



苏中 李擎 李旷振 杨宝利 ◎ 编著

惯性技术

GUANXING
JISHU



国防工业出版社
National Defense Industry Press

惯性技术

苏中 李擎 李旷振 杨宝利 编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书全面系统地论述了惯性技术的基本理论以及惯性器件、惯性仪表和惯性导航系统的原理、设计和应用。

全书共分6章。分别介绍了惯性技术基础理论,力学陀螺、光学陀螺和加速度计等惯性敏感元件,惯性稳定器、稳定平台和惯性定向装置,平台式惯导系统和捷联式惯导系统的机械编排、误差及其传播特性,初始对准、动基座自对准和传递对准等惯性导航系统的基本原理和设计,并介绍了惯性技术的各种实际应用。

本书从系统掌握惯性技术角度出发,在内容上由浅入深,可供高等院校自动化及导航类专业师生以及惯性技术科技工作者使用。

图书在版编目(CIP)数据

惯性技术/苏中等编著. —北京:国防工业出版社,
2010.12

ISBN 978-7-118-07280-8

I. ①惯... II. ①苏... III. ①惯性导航 IV.
①TN96

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 008050 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 787 × 1092 1/16 印张 12 1/2 字数 285 千字

2010 年 12 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 25.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前 言

惯性技术是以牛顿力学、光电子学等为基础的多学科综合技术,是唯一的全自主、实时、连续、隐蔽、不受干扰、无时间、无地域、无环境限制的运动物体姿态和轨迹信息感知技术,是惯性仪表、惯性稳定、惯性系统、惯性制导与惯性测量等及其相关技术的总称。

惯性技术涉及物理、数学、光学、材料学、精密机械学、电子技术、计算机技术、控制技术、测试技术、仿真技术、加工制造及工艺等技术,集光、机、电、算等当代高新技术为一体,广泛应用于航空、航天、航海、导航、工业、交通运输、测量勘探、医疗、农业、林业以及机器人和消费等领域。它是武器装备信息化的主要支撑技术之一,更是衡量一个国家科学技术水平和国防实力的重要标志之一。

本书共6章,以惯性技术具体应用为主线,全面系统地介绍了惯性技术基本理论以及惯性敏感元件和惯性导航系统的原理、设计和应用。第1章~第3章详细介绍惯性技术的基础理论。其中第1章讲述惯性技术基础知识;第2章讲述陀螺、加速度计等各种惯性敏感元件的原理;第3章讲述惯性稳定器、稳定平台和惯性定向装置。第4章~第5章系统介绍平台式和捷联式惯性导航系统。其中第4章讲述平台式惯导系统的机械编排、误差方程、初始对准等平台式惯性导航系统基本原理和应用设计;第5章讲述捷联式惯导系统工作原理和应用设计,包括姿态矩阵、误差及其传播特性、动基座自对准和传递对准。第6章讲述惯性技术的各种实际应用。

本书从基本物理概念出发,以实用、易懂为宗旨来组织本书各章节的内容,在基本物理概念引导下,由浅入深地阐述复杂的数学、物理和系统方程,并给出完整的结果和结论,为便于教学和自学,每章后附有思考题,有利于读者系统掌握惯性技术,将理论知识应用于实践,为进一步的深入研究和应用打下基础。

本书可作为高等院校自动化及导航类专业和学科的本科生、研究生教材,也可作为有关专业的研究工作者和工程技术人员的参考书。

本书的第1章、第2章、第3章由苏中教授编写,第4章、第5章由李擎教授编写,第6章由李旷振和杨宝利编写。本书的编写与出版得到北京信息科技大学“自动化国家级特色专业优秀教学团队建设项目”资助,国防工业出版社为本书的出版做了大量具体细致的编辑工作,在此表示衷心的感谢。

由于作者水平所限,本书不足和疏漏之处在所难免,敬请专家、同仁和广大读者批评指正。

作者

2011年1月

目 录

第1章 惯性技术基础知识	1
1.1 地球参考椭球及地球重力场特性	1
1.1.1 地球的形状	1
1.1.2 垂线、纬度、高程的定义	3
1.1.3 地球重力场特性	4
1.2 载体的空间位置和姿态的描述	5
1.2.1 常用坐标系	5
1.2.2 刚体的空间角位置描述	8
1.2.3 坐标系之间的变换、载体位置、姿态和方位的确定	12
1.3 动量矩、动量矩定理及欧拉动力学方程	14
1.3.1 动量矩及动量矩定理	14
1.3.2 刚体定点转动的欧拉动力学方程	16
1.4 哥氏加速度、绝对加速度和比力	17
1.4.1 哥氏加速度	17
1.4.2 绝对加速度	19
1.4.3 比力和有害加速度	21
1.5 舒勒原理	25
1.5.1 数学摆跟踪垂线的舒勒原理	25
1.5.2 物理摆跟踪垂线的舒勒原理	26
思考与练习	28
第2章 惯性敏感元件	29
2.1 陀螺仪	29
2.1.1 陀螺效应	30
2.1.2 陀螺仪的分类与发展趋势	36
2.2 力学陀螺仪的数学模型	40
2.2.1 二自由度陀螺仪的数学模型	40
2.2.2 单自由度陀螺仪的数学模型	47
2.2.3 振动陀螺仪的数学模型	51
2.3 光学陀螺仪	54
2.3.1 激光陀螺仪	54
2.3.2 光纤陀螺仪	58

2.4 陀螺仪的技术指标及漂移分析	60
2.4.1 陀螺仪的技术指标	60
2.4.2 陀螺仪的漂移分析及其模型分类	60
2.5 加速度计	63
2.5.1 摆式加速度计的构成和工作原理	63
2.5.2 摆式陀螺积分加速度计	65
2.5.3 加速度计的主要参数及静态误差数学模型	66
2.5.4 加速度计的原理性误差	66
思考与练习	68
第3章 陀螺稳定平台与定向装置	69
3.1 一维稳定器	69
3.1.1 单轴动力陀螺稳定器基本原理	70
3.1.2 二自由度液浮陀螺组成的稳定器	75
3.1.3 单自由度液浮陀螺组成的稳定器	76
3.2 三维稳定平台	79
3.2.1 三轴稳定平台	79
3.2.2 四平衡环系统	81
3.3 惯性定向装置	83
3.3.1 陀螺地平仪(陀螺垂直仪)	83
3.3.2 陀螺寻北仪	84
思考与练习	91
第4章 平台式惯性导航系统	92
4.1 平台惯导系统基本原理与分类	92
4.1.1 平台惯导系统原理结构	92
4.1.2 平台惯导系统分类与机械编排概念	94
4.2 当地水平面惯导系统的机械编排	96
4.2.1 半解析式指北方位系统的机械编排方程	96
4.2.2 解决极区航行的方案与自由方位惯导系统	100
4.2.3 高度通道的不稳定和阻尼回路	102
4.2.4 水平控制回路及其舒勒调谐	103
4.3 指北方位系统的误差方程	107
4.3.1 地理位置和速度误差量的定义	107
4.3.2 半解析式指北方位惯导系统误差方程	109
4.3.3 误差传播特性	115
4.4 指北方位系统的初始对准	121
4.4.1 静基座半解析式指北方位系统的粗对准	122
4.4.2 静基座半解析式指北方位系统的精对准	123

4.5 游移方位惯性导航系统	128
4.5.1 游移方位系统的机械编排方程	129
4.5.2 游移方位系统的初始对准	134
思考与练习	141
第5章 捷联式惯性导航系统	142
5.1 捷联惯导系统工作原理	142
5.1.1 组成和算法概述	142
5.1.2 姿态矩阵的更新计算	145
5.1.3 三通道捷联惯导系统的计算	148
5.2 捷联惯导系统的误差	151
5.2.1 速度误差和位置误差方程	151
5.2.2 姿态误差方程	153
5.2.3 捷联惯导系统的误差传播特性	156
5.3 捷联惯导系统在动基座上的自对准	157
5.3.1 粗对准	157
5.3.2 卡尔曼滤波法精对准	160
5.4 捷联惯导系统的动基座传递对准	162
5.4.1 主、子惯导误差	162
5.4.2 传递对准中的匹配量	163
思考与练习	168
第6章 惯性技术的应用	169
6.1 大地测量	169
6.2 铁路检轨	172
6.3 陀螺测斜仪、陀螺经纬仪	173
6.4 陀螺秤	175
6.5 车辆稳定系统	177
6.6 摄像陀螺仪	178
6.7 铜斑蛇制导炮弹	179
6.8 船舶惯性导航系统(SINS)	180
6.9 自动驾驶仪	182
6.10 导弹滚转被动控制(陀螺舵)	186
6.11 安全与解除保险机构	187
6.12 飞机弹射座椅	188
附录 常用符号术语表及惯性技术参数常用单位	189
参考文献	192

第 1 章 惯性技术基础知识

惯性技术包括惯性敏感技术、惯性导航技术、惯性制导技术、惯性仪表和装置技术。

惯性技术中的惯性敏感元件是各种各样的陀螺仪与加速度计的总称,也称为惯性敏感器,是惯性仪表和装置的核心元件。而惯性组合是指具有陀螺仪与加速度计功能的组合装置。惯性敏感器和惯性组合是运动载体导航定位、测姿、定向和控制的重要部件。

导航是一个技术门类的总称,它是引导飞机、船舶、车辆以及机器人等运动物体(总称作运载体、载体)安全、准确地沿着选定的路线到达目的地的一种手段。惯性导航是指采用惯性仪表或装置测量载体在惯性空间的加速度和角速度,自动进行运算,获得载体瞬时速度、瞬时姿态和瞬时位置数据的技术。

惯性技术广泛地运用于航天、航空、航海等军事领域;随着惯性技术和计算机技术的不断发展以及成本的降低,近年来,许多国家将其应用领域扩大到民用领域,例如广泛应用于智能机器人、汽车,以及地震、河流、油田、重力测量以及某些精密检测设备中,有着广阔的应用前景。因此,对惯性技术的研究一直是各国研究的热点。

本章在假设载体为刚体的前提下,讲述与载体空间位置和运动相关的地球的特性、惯性技术的动力学和运动学基础。

1.1 地球参考椭球及地球重力场特性

1.1.1 地球的形状

在地球重力场中的运动物体都和地球发生联系。

如图 1.1(a)所示,地球表面形状不规则。在描述其形状的时候,采用海平面作为基准,把“平静”的海平面延伸到全部陆地所形成的表面称作“大地水准面”,它所包围的几何体称作“大地体”或“地球体”。大地体的表面是地球重力场的一个等位面。由于地球内部质量分布不均匀,致使大地水准面成为一个有微小起伏的复杂曲面。

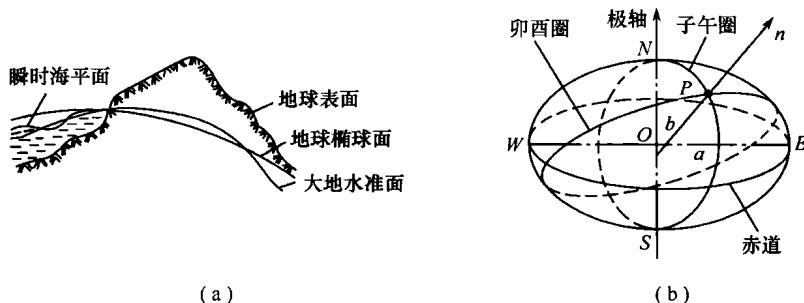


图 1.1 大地水准面与地球椭球体

把地球看作是具有半径为 R_e 的球体,这是一般工程技术中所采用的最简单的近似表示方法。国际上采用的地球半径 $R_e = 6367.65\text{km}$ 。进一步精确近似地球为一个旋转椭球体,称为参考椭球,长半轴 a 在赤道平面内,短半轴 b 和自转轴重合,如图 1.1(b)所示。

目前,不同国家和地区所采用的旋转椭球的参数是不同的,它们根据各自不同的地理条件选择旋转椭球体的不同参数,几种主要参考椭球的基本数据如表 1-1 所列。

表 1-1 几种地球参考椭球参数

名称(年份)	长半轴 a/m	扁率 e	使用国家或地区
克拉索夫斯基(1940)	6378245	1/298.3	苏联
克拉克(1866)	6378096	1/294.98	北美
海福特(1909)	6378388	1/297.00	欧洲、北美及中近东
WGS-84(1984)	6378137	1/298.257	全球 ^①

①WGS-84 系美国国防部地图局于 1984 年制定的全球大地坐标系,考虑了大地测量、多普勒雷达、卫星等的测量数据

表 1-1 中 e 为地球扁率(椭圆度),计算公式为

$$e = \frac{a - b}{a} \tag{1-1}$$

由于地球是一个旋转椭球体,所以在地球表面不同地点其曲率半径也不相同。参看图 1.1(b), P 点子午圈曲率半径,是指过极轴和 P 点的平面与椭球表面的交线上 P 点的曲率半径; P 点卯酉圈,是指过 P 点和子午面垂直的法线平面与椭球表面的交线,而 P 点卯酉圈曲率半径,是指该交线上 P 点的曲率半径。即使在同一点 P ,子午圈曲率半径 R_m 与卯酉圈曲率半径 R_n 也不相同。在此推导从略,给出它们的表达式。

子午圈为

$$R_m = \frac{a(1 - e_1^2)}{(1 - e_1^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \approx R_e (1 - 2e + 3e \sin^2 \phi) \tag{1-2a}$$

或表示为

$$\frac{1}{R_m} \approx \frac{1}{R_e} (1 + 2e - 3e \sin^2 \phi) \tag{1-2b}$$

卯酉圈为

$$R_n = \frac{a}{(1 - e_1^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \approx R_e (1 + e \sin^2 \phi) \tag{1-3a}$$

或表示为

$$\frac{1}{R_n} \approx \frac{1}{R_e} (1 - e \sin^2 \phi) \tag{1-3b}$$

式中: e_1 为椭球的第一偏心率; ϕ 为地理纬度,即

$$e_1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

比较式(1-2a)和式(1-3a)可以看出, $R_n > R_m$ 。

由于地球是一个旋转椭球体,所以,地球表面不同的点至地心的直线距离也不相同。地球表面任意一点至地心的直线距离为

$$R = a[1 - e\sin^2\phi - \frac{3}{8}e^2\sin^2\phi - \dots] \approx a[1 - e\sin^2\phi] \quad (1-4)$$

1.1.2 垂线、纬度、高程的定义

经度、纬度和高程(λ, ϕ, H)是近地航行载体的位置参数。在导航计算中,纬度是十分重要的参数。地球表面某点的纬度,指的是该点的垂线方向和赤道平面之间的夹角。因为地球本身是一个椭球体,形状、质量分布又极不规则,所以纬度的定义显得比较复杂。地球表面某点常用的垂线和纬度定义分别有如下几种(见图1.2)。

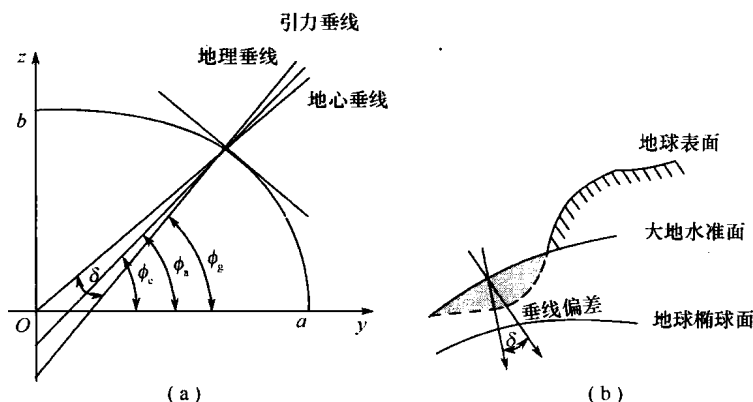


图 1.2 垂线、纬度、垂线偏差

1. 垂线的定义

地心垂线(几何垂线)——从地心通过所在点的径向矢量;

地理垂线(椭球法线)——沿大地水准面法线方向的直线;

天文垂线(重力垂线,铅垂线)——沿重力 g 方向的直线;

引力垂线(质量引力垂线)——任一等势面的法线方向。

通常人们比较关心的是地理垂线和天文垂线,它们之间的偏差一般不超过半个角分,因此在导航时可以忽略,并把地理垂线和天文垂线看成是重合的。

2. 纬度的定义

地球纬度的定义有如下4种(分别对应于以上的4种垂线):

地心纬度——地心垂线与赤道平面之间的夹角 ϕ_c 称为地心纬度。

地理纬度——地理垂线与赤道平面之间的夹角 ϕ_g 称为地理纬度。

天文纬度——天文垂线(重力方向)和赤道平面之间的夹角 ϕ_a 称为天文纬度。

引力纬度——引力垂线和赤道平面之间的夹角称为引力纬度。

因为地理垂线和天文垂线之间的偏差很小,所以地理纬度 ϕ_g 和天文纬度 ϕ_a 通常可以看成是近似的。往往把这两种纬度统称为地理纬度。通常说的纬度 ϕ 是指地理纬度。

地心纬度 ϕ_c 和地理纬度 ϕ_g 之间存在一个角度差,称为地球表面的垂线偏差,即

$$\delta \approx e\sin 2\phi_g$$

通常,导航中使用地理纬度,而在理论计算中又常以地心纬度来计算。在使用中,需要对二者进行必要的换算。

3. 高程的定义

假设空中载体在 P 点(见图 1.3),该点对应于参考椭球体的法线与参考椭球体交于 M 点,设 PM 交大地水准线于 P' 点,交地球真实地形线于 P'' 点,那么称 PM 为飞行高度 H (简称高程), PP' 称为海拔高度 h (或绝对高度), PP'' 为相对高度, $P'P''$ 为当地的海拔高度, MP' 为大地起伏。严格地来讲,无论哪种高度,指的都是当地大地水准面法线方向的长度。而为了描述方便,通常用参考椭球面上的法线来代替大地水准面法线进行测量计算。

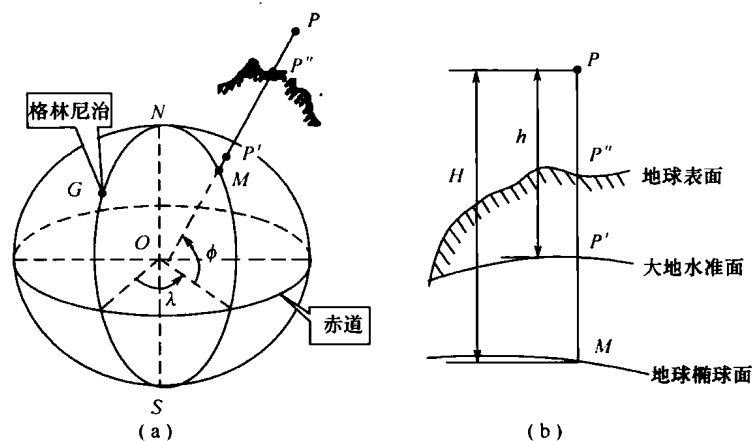


图 1.3 高程 H 的定义

1.1.3 地球重力场特性

由于地球的吸引而使物体受到的力,叫重力。地球表面 A 点单位质量在重力场的作用下所获得的加速度为重力加速度,通常用符号“ g ”来表示。重力 g (确切讲是重力加速度)是引力 G (确切讲是引力加速度)和负方向的地球转动向心加速度(即单位质量的离心惯性力) F 的合成,如图 1.4 所示,即

$$g = G + F$$

式中: g 为重力矢量; G 为地心引力矢量; F 为地球自转离心力矢量, $F = -\Omega \times (\Omega \times R)$, 其中 Ω 为地球转动(包括自转和公转)角速度,国际天文学协会(IAU)提供的数值为 $7292115 \times 10^{-11} \text{ rad/s}$, 约为 $15.04108(^{\circ})/h$ 。

由于离心惯性力 F 比重力 g 小得多, $\Delta\theta$ 角只有几角分,例如当 $\phi = 45^{\circ}$ 时, $\Delta\theta$ 约为 $9'$ 。

当考虑地球为椭球体时,巴罗氏通过复杂的推导得出任一纬度下重力加速度的表达式为

$$g_{\phi} = g_0(1 + 0.0052884\sin^2\phi - 0.000059\sin^22\phi)$$

式中: $g_0 = 978.049 \text{ cm/s}^2$ 。

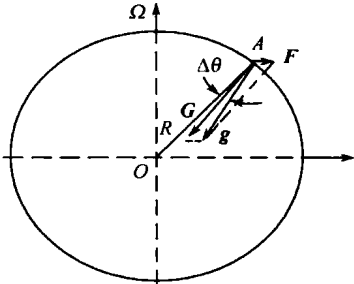


图 1.4 重力矢量图

在地球上随着纬度和高度的变化,重力加速度 g 的大小和方向也要变化,其大小通用表达式(重力数值式)为

$$g = g_0(1 + 0.0052884\sin^2\phi - 0.0000059\sin^2 2\phi) - (0.00000030855 + 0.000000022\cos 2\phi)h + 0.000000072(h/10^3)^2 \quad (1-5a)$$

式中: $g_0 = 9.78049 \text{ m/s}^2$; h 的单位为 m 。

通常重力数值式还可取为

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+H)^2} \approx g_0 \left(1 - 2 \frac{H}{R}\right) \quad (1-5b)$$

g 的大小和方向还取决于 A 点附近物质密度的分布状况,而且也可能随时间受地质变化的影响。实际测量数据表明,在 100 年期间重力 g 的方向变化,小于 $10''$ 。

由于地球质量分布不规则造成的 g 的实测值和计算值之差称为重力异常(Gravity Anomaly)。它是研究地球形状、地球内部结构和重力勘探,以及修正空间载体的轨道的重要数据。

1.2 载体的空间位置和姿态的描述

惯性定律成立的空间为惯性空间。

一个在地球附近运动的物体,一方面物体对于地球有相对运动,同时地球对于惯性空间也有运动,所以至少需要 3 套坐标系,即惯性坐标系、固定在地球上的坐标系及固定在物体上的坐标系,才能完整地描述物体对于地球和惯性空间的运动。

根据运载体运动情况和不同的导航需求,导航中常用的坐标系主要有惯性参考坐标系、地球坐标系、地理坐标系、地平坐标系、载体坐标系、平台坐标系和计算坐标系等。此外,坐标系之间的角度关系可以描述载体(刚体)在空间的角位置,即姿态。

本节介绍惯性技术常用的这些坐标系及其之间的变换、载体的位置参数和姿态参数的描述。

1.2.1 常用坐标系

1. 地心惯性坐标系(Geocentric Inertial Coordinate System, i 系) $Ox_i y_i z_i$

惯性敏感器件——陀螺和加速度计,都是以牛顿定律为基础工作的,它们的运动都以惯性空间为参照物。因此,需要用一个坐标系来代表这个惯性空间,这个坐标系就是惯性坐标系。惯性空间,就是绝对不动的空间,但绝对不动的空间实际上是不存在的。太阳也不是静止的,它和太阳系一起还绕银河系运动,由于这种运动很慢,对惯导系统的研究不会产生影响,因此在研究惯性敏感器件和惯性系统的力学问题时,通常将相对恒星所确定的参考系称为惯性空间,空间中静止或匀速直线运动的参考坐标系为惯性参考坐标系。当载体在宇宙运动时,常把日心坐标系作为惯性系,称为日心惯性系。当载体在地球附近运动时,多采用地心惯性坐标系作为惯性参考坐标系。如图 1.5 所示,地心惯性坐标系的原点取在地球中心, Oz_i 轴沿地球自转轴,而 Ox_i 和 Oy_i 轴在地球赤道平面内和 Oz_i 轴组成右手笛卡儿坐标系。地心惯性坐标系不参与地球的自转运动。

2. 确定载体相对地球表面位置的坐标系

1) 地球坐标系 (Earth Coordinate System, e 系) $Ox_e y_e z_e$

如图 1.6 所示,坐标原点在地心,与地球固联,随地球一起转动。 Oz_e 轴沿地球自转轴且指向北极, Ox_e 轴与 Oy_e 轴在地球赤道平面内, Ox_e 轴在参考子午面内指向零子午线(格林尼治子午线), Oy_e 轴指向东经 90° 方向。地球坐标系也称为地心地球固联坐标系。

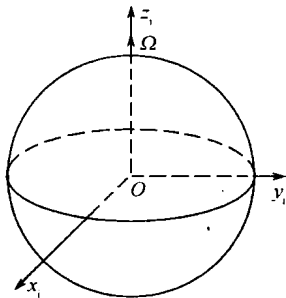


图 1.5 地心惯性坐标系

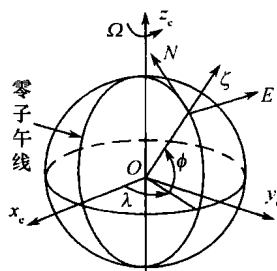


图 1.6 地球坐标系

载体在该坐标系内的定位多采用经度 λ 、纬度 ϕ 和距地面高程 H 来标定。

经度 λ 是载体所在的 P 点与地心的连线和极轴构成的平面与格林尼治子午面的夹角。经度由格林尼治子午面向东和向西各 180° , 称东经和西经。

纬度 ϕ 是 P 点地垂线与地球赤道平面的夹角。 ϕ 从赤道面向北 $0^\circ \sim 90^\circ$, 称北纬, 记为正。由赤道向南 $0^\circ \sim 90^\circ$, 称南纬, 记为负。

经纬高 (λ, ϕ, H) 是导航定位中经常用也是最重要的坐标。

常常需要将经纬高坐标 (λ, ϕ, H) 转换成空间笛卡儿坐标 (x_e, y_e, z_e) , 转换关系为

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_n + H) \cos \phi \cos \lambda \\ (R_n + H) \cos \phi \sin \lambda \\ (R_n (1 - e^2) + H) \sin \phi \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

式中: e 为地球扁率, R_n 为卯西面内曲率半径。

2) 地理坐标系 (Geographic Coordinate System, g 系) $OEN\zeta$

地理坐标系也叫当地水平坐标系, 如图 1.7 所示, 坐标系的原点取在载体 M 和地球中心连线与地球表面交点 O (或取载体 M 在地球表面上的投影点), OE 在当地水平面内指东, ON 在当地水平面内指北, $O\zeta$ 沿当地地垂线方向并且指向天顶, 与 OE 、 ON 组成右手坐标系, 即通常所说的 3 个坐标轴按“东、北、天”为顺序构成右手笛卡儿坐标系。除此之外, 还常有按“北、东、地”或“北、西、天”为顺序构成右手笛卡儿坐标系。

当载体在地球上航行时, 载体相对地球的位置不断发生改变, 而地球不同地点的地理坐标系, 其相对地球坐标系的角位置是不相同的。也就是说, 载体相对地球运动将引起地理坐标系相对地球坐标系转动。这时地理坐标系相对惯性参考系的转动角速度应包括两个部分: 一是地理坐标系相对地球坐标系的转动角速度; 另一是地球坐标系相对惯性参考系的转动角速度。

地理坐标系 $OEN\zeta$ 随着地球的转动和载体的运动而运动, 它是水平和方位的基准。

3) 地平坐标系 (Terrestrial Coordinate System, t 系) $Ox_t y_t z_t$

地平坐标系 $Ox_t y_t z_t$ 的原点与载体所在的点重合, 一轴沿当地垂线方向, 另外两轴在当地水平面内。图 1.8 所示为 Ox_t 和 Oy_t 轴在当地水平面内, 并且 Oy_t 轴沿载体的航行方向; Oz_t 轴沿当地垂线向上; 三轴构成右手笛卡儿坐标系。因这里水平轴的取向与载体的航迹有关, 故又称航迹坐标系。

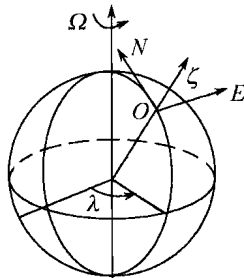


图 1.7 地理坐标系

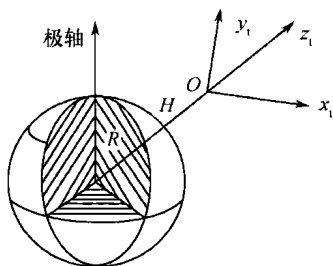


图 1.8 地平坐标系

当载体在地球上航行时, 将引起地平坐标系相对地球坐标系转动, 这时地平坐标系相对惯性参考系的转动角速度应包括两个部分: 一是地平坐标系相对地球坐标系的转动角速度; 另一是地球坐标系相对惯性参考系的转动角速度。

4) 游移方位坐标系 (Wanderazimuth Coordinate System, w 系) $Ox_w y_w z_w$

游移方位坐标系是在地理坐标系基础上定义的。游移方位坐标系原点在载体中心 (质心); Ox_w 轴垂直于 Oy_w 轴和 Oz_w 轴, 并构成右手笛卡儿坐标系; Oy_w 轴在当地水平面内 (严格地讲, 应该是椭球面的切平面) 与子午圈北构成 α 角 (称为游移角, 逆时针为正); Oz_w 轴是沿椭球面外法线方向指向天顶。 α 满足

$$\dot{\alpha} = -\dot{\lambda} \sin \phi$$

式中: λ 、 ϕ 分别是载体中心的经、纬度。

3. 载体坐标系

1) 载体坐标系 (Body Coordinate System, b 系) $Ox_b y_b z_b$

载体坐标系是用来表示载体对称轴的坐标系。载体坐标系的定义并不唯一, 通常取载体的重心 O 作为载体坐标系 $Ox_b y_b z_b$ 的原点, 三个轴分别与载体的纵轴、横轴和竖轴相重合, 组成右手笛卡儿坐标系。飞机和舰艇等巡航式载体、弹道导弹等弹道式载体的载体坐标系, 以及陆地载体载体坐标系的选取习惯分别如图 1.9(a) ~ 图 1.9(c) 所示。

2) 陀螺坐标系 (Gyro Set Coordinate System) $Oxyz$

陀螺坐标系是用来表示陀螺本身输出的坐标系。其原点取在陀螺的支点上, Oz 轴沿转子轴但不随转子转动, Oy 轴沿陀螺内环轴并固联于内环, 随内环转动, Ox 轴垂直于 Oy 、 Oz 轴, 符合右手定则。也可取 Oy 轴沿陀螺外环轴, Ox 、 Oy 、 Oz 轴符合右手定则。

在实际使用中, 陀螺坐标系一般与载体坐标系重合。

3) 平台坐标系 (Platform Coordinate System, p 系) $Ox_p y_p z_p$

平台坐标系 $Ox_p y_p z_p$, 原点取在载体的重心, Ox_p 、 Oy_p 两轴总在水平面内, 且互相垂直, Oz_p 垂直水平面。平台坐标系可以与地理坐标系重合, 也可以在水平面内与地理坐标

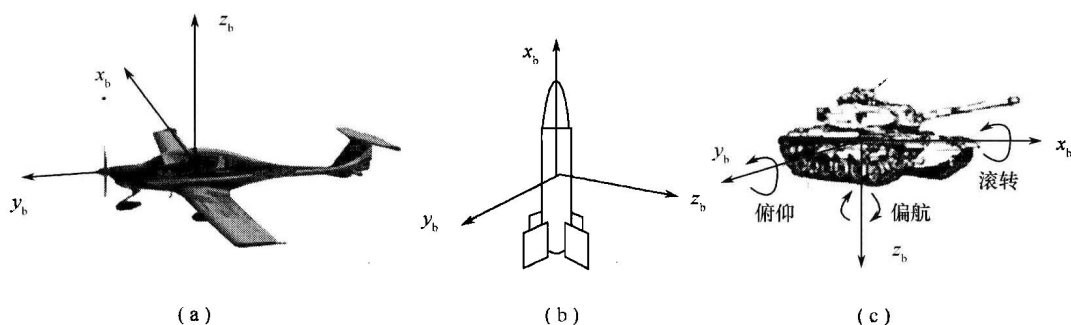


图 1.9 载体坐标系

系成一定夹角。惯导系统的分类就是根据实际平台所模拟的坐标系而划分的,如平台系和地理坐标系完全重合,称指方位惯导系统;平台方位与地理坐标系相差一个游移角 α ,称游移自由方位惯导系统;平台方位指向惯性空间,称自由方位惯导系统等。

4) 计算坐标系 (Computed Coordinate System)

计算坐标系,泛指惯导系统力学编排计算所在的坐标系,它可以是上述前几种坐标系的任意一种。

1.2.2 刚体的空间角位置描述

刚体在空间的角位置用与运动固联的坐标系相对于所选用的参考坐标系的角度关系来描述,通常采用方向余弦法和欧拉角法。

两个重合的坐标系,当一个坐标系相对另一个坐标系做一次或多次旋转后可得另外一个新的坐标系,前者往往被称为参考坐标系或固定坐标系,后者被称为动坐标系,它们之间的相互关系可用方向余弦表来表示。在某些应用场合,尤其是在研究两坐标系之间的运动特性时,方向余弦用矩阵的形式表示,也被称为旋转矩阵,或在某些应用场合称为姿态矩阵。

1. 方向余弦的物理意义

二维动坐标系 $OX'Y'$ 相对固定坐标系 OXY 有一个 α 转角,如图 1.10 所示。设有一个矢量 V 在 OXY 坐标系中有分量 x 和 y ,在 $OX'Y'$ 坐标系中有分量 x' 和 y' ,则

$$\begin{aligned} V &= xi + yj \\ &= x'i' + y'j' \end{aligned}$$

即

$$xi + yj = x'i' + y'j' \quad (1-7)$$

同时乘以 i' 或 j' , 有

$$\begin{aligned} x' &= i' \cdot V = i' \cdot ix + i' \cdot jy \\ y' &= j' \cdot V = j' \cdot ix + j' \cdot jy \end{aligned} \quad (1-8)$$

用矩阵形式来表示,得

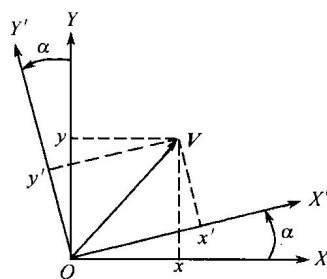


图 1.10 坐标系之间的关系

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i' \cdot i & i' \cdot j \\ j' \cdot i & j' \cdot j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

矩阵 C 称为“方向余弦矩阵”，其元素是两组坐标系单位矢量之间夹角余弦值。按矢量乘法定义有

$$\begin{aligned} i' \cdot i &= \cos\alpha \\ i' \cdot j &= \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \\ j' \cdot i &= \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha \\ j' \cdot j &= \cos\alpha \end{aligned}$$

所以

$$C = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

当 α 很小时,可取如下近似等式,即

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

2. 用欧拉角描述定点转动刚体的角位置

按上述同样的方法,可以写出两个正交笛卡儿三维坐标系之间的方向余弦矩阵。两个正交笛卡儿三维坐标系之间的方向余弦矩阵涉及三个独立的转角,这三个独立的转角可描述定点转动刚体的三维空间角位置。选用三个独立的角来表示具有一个固定点的刚体的相对位置,最早是欧拉(Euler)在1776年提出来的。所以将这三个角称为欧拉角。下面用两个共原点坐标系的相对关系来阐释欧拉角。

图1.11表示了共原点 O 的两个坐标系 $OX_nY_nZ_n$ 和 $OX_bY_bZ_b$ 的相对位置。这一相对位置可以看成是通过以下的转动过程而最后形成的:最初 $OX_bY_bZ_b$ 与 $OX_nY_nZ_n$ 完全重合,而后顺序经过三次简单的转动达到图示的位置,这三次简单的转动如下:

第一次绕 Z_n 轴转一个 ψ 角,使 $OX_bY_bZ_b$ 由最初与 $OX_nY_nZ_n$ 重合的位置转到 $OX_1Y_1Z_1$ 的位置,如图1.12所示。这样 $OX_nY_nZ_n$ 与 $OX_1Y_1Z_1$ 之间的方向余弦矩阵可写成

$$C_n^1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

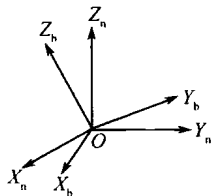


图 1.11 坐标轴相对位置

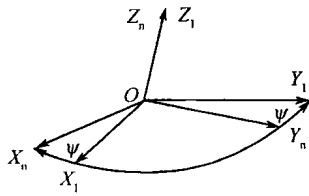


图 1.12 第一次转动后位置

第二次绕 X_1 轴转 θ 角,使 $OX_1Y_1Z_1$ 到达新的 $OX_2Y_2Z_2$ 位置,如图1.13所示。这样 $OX_1Y_1Z_1$ 与 $OX_2Y_2Z_2$ 之间的方向余弦矩阵可表示成

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

第三次是绕 Z_2 轴转 φ 角,使 $OX_2Y_2Z_2$ 到达 $OX_bY_bZ_b$ 的最终位置,如图 1.14 所示。这样 $OX_2Y_2Z_2$ 与 $OX_bY_bZ_b$ 之间的方向余弦矩阵为

$$C_2^b = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

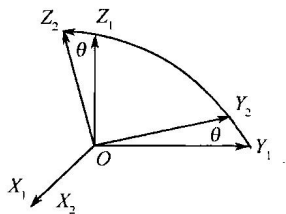


图 1.13 第二次转动后位置

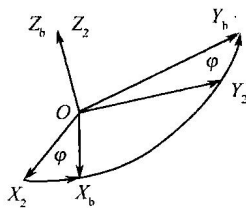


图 1.14 第三次转动后位置

三次转动的角 ψ 、 θ 、 φ 叫做欧拉角。将三个简单转动的图 1.12、图 1.13、图 1.14 合成叠加画在一起,就得到用三个欧拉角表示两个坐标系相对位置的综合图,如图 1.15 所示。其中

$$\begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} = C_n^b \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix}$$

(1-15)

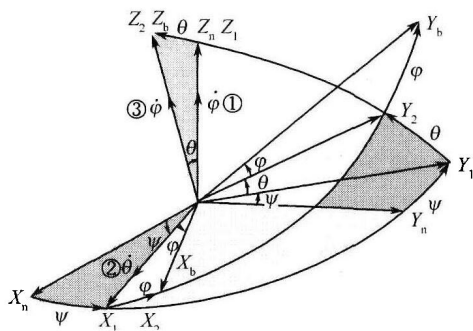


图 1.15 坐标系相对位置综合图

利用坐标变换的基本公式

$$C_n^b = C_2^b C_1^2 C_n^1 \quad (1-16)$$

将式(1-12)~式(1-14)的结果代入式(1-16),得

$$\begin{aligned} C_n^b &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi & \sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1-17) \end{aligned}$$