline{B})=\frac{1}{2}+\frac{7}{20}+\frac{27}{200}=\frac{197}{200}$$

$$P(B)=1-\frac{197}{200}=\frac{3}{200}$$

【例 2-4】 图 2-2 表示一钢架柱基的沉降问题。A 与 B 表示支撑在土层上的两柱基。每一柱基可能保持原有标高或沉降 5 厘米，每一个柱基沉降的概率是 0.1。但当一个柱基已产生沉降，另一柱基可能沉降的概率是 0.8。求：(1)钢架柱基发生沉降的概率是多少？(2)钢架发生不均匀沉降的概率是多少？

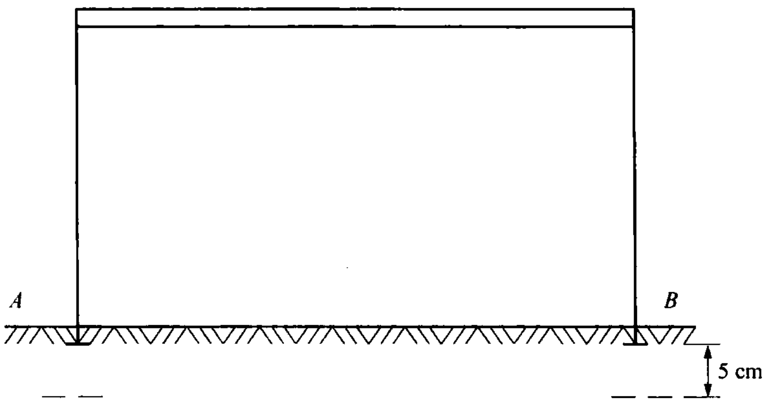


图 2-2 钢架柱基的沉降问题

【解】 (1) 两柱基的可能出现的情况是

AB	A 沉，B 沉
$\overline{A}B$	A 不沉，B 沉
$A\overline{B}$	A 沉，B 不沉
$\overline{A}\,\overline{B}$	A 不沉，B 不沉

钢架柱基沉降的概率(即 A 沉或 B 沉)为

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)\\&=0.1+0.1-0.1\times0.8=0.12\end{aligned}$$

(2) 钢架发生不均匀沉降的的事件 E 是由 $\overline{A}B$ 与 $A\overline{B}$ 构成。因为这两个事件是互斥的，所以

$$\begin{aligned}P(E)&=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})\\&=P(B)P(\overline{A}|B)-P(A)P(\overline{B}|A)\\&=0.1[1-P(A|B)]+0.1[1-P(B|A)]\\&=0.1\times(0.2)+0.1\times(0.2)=0.04\end{aligned}$$