Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学标准模拟试卷与精解（数学二）

清华大学 王 欢
北京大学 王德军 主编
首都师范大学 童 武

赠送MP3盘
考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan

燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学标准模拟试卷与精解（数学二）

清华大学 王欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童武
主编

赠送MP3盘 考研名师童武教授
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学标准模拟试卷与精解. 数学二 / 王欢，王德军，童武主编．—北京：中国石化出版社，2012.2
(2013年考研专家指导丛书)
ISBN 978-7-5114-1341-3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… ②王… ③童… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第279383号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街58号
邮编：100011 电话：(010)84271850
读者服务部电话：(010)84289974
http://www sinopec-press. com
E-mail:press@sinopec. com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 9.25印张 225千字
2012年3月第1版 2012年3月第1次印刷
定价：20.00元(赠送MP3盘)

前　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制订的最新考试大纲，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲,反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上,力求反映最新考试要求,紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,为考生全程领航和理性分析,引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔,编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作,积累了丰富的教学辅导经验,对历年考试情况比较了解,对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序,力求达到完美,但限于时间和水平,仍可能存在不足,纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　录

模拟试卷(一)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ (　　).

(A) 不可导　(B) 可导但 $f'(x)\neq 0$　(C) 取得极大值　(D) 取得极小值

2. 曲线 $y=\mathrm{e}^{1/x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有(　　).

(A) 1 条　(B) 2 条　(C) 3 条　(D) 4 条

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则(　　).

(A) 当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$

(B) 对任何 $\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$

(C) 当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$

(D) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3 & x\leqslant 1\\ x^2 & x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的(　　).

(A) 左、右导数都存在　(B) 左导数存在，但右导数不存在

(C) 左导数不存在，但右导数存在　(D) 左、右导数都不存在

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x$ 等于(　　).

(A) $f(x)$　(B) $f(x)\mathrm{d}x$　(C) $f(x)+C$　(D) $f'(x)\mathrm{d}x$

6. 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有(　　).

(A) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$　(B) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$　(C) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$　(D) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$

7. 设 n 阶方程 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots\boldsymbol{\gamma}_n)$，记向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，(Ⅲ)：$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$，如果向量组(Ⅲ)线性相关，则(　　).

(A) 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)都线性相关

(B) 向量组(Ⅰ)线性相关

(C) 向量组(Ⅱ)线性相关

(D) 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)中至少有一个线性相关

8. 设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，且$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|=0$，则$\boldsymbol{A}$(　　).

(A) 必有一列元素全为0

(B) 必有两列元素对应成比例

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合

(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合

二、填空题：9~14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 设函数$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则函数$f[f(x)]=$________.

10. 方程$yy''=1+y'^2$满足初始条件$y(0)=1$，$y'(0)=0$的通解为________.

11. 已知曲线$y=f(x)$过点$\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$，且其上任一点$(x,\ y)$处的切线斜率为$x\ln(1+x^2)$，则$f(x)=$________.

12. 设函数$y=y(x)$由方程$e^{x+y}+\cos(xy)=0$确定，则$\dfrac{dy}{dx}=$________.

13. 下列两个积分的大小关系是：$\int_{-2}^{-1}e^{-x^3}dx$ ________ $\int_{-2}^{-1}e^{x^3}dx$.

14. 在函数$f(x)=\begin{vmatrix}2x & 1 & -1\\ -x & -x & x\\ 1 & 2 & x\end{vmatrix}$中，$x^3$的系数是________.

三、解答题：15~23小题，共94分. 请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分10分）

求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{(1-\cos\sqrt{x})}$.

16.（本题满分10分）

计算$\int\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}dx$.

17.（本题满分11分）

如图，设曲线L的方程为$y=f(x)$，且$y''>0$. 又MT、MP分别为该曲线在点$M(x_0,\ y_0)$处的切线和法线. 已知线段MP的长度为$\dfrac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$（其中$y_0'=y_0'(x_0)$，$y_0''=y_0''(x_0)$），试推导出点$P(\xi,\ \eta)$的坐标表达式.

18.（本题满分10分）

已知函数$f(u)$具有二阶导数，且$f'(0)=1$，函数$y=y(x)$由方程$y-xe^{y-1}=1$所确定. 设$z=f(\ln y-\sin x)$，求$\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$.

19.（本题满分10分）

计算二重积分$\iint\limits_D|x^2+y^2-1|d\sigma$，其中$D=\{(x,\ y)|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

20. (本题满分 11 分)

已知函数$f(x)$在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

(Ⅰ) 存在$\xi\in(0, 1)$，使得$f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ) 存在两个不同的点η，$\zeta\in(0, 1)$，使得$f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

21. (本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在$[0, 1]$上连续，$(0, 1)$内可导，且$3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$，证明在$(0, 1)$内存在一点，使$f'(C)=0$.

22. (本题满分 11 分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，向量组$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，问：

(Ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}_1$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出？证明你的结论.

(Ⅱ) $\boldsymbol{\alpha}_4$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出？证明你的结论.

23. (本题满分 11 分)

设线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$的系数矩阵为$A$，三阶矩阵$B\neq0$，且$AB=0$，试求$\lambda$值.

模拟试卷(一)参考答案与解析

一、选择题

1. **【考点提示】**求函数极值

【解题分析】利用等价无穷小的代换求得$f(x)$.

由于$x\to0$时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，所以令$f(x)=x^2$，则$f(x)$符合原题设条件，

而$f(x)$在$x=0$处可导$f'(0)=0$，取极小值. 则(A)、(B)、(C) 均不正确，选(D).

2. **【考点提示】**求曲线的渐近线

【解题分析】因$\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}e^{1/x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{\pi}{4}$

故$y=\dfrac{\pi}{4}$是曲线的水平渐近线，又$\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}e^{1/x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\infty$，

故$x=0$是曲线的垂直渐近线. 故应选(B).

3. **【考点提示】**函数连续性

【解题分析】由于$f(x)$在(a, b)内可导，$\xi\in(a, b)$则$f(x)$在ξ点可导，因而在ξ点连续，故$\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$. 所以应选(B).

4. **【考点提示】**导数定义

【解题分析】由左、右导数的定义知

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\frac{2}{3}\lim_{x\to1^-}(x^2+x+1)=2,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\infty,$$

所以$f'_-(1)=2$，但$f'_+(1)$不存在. 故应选(B).

5.【考点提示】微分与积分关系

【解题分析】因 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$，故应选(B).

6.【考点提示】二阶导数

【解题分析】由题设可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y).$$

因为$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，所以选(B).

7.【考点提示】向量组的线性相关性

【解题分析】因为向量组(Ⅲ)线性相关，所以矩阵$\boldsymbol{AB}$不可逆，即$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=0$. 因此$|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{B}|$中至少有一个为0，即$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$中至少有一个不可逆，亦即向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)中至少有一个线性相关，所以选(D).

8.【考点提示】矩阵、行列式、向量的综合题

【解题分析】本题考查$|\boldsymbol{A}|=0$的充分必要条件，而选项(A)、(B)、(D)都是充分不必要条件.

以3阶矩阵为例，若$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&3&4\end{bmatrix}$，条件(A)、(B)均不成立，但$|A|=0$.

若$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&4\\1&2&5\end{bmatrix}$，则$|\boldsymbol{A}|=0$，但第3列并不是其余两列的线性组合，可见(D)不正确.

这样，用排除法可知应选(C).

二、填空题

9.【考点提示】复合函数的定义

【解题分析】由$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\0, & |x|>1\end{cases}$，知$|f(x)|\leqslant 1$. 因此有$f[f(x)]=1$.

10.【考点提示】高阶微分方程的解

【解题分析】令$y'=p$，则$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2$，即$\frac{2p\mathrm{d}p}{1+p^2}=\frac{2\mathrm{d}y}{y}$,

解得 $\ln(1+p^2)=\ln y^2+\ln C_1$，则 $1+p^2=C_1y^2$，

由 $y(0)=1$，$y'(0)=0$ 得 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$，$\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|+C_2=\pm x$，

由 $y(0)=1$ 得 $C_2=0$，所以特解为 $\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|=\pm x$.

11.【考点提示】导数的几何意义

【解题分析】由已知得 $y'=x\ln(1+x^2)$，

于是 $y=\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}(1+x^2)=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1-x^2)-\frac{1}{2}x^2+C$

代入条件 $y(0)=-\frac{1}{2}$，得 $C=-\frac{1}{2}$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$.

12.【考点提示】复合函数求导数

【解题分析】方程两边对 x 求导得 $\mathrm{e}^{x+y}(1+y')-\sin(xy)(xy'+y)=0$.

解得 $y'=-\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y\sin(xy)}{\mathrm{e}^{x+y}-x\sin(xy)}$. 得 $y''(0)=-2$.

13.【考点提示】定积分性质

【解题分析】因为 $y=\mathrm{e}^x$ 在实数域内严格单调增加，又在区间 $[-2,\ -1]$ 上 $1\leqslant-x^3\leqslant8$，$-8\leqslant x^3\leqslant-1$，所以在区间 $[-2,\ -1]$ 上 $\mathrm{e}\leqslant\mathrm{e}^{-x^3}\leqslant\mathrm{e}^8$，$\mathrm{e}^{-8}\leqslant\mathrm{e}^{x^3}\leqslant\mathrm{e}^{-1}<\mathrm{e}$，由定积分的性质知 $\int_{-2}^{-1}\mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x>\int_{-2}^{-1}\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x$.

14.【考点提示】行列式的计算

【解题分析】x^3 的系数只要考察 $2x\begin{vmatrix}-x & -x\\ 2 & x\end{vmatrix}=-2x^3+4x^2$. 所以 x^3 前的系数为 2.

三、解答题

15.【考点提示】三角函数求极限

【解题分析】原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{1+\cos x-1}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\cos x-1)}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}=\frac{1}{2}$.

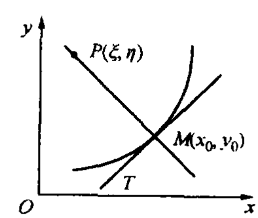
16.【考点提示】分部积分法

【解题分析】被积函数为对数函数与幂函数的乘积，故采用分部积分法，将对数函数看作 u.

$$\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{\ln x}{1-x}-\int\frac{1}{x(1-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\ln x}{1-x}-\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{1-x}+\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|+C.$$

17.【考点提示】曲线的切线、法线



【解题分析】由题设得 $(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2=\frac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2}$

又 $PM\perp MT$，所以 $y_0'=-\frac{x_0-\xi}{y_0-\eta}$，解得 $(y_0-\eta)^2=\frac{(1+y_0'^2)^2}{y_0''^2}$

由于 $y''>0$，曲线 L 是凹的，故 $y_0-\eta<0$，从而 $y_0-\eta=-\frac{1+y_0'^2}{y_0''}$.

又 $x_0-\xi=-y_0'(y_0-\eta)=\dfrac{1+y_0'^2}{y_0''}$，于是得$\begin{cases}\xi=x_0-\dfrac{y_0'(1+y_0'^2)}{y_0''}\\ \eta=y_0+\dfrac{1+y'^2}{y_0''}\end{cases}$.

18.【考点提示】隐函数的求导

【解题分析】$\dfrac{dz}{dx}=f'(\ln y-\sin x)\left(\dfrac{y'}{y}-\cos x\right)$,

$\dfrac{d^2z}{dx^2}=f''(\ln y-\sin x)\left(\dfrac{y'}{y}-\cos x\right)^2+f'(\ln y-\sin x)\left(\dfrac{y''y-y'^2}{y^2}+\sin x\right)$.

在 $y-xe^{y-1}=1$ 中，令 $x=0$，得 $y=1$. 由 $y-xe^{y-1}=1$,

两边对 x 求导得 $y'-e^{y-1}-xe^{y-1}y'=0$,

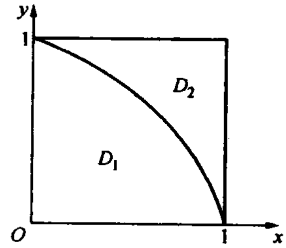
再对 x 求导得 $y''-e^{y-1}y'-e^{y-1}y'-xe^{y-1}y'^2-xe^{y-1}y''=0$.

将 $x=0$，$y=1$ 代入上面两式得 $y'(0)=1$，$y''(0)=2$,

故$\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=0}=f'(0)(0-0)=0$，$\left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}=f'(0)(2-1)=1$.

19.【考点提示】二重积分

【解题分析】此题用分块积分法，如图所示



$$|x^2+y^2-1|=\begin{cases}1-(x^2+y^2), & x^2+y^2\leqslant 1, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0,\\ x^2+y^2-1, & x^2+y^2\geqslant 1, \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \quad 0\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

用分块积分法得

$$I=\iint\limits_D |x^2+y^2-1|d\sigma=\iint\limits_{D_1}[1-(x^2+y^2)]d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)d\sigma,$$

而
$$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)d\sigma=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)d\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)d\sigma,$$

所以
$$I=2\iint\limits_{D_1}[1-(x^2+y^2)]d\sigma+\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)d\sigma=I_1+I_2.$$

作极坐标变换求 I_1：

$$I_1=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=2\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{4},$$

又 $I_2=2\iint\limits_D x^2d\sigma-1=2\int_0^1dy\int_0^1x^2dx-1=\dfrac{2}{3}-1=-\dfrac{1}{3}$，因此 $I=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}$.

20.【考点提示】微分中值定理

【解题分析】(Ⅰ)即证 $F(x)\xlongequal{\text{记为}}f(x)-1+x$ 在$(0,1)$存在零点.

由于 $F(x)$在$[0,1]$连续，且 $F(0)=-1$，$F(1)=1$，即 $F(0)\cdot F(1)<0$,

由连续函数的零点存在性定理知，$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即$f(\xi)=1-\xi$.

(Ⅱ)利用题(Ⅰ)的结果，在$[0,\xi]$上用拉格朗日中值定理知，$\exists\eta\in(0,\xi)$，使得

$\dfrac{1-\xi}{\xi}=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=f'(\eta)$. 在$[\xi,1]$上，用拉格朗日中值定理知，$\exists\zeta\in(\xi,1)$，使得

$\dfrac{\xi}{1-\xi}=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=f'(\zeta)$，两式相乘得$f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=1$.

21.【考点提示】积分中值定理

【解题分析】要对$f(x)$在$[0,1]$上使用罗尔中值定理，问题在于证明$f(x)$在$[0,1]$上有两个等值点. 由积分中值定理，$\exists x_0\in[2/3,1]$，使$\int_{2/3}^{1}f(x)\,dx=\left(1-\frac{2}{3}\right)f(x_0)=\frac{1}{3}f(x_0)$，从而$f(x_0)=f(0)$，又由罗尔中值定理，$\exists c\in(0,x_0)\subset(0,1)$，使$f'(C)=0$.

22.【考点提示】向量组线性相关性的证明

【解题分析】(1)$\boldsymbol{\alpha}_1$能由$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

因为已知$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，所以$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，又因为$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出，

设$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，由(1)知，可设$\boldsymbol{\alpha}_1=l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3$，

那么代入上式整理得$\boldsymbol{\alpha}_4=(k_1l_2+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1l_3+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3$.

即$\boldsymbol{\alpha}_4$可以由$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出，从而$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，这与已知矛盾.

因此，$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

23.【考点提示】线性方程组中常数的确定

【解题分析】设$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，其$\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3)$为三维列向量，

由于$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，所以至少有一个非零的列向量，不妨设$\boldsymbol{\beta}_1\neq\boldsymbol{0}$，

由于$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\boldsymbol{A\beta}_3)=\boldsymbol{0}$，

$\Rightarrow\boldsymbol{A\beta}_1=\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{\beta}_1$为齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的非零解，

于是系数矩阵的列阵的行列式必为零，即$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\2&-1&\lambda\\3&1&-1\end{vmatrix}=5(\lambda-1)=0$，解得$\lambda=1$.

模拟试卷(二)

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设$f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是(　　).

(A) $f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是极小值　　(B) $f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是极大值

(C) $f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极大值　　(D) $f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极小值

2. 设$f(x)$在$[a, +\infty)$连续，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(常数)是$f(x)$在$[a, +\infty)$内有界的(　　).

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

3. 考察一元函数$f(x)$的下列四条性质：

①$f(x)$在区间$[a, b]$上连续　　②$f(x)$在区间$[a, b]$上可积

③$f(x)$在区间$[a, b]$上存在原函数　　④$f(x)$在区间$[a, b]$上可导

若用P→Q表示可由性质P推出性质Q，则有(　　).

(A) ①→②→③　　(B) ①→③→④　　(C) ④→①→②　　(D) ④→③→①

4. 设$f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使$f^{(n)}(0)$存在的最高阶数n为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

5. 二元函数$f(x, y)$在点$(0, 0)$处可微的一个充分条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x, y)-f(0, 0)]=0$

(B) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x, 0)-f(0, 0)}{x}=0$，且$\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0, y)-f(0, 0)}{y}=0$

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x, y)-f(0, 0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

(D) $\lim\limits_{x\to0}[f'_x(x, 0)-f'_x(0, 0)]=0$，且$\lim\limits_{y\to0}[f'_y(0, y)-f'_y(0, 0)]=0$

6. 已知函数$y=y(x)$在任意点x处的增量$\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，其中$\alpha$是比$\Delta x(\Delta x\to0)$高阶的无穷小，且$y(0)=\pi$，则$y(1)=$(　　).

(A) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$　　(B) 2π　　(C) π　　(D) $e^{\frac{\pi}{4}}$

7. 设$\boldsymbol{A}$为反对称矩阵，且$|\boldsymbol{A}|\neq0$，$\boldsymbol{B}$可逆，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为同阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$[\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{B}^{-1})^T]^{-1}=$(　　).

(A) $-\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|}$　　(B) $\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|}$　　(C) $-\frac{\boldsymbol{B}^T}{|\boldsymbol{A}|}$　　(D) $\frac{\boldsymbol{B}^T}{|\boldsymbol{A}|}$

8. 设向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，其秩为$r_1$，向量组(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$，其秩为$r_2$，且$\boldsymbol{\beta}_i\,(i=1, 2, \cdots, s)$均可以由$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，则(　　).

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1+r_2

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1-r_2

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1+r_2

(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=e^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$________.

10. 设 $f(x)=xe^x$，则 $f^{(n)}(x)$ 的极小值为________.

11. 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $dz\big|_{(1,0)}=$________.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 0, & 若\ x=0,\end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是________.

13. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx=$________.

14. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{bmatrix}$，且秩 $r(A)=3$，则 $k=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$.

16. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

17. (本题满分 10 分)

设 $\begin{cases}x=t\cos t\\ y=t\sin t\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

18. (本题满分 10 分)

已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x}f\left(\dfrac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$，求 $f(x)$.

19. (本题满分 10 分)

假设曲线 l_1：$y=1-x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 x 轴，y 轴所围成区域被曲线 l_2：$y=ax^2$ 分为面积相等的两部分，其中 a 是大于零的常数，试确定 a 的值.

20. (本题满分 11 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(Ⅰ) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$；

(Ⅱ) 若 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

21.（本题满分 11 分）

设二元函数 $f(x, y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\leqslant 2, \end{cases}$ 计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x, y)\mid |x|+|y|\leqslant 2\}$.

22.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$.

（Ⅰ）求 x 与 y 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

23.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

（Ⅰ）已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 3，试求 y；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $(\boldsymbol{AP})^T(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

模拟试卷（二）参考答案与解析

一、选择题

1.【考点提示】函数的最（极）大值、最（极）小值

【解题分析】因为 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上可导，$f'(x)=x\cos x>0$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上成立，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加. 所以 $f(0)<f(x)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，

即 $f(0)$ 是最（极）小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是最（极）大值. 故选(B).

2.【考点提示】函数的极限与有界性的关系

【解题分析】由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 定义知，存在 $x_0>a$ 使得 $a\in[x_0, +\infty)$ 时 $f(x)$ 有界，又 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 有界，因此 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内有界，但 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内有界，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不一定存在，如 $f(x)=\sin x$，故选(A).

3.【考点提示】函数的性质

【解题分析】$f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导，则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上必连续，由 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续可得到 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积的结论，同时也说明 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上存在原函数，故选(C).

4.【考点提示】分段函数的高阶导数

【解题分析】$3x^3$ 处处任意阶可导，只需考查 $\varphi(x)=x^2|x|$，它是分段函数，$x=0$ 是连