工程数学

（复变函数与积分变换）

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

主编/夏爱生 杨胜友 孙利民

（公共课程）

F E B

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

工程数学
复变函数与积分变换

主编　夏爱生
杨胜友
孙利民

东方出版社

责任编辑:任　方
封面设计:田　健
责任校对:龚会萍
组　　稿:李三三

图书在版编目(CIP)数据

工程数学.复变函数与积分变换
夏爱生,杨胜友,孙利民　主编
北京:东方出版社,2000.10
ISBN 7－5060－1399－1
Ⅰ.工…
Ⅱ.①夏…②杨…③孙…
Ⅲ.①工程数学－高等教育－自学考试－自学参考资料②复变函数－高等教育－自学考试－自学参考资料③积分变换－高等教育－自学考试－自学参考资料
Ⅳ.TB11

东方出版社出版发行
100706　北京朝阳门内大街166号
北京新丰印刷厂印刷

开本:880*1230毫米　1/32　印张:13.5　字数:380千字
版次:2000年10月第一版　2000年10月第一次印刷
印数:1－10000册
定价:16.50元

说 明

本书是全国高等教育自学考试大纲、教材的配套辅导用书。

本书的编写依据：

1. 全国高等教育自学考试指导委员会颁布的《工程数学(复变函数与积分变换)自学考试大纲》；

2. 指定教材《工程数学(复变函数与积分变换)》(贺才兴主编，辽宁大学出版社出版)。

本书特点：

本书以自学考试大纲规定的考核知识点及能力层次为线索，按指定教材分章辅导，主要针对考核要求将每一个知识点按照实际考题类型列举大量例题并作出详尽的解答及分析，且配备了大量练习题(含参考答案)及综合模拟试题和主要公式附录，旨在帮助应试者迅速而全面地掌握本课的内容、熟悉应试题型、掌握应试中所必需的技巧，取得理想的应试效果。

本书亦是编者长期从事该课程教学，多年从事该课程自学考试辅导的经验的结晶，相信本书的出版，对广大考生学习本课程具有切实的指导意义。

一分耕耘，一分收获。祝有志于自学的朋友能在考试中取得优异成绩。

编 者

2000 年 8 月

目　　录

第一篇　复变函数

第二篇 积分变换

第一篇　复变函数

第一章　复　数

内容提要

一、复数及其表示法

1. 复数的概念

对于任意实数 x 和 y，称 $x+iy$ 为**复数**. 其中 $i=\sqrt{-1}$ 称为**虚数单位**. 记 $z=x+iy$.

实数 x 称为复数 z 的**实部**；实数 y 称为复数 z 的**虚部**. 记为 $x=\mathrm{Re}z, y=\mathrm{Im}z$.

当 $x=0$ 时，$z=iy$ 称为**纯虚数**；当 $y=0$ 时，$z=x$ 为实数.

两个**复数相等**，必须且只须它们的实部和虚部分别相等.

一个复数 z **等于** 0，必须且只须它的实部和虚部分别等于 0.

2. 复数的表示法

(1) **复平面**

由于一个复数 $z=x+iy$ 由一对有序实数 (x,y) 唯一确定，所以对于平面上给定的直角坐标系，复数的全体与该平面上点的全体成一一对应关系，从而复数 $z=x+iy$ 可以用该平面上坐标为 (x,y) 的点来表示，这是复数的一个常用表示法. 此时，x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**，两轴所在的平面称**复平面**或 z **平面**.

(2) **复数的向量表示**

复数 $z=x+iy$ 可以用起点为原点，终点为 $P(x,y)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示. 如图 1-1 所示.

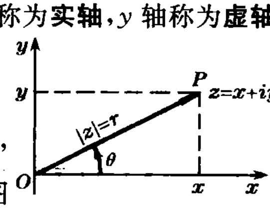

图　1-1

向量$\overrightarrow{OP}$的长度，称为复数 $z=x+iy$ 的**模或绝对值**，记为 $|z|$ 或 r. 于是

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

显然，下列各式成立：

(i) $|x|\leqslant|z|, |y|\leqslant|z|$;

(ii) $|z|\leqslant|x|+|y|$.

当 $z\neq 0$ 时，向量$\overrightarrow{OP}$与 x 轴正向的夹角 θ，称为复数 z 的**辐角**，记为

$$\theta=\mathrm{Arg}z.$$

这时有

$$\begin{cases} x=|z|\cos\theta, y=|z|\sin\theta; \\ \mathrm{tg}\theta=\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

若 θ_1 为复数 z 的一个辐角，则 $\theta_1+2k\pi$(k 为任意整数) 就给出了 z 的全部辐角. 把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的 θ_0，称为 $\mathrm{Arg}z$ 的**主值**，记为

$$\theta_0=\arg z.$$

辐角的主值 $\arg z$ 可以由反正切函数 $\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$ 来确定，其关系如下：

$$\arg z=\begin{cases} \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}, & z \text{ 在第 I，IV 象限}; \\ \pi+\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}, & z \text{ 在第 II 象限}; \\ -\pi+\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}, & z \text{ 在第 III 象限}. \end{cases}$$

(3) 复数的三角表示与指数表示

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

称为复数 z 的**三角表示式**.

$$z=re^{i\theta},$$

称为复数 z 的**指数表示式**.

二、复数的运算及几何意义

1. 复数的加法和减法

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的**加法和减法**定义如下：

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2);$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

且有下列两个不等式：

(1) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$;

(2) $|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$.

2. 复数的乘法

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的**乘法**定义如下：

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

又设两个复数的三角表示式分别为 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$. 则有

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],$$

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.$$

特别当 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 时，复数 z 的 n 次幂

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

3. 复数的除法

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的**除法**定义如下：

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}\\&=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}(z_2\neq0).\end{aligned}$$

且有 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

若复数 z_1 和复数 z_2 的指数表示式分别为 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$.

则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}(r_2\neq 0).$$

4. 复数的方根

设复数 ω 和 z，若 $\omega^n=z$(n 为正整数)，则称**复数 ω 为 z 的 n 次方根**，记为 $\omega=\sqrt[n]{z}$.

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则 z 的 n 次方根 ω 为：

$$\omega=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

其中 $\sqrt[n]{r}$ 为 r 的算术根，$k=0,1,2,\cdots,n-1$.

5. 共轭复数及其运算性质

复数 $x-iy$ 称为复数 $z=x+iy$ 的**共轭复数**，记为 $\bar{z}$，即 $\bar{z}=x-iy$.

z 和 $\bar{z}$ 关于实轴对称.

共轭复数有以下运算性质：

(1) $|\bar{z}|=|z|$;

(2) $\mathrm{Arg}\bar{z}=-\mathrm{Arg}z$;

(3) $\bar{\bar{z}}=z$;

(4) $z\bar{z}=|z|^2$;

(5) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$;

(6) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$;

(7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$;

(8) $x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$;

(9) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$;

(10) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

6. 曲线的复数方程

(1) 用复数形式的方程来表示一条平面曲线 $F(x,y)=0$;

(2) 从复数形式的方程来确定其所表示的平面曲线.

三、平面点集和区域

1. 点集的概念

邻域 在平面上以 z_0 为中心，正数 δ 为半径的圆内部的点集，称为**点 z_0 的 δ 邻域**.

内点 设 E 为一平面点集，z_0 为 E 中一点，如果存在 z_0 的一个邻域，该邻域内的所有点都属于 E，那么称 z_0 为 E 的**内点**.

外点 若点 z_0 的某一邻域的点都不属于 E，则称 z_0 为 E 的**外点**.

界点 若在点 z_0 的任意一个邻域内，既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称点 z_0 为 E 的**界点**.

有界点集 若点集 E 能完全包含在以原点为圆心，以某一个正数 R 为半径的圆域的内部，则称 E 为一个**有界点集**.

2. 区域

开集 如果点集 E 的每个点都是它的内点，则称 E 为**开集**.

连通的 如果点集 E 中任何两点都可以用完全属于 E 的一条折线连接起来，称点集 E 为**连通的**.

区域 连通的开集称为**区域**，区域用 D 表示.

边界 区域 D 的全体界点称为 D 的**边界**.

闭区域 由区域 D 及其边界所构成的点集称为**闭区域**，记为 $\overline{D}$.

有界区域 若区域 D 可以包含在某个以原点为中心，以某一正数 R 为半径的圆内，则称 D 为**有界区域**，否则为**无界区域**.

3. 简单曲线

设 $C: z = z(t) (a \leqslant t \leqslant b)$ 为一条连续曲线，$z(a)$ 与 $z(b)$ 分别称为 C 的**起点**与**终点**. 对于满足 $a < t_1 < b$ 和 $a \leqslant t_2 \leqslant b$ 的 t_1 与 t_2，当 $t_1 \neq t_2$，而有 $z(t_1) = z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的**重点**. 没有重点的连续曲线 C，称为**简单曲线**或**约当**($Jordan$) **曲线**. 如果简单曲线 C 的起点与终点重合，即 $z(a) = z(b)$，那末曲线 C 称为**简单闭曲线**或**约当闭曲线**.

以一条简单闭曲线 C 为公共边界可以把平面分为两个区域：一

个是有界的，称为 C 的**内部**；另一个是无界的，称为 C 的**外部**.

若沿 C 前进一周时，C 的内部始终在 C 的左方，则这个前进方向称为**正方向**；若沿 C 前进一周时，C 的内部始终在 C 的右方，则这个前进方向称为**负方向**.

设 $z = z(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 是一条简单曲线（闭或不闭），若 $z(t)$ 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上有连续导数

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t), z'(t) \neq 0,$$

则称此曲线为**光滑曲线**. 由若干段光滑曲线所组成的曲线称为**逐段光滑曲线**.

4. 单连通区域与多连通区域

复平面上的一个区域 D，如果在其中任作一条简单闭曲线，而曲线的内部总属于 D，则称 D 为**单连通区域**. 一个区域如果不是单连通区域，就称为**多连通区域**.

例题分析

例 1.1 求下列复数 z 的实部与虚部，共轭复数，模与辐角主值

(1) $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$；　　(2) $z = (-1+\sqrt{3}i)^6$；

(3) $z = \dfrac{1}{i} - \dfrac{3i}{1-i}$；　　(4) $z = i^8 - 4i^{21} + i$.

解 (1) $$z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i.$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{\sqrt{3}+1}{4}; \operatorname{Im} z = \frac{\sqrt{3}-1}{4};$$

$$\bar{z} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}i;$$

$$|z| = \frac{|1+i|}{|\sqrt{3}+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\arg z = \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}).$$

$$(2) z = (-1+\sqrt{3}i)^6 = [2(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)]^6$$

$$= 2^6(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = 64 .$$

$\operatorname{Re} z = 64$;　　$\operatorname{Im} z = 0$;

$\bar{z} = 64$;

$|z| = 64$;

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{0}{64} = 0.$$

$$(3) z = \frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = -i - \frac{3i-3}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i.$$

$\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}$;　　$\operatorname{Im} z = -\frac{5}{2}$;

$\bar{z} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$;

$|z| = \frac{\sqrt{34}}{2}$;

$$\arg z = -\operatorname{arctg}(\frac{5}{3}).$$

$$(4) z = i^8 - 4i^{21} + i = 1 - 4i + i$$

$$= 1 - 3i.$$

$\operatorname{Re} z = 1$;　　$\operatorname{Im} z = -3$;

$\bar{z} = 1 + 3i$;

$|z| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$;

$\arg z = -\operatorname{arctg} 3$.

例 1.2　将下列复数化为三角表示式与指数表示式.

(1) $z = -\sqrt{12} - 2i$;　(2) $z = -1 + \sqrt{3}i$;

(3) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$;　(4) $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta, (-\pi < \theta \leqslant \pi)$.

解(1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$,

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=-\frac{5}{6}\pi.$$

所以 z 的三角表示式为:

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right].$$

z 的指数表示式为:

$$z=4e^{-\frac{5}{6}\pi i}.$$

(2) $r=|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$,

$$\theta=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\pi=\frac{2}{3}\pi.$$

所以 z 的三角表示式为:

$$z=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

z 的指数表示式为:

$$z=2e^{\frac{2}{3}\pi i}.$$

(3) $r=|z|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=1$,

$$\theta=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{5}{6}\pi.$$

所以 z 的三角表示式为:

$$z=\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right).$$

z 的指数表示式为:

$$z=e^{-\frac{5}{6}\pi i}.$$

(4) $r=|z|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{2(1+\cos\theta)}$

$$=2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\theta}{2}.$$

所以 z 的三角表示式为:

$$z=2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}),(-\pi<\theta\leqslant\pi).$$

z 的指数表示式为：

$$z=2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{\theta}{2}i}.$$

例 1.3　当 x、y 等于什么实数时，等式

$\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立？

解　由 $\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$：可得：

$x+1+i(y-3)=(1+i)(5+3i).$

即
$$(x+1)+i(y-3)=2+8i.$$

因此有

$$\begin{cases}x+1=2;\\ y-3=8.\end{cases}$$

从而得 $x=1,y=11.$

所以当 $x=1,y=11$ 时等式 $\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立.

例 1.4　证明：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；

(2) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$；

(3) $\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}(\bar{z}+z),\mathrm{Im}z=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z}).$

证明(1) 设 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2.$

左式 $=\overline{z_1\pm z_2}=\overline{(x_1+iy_1)\pm(x_2\pm iy_2)}$

$=\overline{(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)i}=(x_1\pm x_2)-(y_1\pm y_2)i$；

右式 $=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}=\overline{(x_1+y_1i)}\pm\overline{(x_2+y_2i)}$

$=(x_1-y_1i)\pm(x_2-y_2i)=(x_1\pm x_2)-(y_1\pm y_2)i.$

所以要证明的等式成立.

(2) 设 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2.$

左式 $=\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\right)}$

$$= \frac{\overline{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)i}}{(x_2^2 + y_2^2)}$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} - \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}i;$$

$$\text{右式} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - (x_2y_1 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)} - \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{(x_2^2 + y_2^2)}i.$$

所以等式$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$成立.

(3) 设$z = x + iy$,则$\overline{z} = x - iy$.

$$\frac{1}{2}(\overline{z} + z) = \frac{1}{2}(x - iy + x + iy) = x = \mathrm{Re}z,$$

$$\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - x + iy) = y = \mathrm{Im}z.$$

所以等式$\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(\overline{z} + z)$,

$$\mathrm{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

成立.

例 1.5 求复数$z = \frac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}$的模

解 $|z| = \frac{|3+i||2-i|}{|3-i||2+i|} = 1.$

例 1.6 试用$\sin\theta$和$\cos\theta$表示$\cos 3\theta$和$\sin 3\theta$.

解 设$z = \cos\theta + i\sin\theta$,

$$z^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta.$$

又
$$\begin{aligned} z^3 &= \cos^3\theta + i3\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

例 1.7 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 与 $z_2 = 2 + i$，求它的另一个顶点.

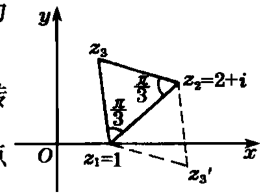

图 1-2

解 如图 1-2，将向量 $z_2 - z_1$ 绕 z_1 旋转 $\frac{\pi}{3}$（或 $-\frac{\pi}{3}$）就得到另一个向量. 它的终点即为所求的顶点 z_3（或 z'_3）. 由于复数 $e^{\frac{\pi}{3}i}$ 的模为 1，辐角为 $\frac{\pi}{3}$，根据复数的乘法，有

$$z_3 - z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_1) = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(1 + i)$$

$$= (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})i.$$

所以

$$z_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i.$$

类似可得 $$z'_3 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i.$$

例 1.8 当 $|z| \leqslant 1$ 时，求 $|z^n + a|$ 的最大值. 其中 n 为正整数，a 为复数.

解 由三角不等式，有

$$|z^n + a| \leqslant |z^n| + |a| \leqslant 1 + |a|.$$

所以 $|z^n + a|$ 的最大值为 $1 + |a|$.

例 1.9 判定下列命题的真假：

(1) 若 z 为纯虚数，则 $z \neq \bar{z}$；

(2) 零的辐角为零；

(3) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

解 (1) 为真命题；

(2) 为假命题；

(3) 为假命题.

例 1.10 试利用 $(5 - i)^4(1 + i)$，证明