普通高等教育“十二五”规划教材

21世纪大学数学创新教材

丛书主编 陈 化

线性代数（第二版）

罗从文 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

21世纪大学数学创新教材

丛书主编 **陈 化**

线性代数

（第二版）

罗从文 主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书的主要内容包括线性方程组与矩阵、矩阵运算及其应用、向量空间 $\mathbf{R}^n$、行列式、矩阵特征值问题等. 各章末收集了近几年的考研试题. 与传统的线性代数教材不同的是，本书从学生熟悉的二维和三维空间推广到 $\mathbf{R}^n$ 这个 n 维空间，并将此作为主要内容之一来介绍，以实现从感性思维到理性思维的飞跃. 此外，通过一系列的实例来说明线性代数在各个领域中的应用，有利于培养学生应用代数知识解决实际问题的能力.

本书适合普通高等学校理工类、经管类各专业学生作为教材使用，也可作为教师参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 罗从文主编. —2 版—北京：科学出版社，2011.11
普通高等教育"十二五"规划教材 21 世纪大学数学创新教材
ISBN 978-7-03-032732-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①罗… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 229645 号

责任编辑：吉正霞 / 责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

京山德兴印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2011 年 11 月第 二 版 印张：12 3/4
2011 年 11 月第三次印刷 字数：242 000

定价：22.80 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《21 世纪大学数学创新教材》丛书编委会

《21 世纪大学数学创新教材》丛书序

《21 世纪大学数学创新教材》为大学本科数学系列教材，大致划分为公共数学类、专业数学类两大块，创新是其主要特色和要求. 经组编委员会审定，列选科学出版社普通高等教育“十二五”规划教材.

一、组编机构

《21 世纪大学数学创新教材》丛书由多所 985 和 211 大学联合组编：

丛书主编　陈　化

常务副主编　樊启斌

副　主　编　吴传生　何　穗　刘安平

丛书编委　（按姓氏笔画为序）

王卫华　王展青　刘安平　严国政　李　星

杨瑞琰　肖海军　吴传生　何　穗　汪晓银

陈　化　罗文强　赵东方　黄樟灿　梅全雄

彭　放　彭斯俊　曾祥金　谢民育　樊启斌

二、教材特色

创新是本套教材的主要特色和要求，创造双重品牌：

先进. 把握教改、课改动态和学科发展前沿，学科、课程的先进理念、知识和方法原则上都要写进教材或体现在教材结构及内容中.

知识与方法创新. 重点教材、高层次教材，应体现知识、方法、结构、内容等方面的创新，有所建树，有所创造，有所贡献.

教学实践创新. 教材适用，教师好教，学生好学，是教材的基本标准. 应紧跟和引领教学实践，在教学方法、教材结构、知识组织、详略把握、内容安排上有独到之处.

继承与创新. 创新须与继承相结合，是继承基础上的创新；创新需转变为参编者、授课者的思想和行为，避免文化冲突.

三、指导思想

遵循国家教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于课程教学的基本

要求，力求教材体系完整，结构严谨，层次分明，深入浅出，循序渐进，阐述精炼，富有启发性，让学生打下坚实的理论基础. 除上述一般性要求外，还应具备下列特点：

（1）恰当融入现代数学的新思想、新观点、新结果，使学生有较新的学术视野.

（2）体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学软件的能力，使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到具体教学内容中的现代精品教材.

（3）在内容取舍、材料组织、叙述方式等方面具有较高水准和自身特色.

（4）数学专业教材要求同步给出重要概念的英文词汇，章末列出中文小结，布置若干道（少量）英文习题，并要求学生用英文解答. 章末列出习题和思考题，并列出可进一步深入阅读的文献. 书末给出中英文对照名词索引.

（5）公共数学教材具有概括性和简易性，注重强化学生的实验训练和实际动手能力，加强内容的实用性，注重案例分析，提高学生应用数学知识和数学方法解决实际问题的能力.

四、主编职责

丛书组编委员会和出版社确定全套丛书的编写原则、指导思想和编写规范，在这一框架下，每本教材的主编对本书具有明确的责权利：

1. 拟定指导思想

按照丛书的指导思想和特色要求，拟出编写本书的指导思想和编写说明.

2. 明确创新点

教改、课改动态，学科发展前沿，先进理念、知识和方法，如何引入教材；知识和内容创新闪光点及其编写方法；教学实践创新的具体操作；创新与继承的关系把握及其主客体融合.

3. 把握教材质量

质量是图书的生命，保持和发扬科学出版社“三高”、“三严”的传统特色，创出品牌；适用性是教材的生命力所在，应明确读者对象，篇幅要结合大部分学校对课程学时数的要求.

4. 掌握教材编写环节

（1）把握教材编写人员水平，原则上要求博士、副教授以上，有多年课程教学经历，熟悉课程和学科领域的发展状况，有教材编写经验，有扎实的文字功底.

（2）充分注意著作权问题，不侵犯他人著作权.

（3）讨论、拟定教材提纲，并负责编写组的编写分工、协调与组织.

（4）拟就内容简介、前言、目录、样章，统稿、定稿，确定交稿时间.

（5）负责出版事宜，敦促编写组成员使用本教材，并优先选用本系列教材.

《21 世纪大学数学创新教材》组编委员会

2009 年 6 月

第二版前言

本书自第一版出版以来，广大读者和同仁对于将线性方程组与矩阵、向量空间$\mathbf{R}^n$、矩阵特征值问题作为线性代数的核心内容而纳入编写体系，都表示了赞同，认为这样的编排有利于理解线性代数的抽象知识，降低了学习本课程的难度. 因此在编写第二版时，我们保留了原来的体系，仅对其中几处作了一定的调整. 在第 2 章我们对向量组的线性相关性内容作了补充；在第 4 章删减了余子阵的概念；全书在文字上也作了少许修改，以使论述更加通俗易懂；另外还调整并增加了部分例题和习题.

这次再版工作由罗从文、赵克健、沈忠环、张渊渊、杨雯靖、张小华、刘巧静、张平等同志承担.

我们向关心本书和对本书第一版提出宝贵意见的专家们表示深切的谢意，诚望继续不吝赐教，以期更进一步完善.

编　者

2011 年 10 月

第一版前言

线性代数是学习自然科学、工程技术和社会科学的学生的一门重要的基础课程，其核心内容包括矩阵理论以及向量空间理论. 这些概念和理论为解决各个专业领域提出的相关问题提供了有力的工具.

本书主要有如下特点：

（1）针对学时少的学校，介绍线性代数的核心内容，如线性方程组与矩阵、向量空间 $\mathbf{R}^n$、矩阵特征值问题.

（2）向量空间的概念是一个难点，为了分散难点，本书将作一系列铺垫. 如第 2 章引入线性无关性的概念，然后在第 3 章先回顾二维和三维空间中的向量，再推广到 $\mathbf{R}^n$.

（3）通过一系列的实例来说明线性代数在各个领域中的应用，有利于培养学生应用代数知识解决实际问题的能力.

（4）在书末介绍了在科技工作者中非常流行的数学软件 MATLAB 在线性代数中的应用.

（5）收集并整理了近几年高等数学中涉及线性代数的考研试题.

本书由罗从文主编，赵克健、杨雯靖任副主编. 第 1 章由赵克健编写，第 2 章及附录 A 由陈继华、肖红英编写，第 3 章及附录 B 由张渊渊编写，第 4 章由杨雯靖编写，第 5 章由罗从文编写，线性代数考研试题的收集、分类由赵克健、杨雯靖、张平负责，全书由罗从文、别群益统稿、审稿、定稿.

由于时间仓促，本书难免有疏漏和不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2009 年 9 月

目　　录

第1章　线性方程组与矩阵

解线性方程组是线性代数课程最主要的内容之一，而矩阵则是线性代数的一个非常重要的基本概念和常用工具. 在科学研究、工程技术和经济管理各领域中，许多问题都与求解线性方程组和矩阵及其运算有关.

本章，我们将首先从解析几何角度来了解二元和三元线性方程组的解的较为直观的几何意义. 然后，在消元法解线性方程组的基础上，引入矩阵、矩阵的初等变换以及矩阵秩的概念，从而把用消元法解线性方程组转化为只需对方程组的增广矩阵施以初等行变换来解决. 接着再进一步讨论如何根据行阶梯形矩阵或行最简形矩阵的结构以及矩阵秩的不同情况，判别线性方程组有没有解，有唯一解还是有无穷多解的基本方法. 最后，通过举例介绍矩阵和线性方程组在相关方面的一些实际应用.

1.1　二元和三元线性方程组的几何意义

线性方程组是指只包含未知量一次幂的方程组. 几何中的诸如平面上直线之间的相互位置关系、空间平面之间的相互位置关系等问题，实际上都可以归结为线性方程组的相关问题来解决.

例如，在 xOy 平面上，一条直线可以用一个含有两个未知量的二元线性方程 $ax+by=c$ 来表示. 设有两条直线 l_i：$a_ix+b_iy=c_i$ $(i=1, 2)$，则方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

就是一个二元非齐次线性方程组. 若有一组数 $x=x_0$，$y=y_0$ 使方程组(1.1.1)中的每个方程都成立，则称数组 x_0，y_0 是方程组(1.1.1)的一个解. 方程组有解就称方程组是相容的，否则就称方程组是不相容的. 当常数项 c_1，c_2 全为0时，称方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

为二元齐次线性方程组.

从解析几何角度看，方程组(1.1.1)中两条直线的公共点的坐标一定满足该方程组. 反之，如果平面上点的坐标满足方程组(1.1.1)，那么，该点就一定在这两条直线上，而不在这两条直线上的点的坐标必不满足方程组(1.1.1). 因此，在 xOy

平面坐标系下，二元线性方程组(1.1.1)的解就是它所表示的平面上两条直线的交点（公共点）的坐标，方程组的解的不同情况对应着平面上两条直线间不同的位置关系. 由于平面上两条直线间的位置关系只可能有平行、相交、重合三种情况，因而对应着二元线性方程组(1.1.1)的解只有三种情况：无解、有唯一解、有无穷多解. 故讨论平面上直线间三种不同的位置关系，就相当于研究二元线性方程组的解的三种不同情况，反之亦然.

例 1.1.1 求下列二元线性方程组的解，并讨论它们的解的几何意义.

(1) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ 4x-2y=0 \end{cases}$

解 将方程组(1)中两个方程的等号两边分别相加，得 $2x=4$，即 $x=2$，把 $x=2$ 代入 $x+y=3$ 得 $y=1$，即方程组(1)有唯一解 $x=2$，$y=1$. 从几何角度看，方程组(1)所表示的两条直线相交于 xOy 平面上的一点(2, 1)，如图 1-1(a)所示.

显然，方程组(2)的两个方程是相互矛盾的，若把两个方程的两边分别相减会得出“0=1”的矛盾结果，说明方程组是不相容的，即方程组(2)无解. 从几何角度看，方程组所表示的两条直线相互平行，没有公共交点，如图 1-1(b)所示.

方程组(3)的两个方程中只有一个是独立方程，因为其中的一个方程可由别的方程通过数乘和加法（线性运算）得到. 例如，把第一个方程等号的两边分别乘以 2 就是第二个方程，而第二个方程减去第一个方程后便得到第一个方程，因而满足第一个方程的解必定也满足第二个方程. 通常这样的方程组的解中会含有参数，例如，由第一个方程 $x+y=2$ 得到 $y=2-x$，则将 $x=x$，$y=2-x$ 代入必满足方程组，即 $x=x$，$y=2-x$ 是方程组(3)的解. 该解中的未知量 y 是由未知量 x 来表示的，x 作为参数可任意取值，故称之为自由未知量，相应地把 y 称为非自由未知量. x 取定一个值，y 就相应取得一个定值，所以方程组(3)有无穷多个解. 一般地，把含有自由未知量的解的表达式，称为线性方程组的通解或一般解，它可以表示线性方程组的全部解. 从几何角度看，方程组(3)所表示的两条直线平行且重合，即两条直线已“合二为一”，因而有无穷多个公共点，如图1-1(c)所示.

方程组(4)、(5)都是二元齐次线性方程组，把 $x=0$，$y=0$ 代入任何二元齐次线性方程组都能使之满足，故齐次线性方程组必有零解. 但方程组(4)只有零解，而方程组(5)的解可表示为 $x=x$，$y=2x$，其中 x 是自由未知量，可以任意取值，所以方程组(5)有无穷多个解. 从几何角度看，二元齐次方程组所表示的两条直线均通过坐标原点，但方程组(4)所表示的两条直线只在原点相交，而方

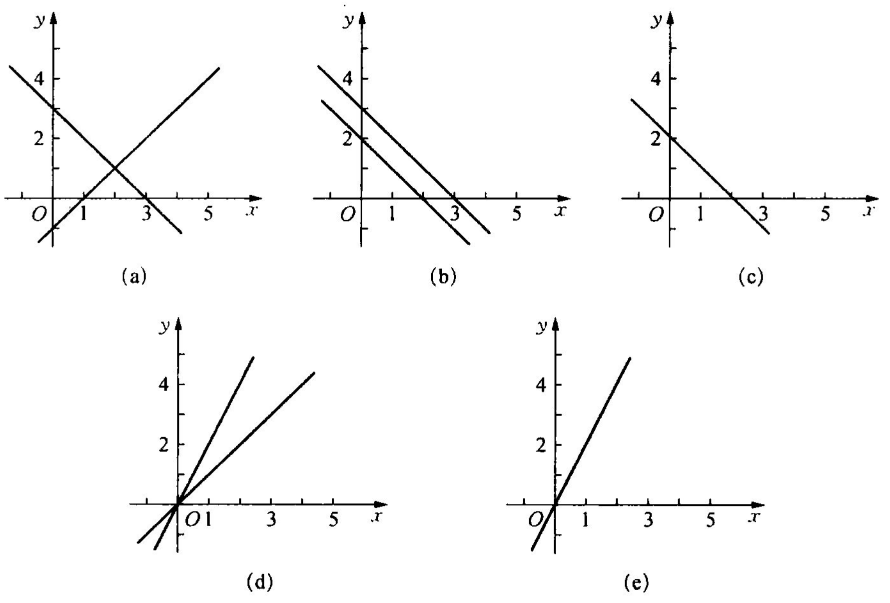


图 1-1

程组(5)所表示的通过原点的两条直线平行且重合,所以两条直线有无穷多个公共点,如图 1-1(d)、(e)所示.

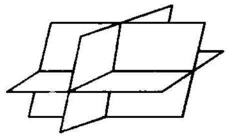
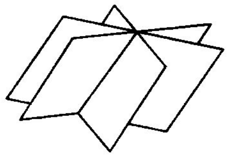
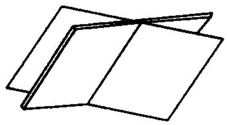
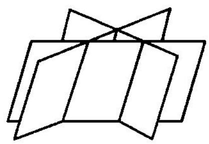
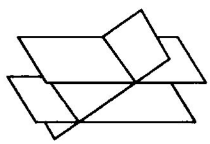
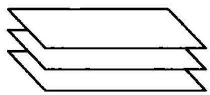
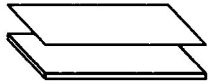
类似地,在空间解析几何中,三元线性方程 $ax+by+cz=d$ 表示空间中的一个平面.设有三个平面 Π_i: $a_ix+b_iy+c_iz=d_i$ $(i=1, 2, 3)$,则这三个平面公共点的坐标一定满足方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}\tag{1.1.3}$$

反之,坐标满足方程组(1.1.3)的空间点一定在这三个平面上,而不在这三个平面上的点(公共点)的坐标必不满足该方程组.因此,方程组(1.1.3)的解就是它所表示的空间三个平面上公共交点的坐标,其解的不同情况对应着空间中这三个平面间不同的位置关系.因此,要讨论空间中这三个平面的位置关系,只需要对这三个平面方程所组成的线性方程组的解的情况作出判别即可.三个平面之间有 8 种可能的位置关系,具体情况如表 1-1 所示.

通常,从实际问题中得到的线性方程组,未知量的个数可能比较多,方程个数与未知量个数也不一定相同,为方便起见,以后我们将统一改用 x_j $(j=1, 2, \cdots)$ 来表示未知量.这样,由 m 个含有 n 个未知量的线性方程所组成的线性方程组可以表示为

表 1－1

方程组解的情况（矩阵秩的情况）	三平面的公共点的构成	三平面间的位置关系	图　示
方程组有唯一解 $R(\boldsymbol{A})=3$ $R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$	三平面有唯一公共点	(1) 三平面相交于一点	
方程组有无穷多解，且通解中含有一个自由未知量 $R(\boldsymbol{A})=2$ $R(\overline{\boldsymbol{A}})=2$	三平面的无穷多个公共点构成一条直线，分两种情况	(2) 三平面相交于同一条直线，且彼此不重合	
		(3) 其中有两个平面重合，且与第三个平面相交	
有无穷多解，且通解中含有两个自由未知量 $R(\boldsymbol{A})=R(\overline{\boldsymbol{A}})=1$	三平面的无穷多个公共点构成一个平面	(4) 三个平面重合	
方程组无解 $R(\boldsymbol{A})=2$ $R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$	三平面无公共点，分两种情况	(5) 三个平面两两相交于三条平行线	
		(6) 两个平面平行（不重合），另一平面与两平行平面分别相交于两条平行直线	
方程组无解 $R(\boldsymbol{A})=1$ $R(\overline{\boldsymbol{A}})=2$	三平面无公共点，分两种情况	(7) 三个平面平行且彼此不重合	
		(8) 三个平面平行，其中有两个平面重合	

注：表中关于矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})$，$R(\overline{\boldsymbol{A}})$ 与相应方程组的解的关系及判别将在 1.4 节中介绍.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1.4}$$

式中，系数 a_{ij} 的第一个下标 i ($i = 1, 2, \cdots, m$) 表示 a_{ij} 是第 i 个方程中的系数，第二个下标 j ($j = 1, 2, \cdots, n$) 表示 a_{ij} 是第 j 个未知量 x_j 的系数；b_i 是第 i 个方程的常数项.

将前面关于二元、三元线性方程组的讨论作推广，对一般线性方程组也有类似的概念和结论. 相应地，我们称方程组(1.1.4)为 n 元非齐次线性方程组. 若该方程组中的 m 个常数项全为 0，则称方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

为 n 元齐次线性方程组. 如果 $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $\cdots$, $x_n = c_n$ 可以使(1.1.4)中的每一个方程都成立，则称这 n 个有序数 c_1, c_2, $\cdots$, c_n 是该方程组的一个解. 如果线性方程组有解，就称方程组是**相容的**；否则，就称方程组是**不相容的**. 线性方程组的解的全体称为方程组的**解集合**(简称**解集**)，两个具有相同的解集合的方程组称为是**同解的**. 表示线性方程组的全部解的表达式称为线性方程组的**通解**.

对于一般的线性方程组，我们最关心的问题是：如何判断一个方程组是否有解？如果方程组有解，那么，它有多少解？有解时怎样求出它的全部解？为回答这些问题，我们将在下节回顾一下在中学代数中学过的求解线性方程组的消元法.

1.2 消元法与阶梯形线性方程组

在中学里已经学过用消元法解二元或三元线性方程组，这是解线性方程组常用的一种方法，该方法也适用于未知量和方程数较多的一般线性方程组. 这一方法的基本思想是，通过方程组中方程之间的几种简单运算，消去某些方程中的一些未知量，有时还可以消去方程组中某些多余的方程，从而得到与原方程组同解的，但形式上更简单、更便于求解的一类方程组——阶梯形线性方程组. 下面通过举例来讨论这一方法.

例 1.2.1 解线性方程组

$$\mathrm{I}_1:\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3=7 & \text{①}\\ 2x_1+x_2-x_3=1 & \text{②}\\ x_1-x_2+x_3=2 & \text{③}\end{cases}$$

解 先设法消去方程组的两个方程中的 x_1. 为此，可以把式①两边乘以 $\frac{1}{3}$（或除以 3）使 x_1 的系数变成 1，然后再作下一步运算，但若这样，则式①的其他系数和常数项会出现分数，将给后面的计算带来麻烦，为方便后面的运算，先交换式①、③的位置，得到与方程组同解的方程组

$$\mathrm{I}_2:\begin{cases}x_1-x_2+x_3=2 & \text{④}\\ 2x_1+x_2-x_3=1 & \text{⑤}\\ 3x_1-x_2+2x_3=7 & \text{⑥}\end{cases}$$

将式④先后乘以 -2，-3，再分别加到式⑤、⑥上，消去这两个方程中的 x_1，得

$$\mathrm{I}_3:\begin{cases}x_1-x_2+x_3=2 & \text{⑦}\\ 3x_2-3x_3=-3 & \text{⑧}\\ 2x_2-x_3=1 & \text{⑨}\end{cases}$$

式⑧乘以 $\frac{1}{3}$，得

$$\mathrm{I}_4:\begin{cases}x_1-x_2+x_3=2 & \text{⑩}\\ x_2-x_3=-1 & \text{⑪}\\ 2x_2-x_3=1 & \text{⑫}\end{cases}$$

继续消去式⑫中的 x_2，为此，将式⑪乘以 -2 加到式⑫上，得

$$\mathrm{I}_5:\begin{cases}x_1-x_2+x_3=2 & \text{⑬}\\ x_2-x_3=-1 & \text{⑭}\\ x_3=3 & \text{⑮}\end{cases}$$

可以看出，通过以上逐次消元的过程，方程组 I_5 中自上而下的各方程所含未知量的个数顺次减少，这是一个与原方程组 I_1 同解的，且形式简洁更容易求解的**阶梯形方程组**. 将式⑮代入式⑭得 $x_2=2$，再将 $x_2=2$，$x_3=3$ 代入式①可得 $x_1=1$. 于是，原方程组的解为

$$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=3$$

这种由阶梯形方程组逐次求得各未知量的过程称为"回代"，线性方程组的这种解法称为**消元法**. 有时根据阶梯形方程组的具体情况还可以简化回代过程，例如，对阶梯形方程组 I_5 直接将式⑭加到式⑬上，再将式⑮加到式⑭上，也能方便地

得到与原方程组同解且形式上最简单的阶梯形方程组

$$\mathrm{I}_6:\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 1 & ⑯ \\ \quad x_2 \qquad = 2 & ⑰ \\ \qquad\quad x_3 = 3 & ⑱ \end{cases}$$

由这类最简单的阶梯形方程组，通常可以直接写出原方程组的解，或经简单的移项整理便可改写成原方程组的通解.

在例 1.2.1 的求解过程中，我们对方程组反复施行了下面三种变换：

(i) 交换ⓘ、ⓙ两个方程的位置，记为 ⓘ $\leftrightarrow$ ⓙ；

(ii) 以非零数 k 同乘以某方程ⓘ的两边，记为 ⓘ $\times k$；

(iii) 把方程ⓙ的 k 倍加到方程ⓘ上，记为ⓘ$+ k$ ⓙ.

我们把线性方程组的这三种变换称为**线性方程组的初等变换**.

关于线性方程组的初等变换我们还须作几点说明：

(1) 这三种变换都是可逆的. 例如，若交换线性方程组 I 的ⓘ、ⓙ两个方程的位置后得到方程组 II，那么，把方程组 II 的 ⓘ、ⓙ 两个方程再作交换就还原为方程组 I，这种可逆性可用记号表示为

若 $(\mathrm{I}) \xrightarrow{ⓘ \leftrightarrow ⓙ} (\mathrm{II})$，则

$$(\mathrm{II}) \xrightarrow{ⓘ \leftrightarrow ⓙ} (\mathrm{I})$$

对另外两种初等变换也相应地有

若 $(\mathrm{I}) \xrightarrow{ⓘ \times k} (\mathrm{II})$，则

$$(\mathrm{II}) \xrightarrow{ⓘ \div k} (\mathrm{I})$$

若 $(\mathrm{I}) \xrightarrow{ⓘ + k\, ⓙ} (\mathrm{II})$，则

$$(\mathrm{II}) \xrightarrow{ⓘ - k\, ⓙ} (\mathrm{I})$$

(2) 经过初等变换后得到的线性方程组与原方程组是同解的. 在例 1.2.1 中，原方程组 I_1 经过若干次的初等变换得到了 I_2，I_3，…，I_5 等一系列方程组，把数组 $x_1 = 1$，$x_2 = 2$，$x_3 = 3$ 代入均能满足其中的每一个方程组，因而这些方程组都是同解方程组. 该结论对一般线性方程组(1.1.4)也成立. 很显然，对换原方程组(1.1.4)中两个方程的位置和用非零常数 k 乘以某一方程，方程组的解不会改变. 把原方程组的第 j 个方程两边乘以数 k 再加到第 i 个方程上去，这时，原来的第 i 个方程

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

变为