高級中學課本

平面三角

出版者的話

初、高級中學代數和高級中學三角的課本，舊的有許多缺點，新的又沒有編好，經中央人民政府教育部指定暫以東北人民政府教育部根據蘇聯中學教科書編譯的課本，供一九五三年秋季開始學習這三科的班次採用．

蘇聯教科書的優點是內容精簡，理論與實際結合．教材的排列能兼顧科學的系統和教學的原則．東北各地試用這一套編譯的課本以後，凡能體會這些優點的教師，教學上都有很好的成績（參看教育資料叢刊社編：‘中學數學教學的改進’）．用慣了舊課本的教師倘能虛心體會新課本的優點，學習新的教學方法，當然可以得到同樣的成績．

這套編譯的課本也還有某些缺點，如‘編譯者聲明’中所說的理論與實際結合不如原書，就是最顯著的．原書是給蘇聯學生讀的，必然要結合蘇聯社會主義社會的實際，這就和我國當前的情況有若干距離．因此，怎樣根據這套課本的理論體系來結合我國新民主主義社會的實際，是教師們應該在教學實踐中仔細研究的問題．希望大家積累經驗，爲編好一套我國的數學科新課本作準備．

我社這次供應的東北編譯的這幾種課本，曾根據原書作了一些修訂．一九五三年秋季供應的，除了三角是全册外，初中代數只有上册，高中代數只有第一册，各供一學年用，請教師們注意．

這套編譯的課本，每種都附有習題一册．爲了發行的便利，把習題附釘在課本的後面，不再另釘成册了．

人民教育出版社

一九五三年三月

編譯者聲明

這一套中學自然科學教科書，包括算術、代數、平面幾何、物理、化學、動物、植物、人體解剖生理學等，是根據蘇聯十年制中學的教科書翻譯的．爲了適合我國的情況，在校閱時作了必要的修改，所以說是編譯．

這套教科書的初中用部分於一九四九年下半年匆匆編譯，一九五〇年起在東北各地中學試用．由於時間和人力的不足，發生了不少錯誤與不妥之處．一九五〇年下半年，我們一面修改了初中用書，一面又編譯出版了高中用的一部分．時間和人力仍然很受限制，在校閱時仍然感到很多地方不能趕上原書的精彩，特別是在理論與實際結合一方面．

我們希望，各地教師同志和別的同志們，指正我們的錯誤，提供我們進一步修改的要點，幫助我們來把這套教科書修訂得更好．

東北人民政府教育部

一九五〇年十二月

本書是根據蘇聯十年制中學九——十年級平面三角學教科書而編譯的．原書爲蘇聯雷布金(Н·Рыбкин)所著．1949年莫斯科出版．

高級中學課本 平面三角目錄

習題目錄

第一章　三角學

第二章　幾何習題的三角解法

緒　論

§1. 三角學的對象　三角學一詞是從希臘文翻譯過來的．它的原意爲三角形之量度．至於這門科學叫作三角學的原因，是因其最初研究的問題係利用三角形的已知元素(邊與角)以決定其未知元素(解三角形)的緣故．這個問題，到了現在仍爲三角學中基本問題之一．

在三角學中三角形邊與角之間量的關係，係由幾種隨着角的改變而變化之補助量來建立的，這些補助量我們叫做三角函數．但是三角函數的用處，不僅限於用來解三角形，在許多其他數學科目中，以及在物理學、工程學等也要應用它們．因而研究三角函數之重要，不減於研究解三角形．

因此三角學之內容可分爲兩部分：第一部分爲測角法，卽關於三角函數性質的研究；第二部分則爲狹義的三角學，卽三角形解法之研究．

在實際工作中，三角學有廣泛的應用：在測量工作方面——決定高度與距離，地形圖與三角形之測量等；在天文學方面——測量恆星高度與方位，赤緯與赤經，及天體坐標，並進一步將天體坐標知識應用於地理坐標之計算；在力學方面——力在坐標軸上的射影，合力的方向，週期運動公式；在機械學方面——螺旋、齒輪之計算等等．

三角學創始於希臘，它的創立與天文學的應用有着密切的關係．就天文學本身一方面來說，它是在航海與農業的需要影響下成長起來的：爲了海上航行的安全，需要按照星宿來決定船隻的正確航程；爲了農業需要基於數學尤其是三角學所製定的正確日曆．

希巴諸斯(Hippurchus 生於紀元前二世紀)是第一個三角表的著者，希巴諸斯三角表中載有不同圓心角所對的弦長．

紀元後 100 年學者米尼拉(Menelaus)發現了球面三角學的原理．地

球中心說之著名學者克拉基·布特勞密(Claudius Ptolemaeus)在所著‘算學總覽’一書中載有半徑爲1的圓的弦長的表. 他將半徑分爲60等份後,再將每一份又分爲60等份,同樣地再將其中每一小份分爲60等份(在拉丁文中,這些小份叫做‘Partes minutae primae’及‘Partes minutae secundae’由此得到我們量角所用的分、秒等名稱). 布特勞密的表中載有圓心角爲1°, $1\frac{1}{2}^\circ$, 2°, $2\frac{1}{2}^\circ$,……所對之弦長.

中世紀時,三角學在印度亦有相當的發展. 印度人已經利用了弦的一半卽正弦線;他們也引用了餘弦、正弦表與三角公式: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (惟當時係以文字敍述此公式,並未以數學符號表出). 以及把鈍角的正弦和餘弦化爲銳角函數的方法也是印度人所知道的.

九世紀與十世紀,阿剌伯學者發現三角函數中的正切,並製成較正確的正弦表. 至於三角學所以在阿剌伯發達的原因,亦係受當時天文學與航海術之影響;因爲此時阿剌伯與地中海沿岸間的貿易非常繁盛.

在歐洲第一個三角學的作者是英國學者布拉德衞丁(Bradwardine 十三世紀至十四世紀);而第一本有系統的三角學,則係德國學者約翰·米勒(John Müller)於十五世紀以筆名列基蒙塔(Regiomontanus)所發表之‘論各種三角形’. 在該書內,敍述平面三角形與球面三角形之解法,並指出三角學乃一獨立之科學,毋需從屬於天文學.

十六世紀韋達(Vieta)將三角公式以文字符號(字母)表示之後,三角學始具有現代之形式.

以後,更有衆多學者致力於三角學之研究,如:納伯爾(Napier 對數發明者)、包傑諾特(Pothenot)以及天才的彼得堡科學院院士尤拉(Eüler)等,而尤拉應推爲三角函數近代理論之創始人.

§2. 函數概念 於二種變數之間存在着一種關係,卽,對於此二變數中之一的每一值有另一變數的確定值與之對應. 例如,下列各等式

$$y=a+x;\ y=x^2;\ y=\sqrt{x},\cdots\cdots$$

中，二變數 x、y 間存在之關係.

更如，正方形之邊與面積間之關係，球體之半徑與球體體積間之關係，以及其他等等.

一變數之數值對應於另一變數之數值時，前一變數卽叫做後一變數之函數．例如：圓面積爲該圓半徑之函數；卽，事實上當圓半徑長度改變時，則圓面積必隨半徑之變化而變化．故對於半徑的每一值有圓面積的確定值與之相應(反言之，如以圓面積之改變以決定該圓半徑之變化時，則圓半徑卽爲該圓面積之函數).

一數量之變化，能決定函數之變化時，則該數量，叫做函數之變數．例如：在 $y=x^3$ 中，y 隨 x 之變化而變化，故 y 叫做函數，x 叫做函數 y 之變數．同様的在 $y=\lg N$ 中，y 爲函數，N 爲變數.

§3. 角與弧的度量　我們在幾何學中便已知道，角是用弧來度量的．為了用弧來度量角，我們就把弧用圓周的幾分之幾或者半徑的多少倍*來表示．由幾何學已知前一個表示法是用'度'來表示弧和角．後一個表示法是用弧長與半徑之比值來表示弧．例如'某一弧長爲 2.43'，卽將該弧伸成直線後，其長度等於半徑的 2.43 倍．因此圓周之半可用 $\pi R:R$ 卽數 π 表示；圓周之 $\frac{1}{4}$ 用數 $\frac{\pi}{2}$ 表示，等等.

弧的這種度量法，叫做弧度法(或叫做弳制).

應用這種方法，爲了使得圓心角和它所對的弧量得是同一個數．那麼就需要以等於半徑的弧長所對的圓心角作爲量角的單位．這種量角的單位，叫做弧度(或叫做弳).

因此，角之對應弧長與半徑之比値卽爲該角之弧度數．例如：〔某角

---

* 第一種方法是比較直觀的，也是實際上常用的(在量角器上)；第二種方法則是在理論研究方面比較常用的.

校者註：譬如說，某弧長是圓周(半徑爲 R)的 n 分之一，那麼，某弧長就是 $\frac{2\pi}{n}R$，也就是 R 的 $\frac{2\pi}{n}$.

等於 $\frac{3}{2}\pi$〕即該角等於 $\frac{3}{2}\pi$ 個弧度.

因爲圓周長等於半徑之 2π 倍,故一弧度如以度來表示,則爲 $\frac{360^\circ}{2\pi}$ 等於 $57^\circ 17' 44.8''$ (誤差在 $0.05''$ 以內).

應該很好地記住,任一個周角之弧度數均爲 $2\pi R:R$ 卽 2π,而其度數則爲 360°,因而可得下面的對應:

360°	180°	90°	270°	60°	45°	30°	18°
2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$

我們現在來尋求度數與弧度數的換算公式:

設一弧或角的度數爲 α,弧度數爲 a;因一整圓周之度數爲 360° 而弧度數爲 2π. 故可得下式:

$$\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{a}{2\pi}, \text{ 或 } \frac{\alpha}{180^\circ}=\frac{a}{\pi};$$

由此

$$a=\pi\cdot\frac{\alpha}{180^\circ}, \tag{1}$$

$$\alpha=180^\circ\cdot\frac{a}{\pi}. \tag{2}$$

例題　設一角爲 $67^\circ 30'$, 試求其弧度數.

按公式(1),以 $67^\circ 30'$ 代 α, 則得

$$x=\pi\cdot\frac{67^\circ 30'}{180^\circ}=\frac{3}{8}\pi;$$

如以 π 之近似值 3.14159 代入上式,則 $x=1.17810$, 其誤差在 0.000005 以內.

不利用公式,由下列對應値亦可求其 x 之値:

$$360^\circ\cdots\cdots 2\pi;\ 1^\circ\cdots\cdots\frac{2\pi}{360^\circ};$$

$$67°30' = 67.5° \cdots\cdots \frac{2\pi}{360°} \times 67\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\pi.$$

§ 3a. 弧長 設圓半徑爲 r,弧長爲 l,其所對圓心角的弧度爲 a;則由弧度之定義可得

$$a = \frac{l}{r}, \text{ 或 } l = ra,$$

亦卽弧長等於圓半徑與弧的弧度數之乘積. 此公式常用於物理學及技術科學中.

在計算上,我們常使用度與弧度的換算表.

三 角 函 數

測 角 法

第一章　銳角三角函數

§4. 三角函數的名稱和表示法　任一角的三角函數有以下六種，卽：正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割.

它們用以下六種符號來表示：sin、cos、tan、cot、sec、csc. 在上列函數符號後，必須附以對應於函數值的變數值（角）. 例如一角 α 的正弦，用符號來表示則爲：$\sin\alpha$.

§5. 銳角三角函數的定義　取任意一銳角 α，以此角之頂點爲圓心，任一長爲半徑作一圓，使得這個角成爲圓心角. 設以 R 表半徑之長. 爲了區別構成此角的兩個半徑，設角 α 變化時（圖 1），半徑 OA 的位置不變，僅半徑 OB 隨之轉動. 這樣，我們將固定的半徑 OA 叫做角的不動徑，將轉動的半徑 OB 叫做角的動徑*. 現在來看一下三角函數的定義，在開始時可以一般地說：它們是在以已知角爲圓心角的圓上所引的特殊線段與半徑之比. 爲了作出這些特殊線段除弧 AB 外，我們還需利用弧 AB 的延長弧，及與 OA 直交的半徑 OM.

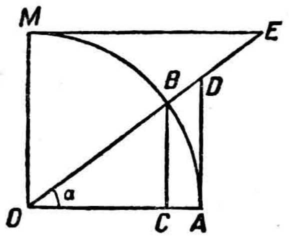

圖 1

銳角的三角函數線及三角函數的定義如下：

1) 由動徑的端點向不動徑所引的垂線（BC）叫做正弦線，正弦線與半徑之比叫做已知角的正弦（$\sin\alpha=\dfrac{BC}{R}$）.

2) 由圓心向正弦線所引的垂線（OC）叫做餘弦線，餘弦線與半徑之比叫做已知角的餘弦（$\cos\alpha=\dfrac{OC}{R}$）.

3）由不動徑的端點向上所引的切線與動徑的延長線相交的線段（AD）叫做正切線，正切線與半徑之比叫做已知角的正切（$\tan\alpha=\frac{AD}{R}$）。

4）由垂直於不動徑的半徑端點所引的切線與動徑的延長線相交的線段（ME）叫做餘切線，餘切線與半徑之比叫做已知角的餘切（$\cot\alpha=\frac{ME}{R}$）。

5）從圓心到正切線終點的線段（OD）叫做正割線，正割線與半徑之比叫做已知角的正割（$\sec\alpha=\frac{OD}{R}$）。

6）從圓心到餘切線終點的線段（OE）叫做餘割線，餘割線與半徑之比，叫做已知角的餘割（$\csc\alpha=\frac{OE}{R}$）。

例如：半徑等於 9 cm，而正弦線等於 6 cm，則正弦卽等於數$\frac{2}{3}$。

§6. 定理 三角函數的值僅決定於角之大小，而與討論時所用圓的半徑之長短無關。

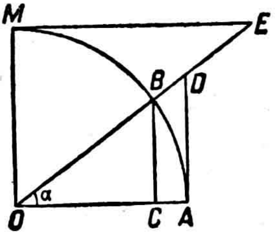

圖 2

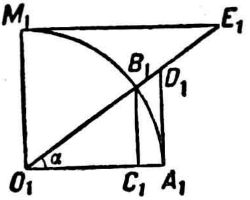

圖 3

在圖 2 及圖 3 中，$\angle AOB$ 與 $\angle A_1O_1B_1$ 都等於已知角 α，半徑 OA 與 O_1A_1，弧 AB 與 A_1B_1 雖不相等，但我們要證明 $\angle AOB$ 與 $\angle A_1O_1B_1$ 的同名函數卻相等。

設關於半徑爲 R 之圓的三角函數值用 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, …… 表示；關於半徑爲 R_1 之圓的三角函數值用 $\sin_1\alpha$, $\cos_1\alpha$, …… 表示。現在證明 $\sin_1\alpha$

---

* 有些教科書上，又把動徑的最終位置叫做終邊，把不動徑叫做始邊，卽表示始邊是動徑的開始位置，終邊是動徑的最終位置。

$=\sin\alpha$, $\cos_1\alpha=\cos\alpha$ 等等.

證明　因三角形 $O_1B_1C_1$、$O_1D_1A_1$ 及 $O_1M_1E_1$ 各與其對應三角形 OBC、ODA 及 OME 相似;因此有:

$$\frac{B_1C_1}{R_1}=\frac{BC}{R},\quad \frac{O_1C_1}{R_1}=\frac{OC}{R},\quad \frac{A_1D_1}{R_1}=\frac{AD}{R}$$

等等,亦卽 $\sin_1\alpha=\sin\alpha$, $\cos_1\alpha=\cos\alpha$, $\tan_1\alpha=\tan\alpha$,等等.

由此可知,等角的三角函數值都相等,而與半徑的長短無關.

§7.　由前節證明可知,半徑的長度,無論如何變化,而對已知角的三角函數值並不發生影響;但如果改變角的大小時,由圖上就可以明顯地看出,該角的每一個函數值將隨角之變化而變化.

§8.　因爲圓心角及其所對弧有同一的數值,故某角的三角函數,同時亦爲該角所對弧的三角函數,此處所謂弧的三角函數,實際上應理解爲弧的度量卽度或者弧度的三角函數. 因此,爲了研究方便起見,有時以弧代替角,也有時將弧與角通稱爲變數.

§9. 角由 0° 變化到 90° 時三角函數值的變化　在圖 4 中,如角 α 漸次由 0° 增加到 90° 時,則 $\frac{BC}{R}$、$\frac{AD}{R}$ 及 $\frac{OD}{R}$ 各比也漸次增大,而 $\frac{OC}{R}$、$\frac{ME}{R}$、$\frac{OE}{R}$ 各比則漸次減小(在圖 5 中指出了正弦與餘弦的變化);因此可知,若一銳角漸次增大時,其正弦、正切、正割亦隨之逐漸增大,而餘弦、餘

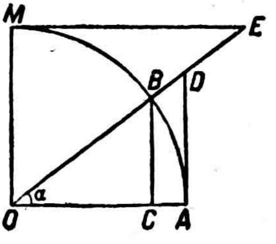

圖 4

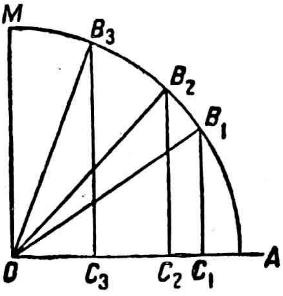

圖 5

切、餘割則逐漸減小．當角α增大到$90°$時，$\frac{BC}{R}$變為1，$\frac{OC}{R}$變為0，$\frac{AD}{R}$變為∞，$\frac{ME}{R}$變為0，$\frac{OD}{R}$變為∞，$\frac{OE}{R}$變為1；所以：

$$\sin 90°=1,\quad \cos 90°=0,\quad \tan 90°=\infty,$$
$$\cot 90°=0,\quad \sec 90°=\infty \text{ 及 } \csc 90°=1.$$

當一角x由$90°$漸次減小到$0°$時，則$\frac{BC}{R}$、$\frac{AD}{R}$及$\frac{OD}{R}$亦隨之逐漸減小，而$\frac{OC}{R}$、$\frac{ME}{R}$及$\frac{OE}{R}$則逐漸增大．若角α變為零，則$\frac{BC}{R}$變為0，$\frac{OC}{R}$變為1，$\frac{AD}{R}$變為0，$\frac{ME}{R}$變為∞，$\frac{OD}{R}$變為1，$\frac{OE}{R}$變為∞；所以：

$$\sin 0°=0,\quad \cos 0°=1,\quad \tan 0°=0,$$
$$\cot 0°=\infty,\quad \sec 0°=1 \text{ 及 } \csc 0°=\infty.$$

含有符號∞的等式應該有條件地理解；例如：等式$\tan 90°=\infty$的意義僅為當一角接近於$90°$的時候，其正切值無限增大．

因此，若角α由$0°$增大到$90°$時，則

$\sin\alpha$ 由 0 增大到 1；　　$\cos\alpha$ 由 1 減小到 0；

$\tan\alpha$ 由 0 增大到∞；　　$\cot\alpha$ 由∞減小到 0；

$\sec\alpha$ 由 1 增大到∞；　　$\csc\alpha$ 由∞減小到 1．

因為$0°$與$90°$是銳角的兩個極值，故由上之結論可知，哪些數是可以作為一種銳角三角函數值．例如3這個數，可作正切、餘切、正割及餘割各函數之值，但不能作正弦及餘弦二函數值．

§10. 由已知三角函數作銳角　從§6與§9可知，對於角α的每個值，每種三角函數必有一確定的值與之對應；反之，對於任一三角函數值亦必有一確定的銳角與之對應．下面舉例說明由一個已知三角函數值作銳角的方法．

例1. 已知一銳角的正弦為$\frac{2}{3}$，求作此銳角（圖6）．

解　先作一任意直線（OA），然後以O為圓心，OA為半徑畫弧AB．

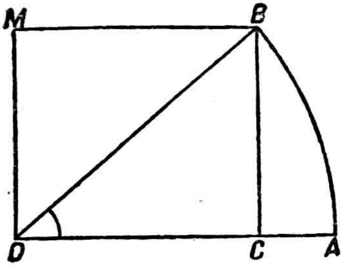

圖 6

設 OA 爲所求銳角的不動徑，O 爲頂點，爲了使其正弦是 $\frac{2}{3}$，就必須使弧 AB 的另一端到 OA 的距離與半徑之比爲 2:3。因此，可由點 O 向上引一垂線 OM，使其長等於 OA 的 $\frac{2}{3}$，再由點 M 引平行於 OA 的直線，與弧 AB 相交於一點 B，連結 OB，因爲 $\sin AOB = \frac{2}{3}$，故 $\angle AOB$ 即爲所求。我們要注意的就是，角的大小與半徑的長短無關。因爲以任何長度爲半徑，都可以得到與三角形 OBC 相似的三角形，因此它們的對應角也是相同的。

例 2. 已知一銳角的餘切爲 2，求作此銳角。

解 以直角 AOM (圖 7) 的頂點爲圓心，以任意長爲半徑畫弧 AM，設與角 AOM 的一邊 OM 的交點爲 M，過 M 引一長爲半徑 2 倍的切線 ME，連結 OE，交 $\overset{\frown}{AM}$ 於 B 點，則所成的角 AOB 即爲所求，因爲：

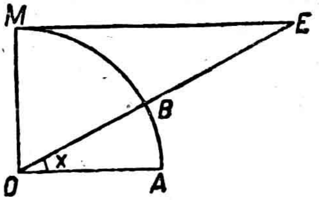

圖 7

$$\cot AOB = \frac{ME}{R} = \frac{2R}{R} = 2.$$

例 3. 已知一銳角的正割爲 $\frac{4}{3}$，求作此銳角。

解 作任意一弧 AD (圖 8)，取它的一個半徑(OA)作爲不動徑，由不動徑的端點 A 向上作一切線。因爲正割爲 $\frac{4}{3}$，故必須使切線的終點與圓心的距離爲半徑的 $\frac{4}{3}$。欲達到此目的，可延長 OA 至 E，使 $OE = \frac{4}{3}OA$，然後以 O 爲圓心 OE 爲半徑畫弧 EC，設弧 EC 與切線相交於一點 C，連結 OC，則角 AOC 即爲

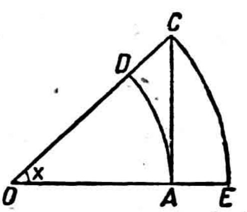

圖 8

所求.

和前面的兩個例子一樣,所求的角都與半徑的長短無關.

下列各函數的銳角留給學者自己去求:

$$\cos x=\frac{3}{5},\ \tan x=\frac{4}{7},\ \csc x=2.$$

§ **11.** 由以上各例可知,對於每一三角函數值即可得出一確定的銳角,並且在前面已經學過,對於任一銳角都有一確定的三角函數值與之對應. 因此可以說銳角與其三角函數,彼此互相完全確定.

§ **12. 同角的三角函數間之相互關係** 在同角的三角函數中,很容易地發現它們間最簡單的關係(圖 9).

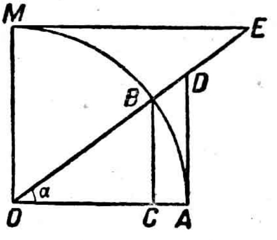

圖 9

1) 在直角三角形 OBC 中有:

$$BC^2+OC^2=OB^2.$$

兩邊各除以 R^2, 則得:

$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2+\left(\frac{OC}{R}\right)^2=\left(\frac{OB}{R}\right)^2,$$

或:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \qquad (\mathrm{I})$$

2) 在相似三角形 ODA 與 OBC 中,可得:

$$\frac{AD}{OA}=\frac{BC}{OC};$$

在上面等式中,以 R 代替 OA, 並用 R 除等式右端的分子分母,則得:

$$\frac{AD}{R}=\frac{\left(\frac{BC}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)},$$

或:

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (\mathrm{II})$$

3）在相似三角形 EOM 及 OBC 中，得：

$$\frac{ME}{OM}=\frac{OC}{BC}, \text{由此 } \frac{ME}{R}=\frac{\left(\frac{OC}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)},$$

或：

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad \text{(III)}$$

4）在相似三角形 ODA 與 OBC 中可得：

$$\frac{OD}{OA}=\frac{OB}{OC}, \text{由此 } \frac{OD}{R}=\frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)},$$

或：

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},$$

由此：

$$\sec\alpha\cdot\cos\alpha=1. \qquad \text{(IV)}$$

5）在相似三角形 EOM 與 OBC 中可得：

$$\frac{OE}{OM}=\frac{OB}{BC}, \text{由此 } \frac{OE}{R}=\frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)},$$

或：

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},$$

由此：

$$\csc\alpha\cdot\sin\alpha=1. \qquad \text{(V)}$$

§ 13. 在同角的三角函數中僅有五種獨立的相互關係 我們從作圖來證實這個事實.

實際上，若已知某角六個函數中的任一函數值，則該角卽可作出（§ 10）. 由所作的角，卽可決定該角的其他五個函數值；這樣：若已知一角的一個三角函數的值時，其餘五個函數的值就可以求出. 但是當我們要解出五個未知數時，就需要有五個互相