初級中學課本

代數

下冊

本社曾於一九五四年暑假前，根據中學數學教學大綱（修訂草案）的要求，將應當在初中代數課程裏講授而在現行課本中沒有的教材，另行編寫了‘初中代數補充教材’單獨出版。這次付印時，爲了教學上的方便，將全部‘初中代數補充教材’附在課本後面，特此聲明。

人民教育出版社

一九五五年一月

初級中學課本 代數下冊目錄

第四章　一次方程

第五章　開平方

習 題

第四章　一次方程

I　方程的一般性質

78. 等式與它的性質　二數或二代數式之間用等號相連結，則組成等式。這些數或代數式叫做等式的部分。在等號左邊的部分組成左部，在等號右邊的部分組成右部。例如在等式

$$a+a+a=a\cdot 3$$

裏，左部是 $a+a+a$ 的和，右部是 $a\cdot 3$ 的積。

在前章裏我們曾把等式的部分叫做邊；現在，我們仍可把等式的左部叫做左邊，右部叫做右邊。

若用兩個不同的文字來表示等式的兩邊，可以將等式的主要性質表示如下：

(1) 若 $a=b$，則 $b=a$。即等式兩邊可以交換位置。

(2) 若 $a=b$，與 $b=c$。則 $a=c$。即若二數分別等於第三數，則此二數相等。

(3) 若 $a=b$ 與 $m=n$，則 $a+m=b+n$ 與 $a-m=b-n$。即等式的兩邊加上等數或減去等數，仍為等式。

(4) 若 $a=b$ 與 $m=n$，則 $am=bn$ 與 $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$，即等式的兩邊乘以等數或除以等數，仍為等式。但在後一情形裏，除數不能為零。

由性質 (4) 我們可以得到：用 -1 乘或除等式的兩邊，等於變更等式兩邊的符號。例如，用 -1 乘等式 $-x=-5$ 的兩邊，則得 $x=5$。這一點，在今後的演算裏，是要常常用到的。

79. 恆等式 若在兩個代數式裏，無論用任何數代替其中相同的文字，都能得出同一的數値時，則此二代數式爲恆等。例如： ab 與 ba；$a+(b+c)$ 與 $a+b+c$。

如果等式的兩邊是由恆等代數式組成的，這樣的等式就叫做恆等式，例如：

$$a+b+c=a+(b+c).$$

在僅由數字式構成的等式裏，它的兩邊可能含有不同的運算，但其結果永遠相等，這種等式也是恆等式，例如：

$$(40\times 5)\div 8=5^2.$$

80. 方程 假設我們要解答下面的問題：

父親 40 歲，兒子 17 歲，問若干年後父親年齡爲兒子年齡的 2 倍？

用算術的方法要想解決這個問題是不太容易的，可是若用文字 x 來代替未知數，問題就簡單得多了。經過 x 年後，父親是 $40+x$ 歲，兒子是 $17+x$ 歲。由問題所給的條件，$(40+x)$ 應該是 $(17+x)$ 的 2 倍，故可寫成等式：

$$40+x=2(17+x).$$

驗算使我們相信，當 $x=6$ 時，等式成立。因爲用 6 代替式中的 x 得： $40+6=2(17+6)$；即 $46=46$。

如果用任何其他的數代替 x 時，等式就不成立了。因此，這個等式不是恆等式；因爲不是在用任何數代替式內的文字，等式的兩邊都能相等的，只有在 $x=6$ 的時候，這個等式才能成爲恆等式。即， $46=46$。

在含有一個或幾個文字的等式裏，若只在這些文字等於一

定的數時兩邊才能相等，則此等式叫做方程，其所含的文字叫做未知數。普通用拉丁字母最後的幾個 (x, y, z, ……) 來代替未知數。

含有一個未知數的方程叫做一元方程，含有兩個未知數的叫做二元方程，等等。

解方程——即求出適合於此方程的未知數的數，這樣的數叫做方程的根。

一元方程可以有一個根、兩個根以及更多的根；例如：$3x-2=13$ 有一個根 (5)，$x^2+2=3x$ 有兩個根 (1與2)，$(x-1)(x-2)(x+1)=0$ 有三個根(1、2 與 -1)* 以及其他等等。也有沒有根的方程，如：$x^2=-4$，因為不論 x 為正數或負數，它的平方都不能得負數。

我們最初根據父子年齡問題組成的等式是一個根為 6 的方程，這裏 6 就是這個問題的解答。經過 6 年以後，父親是 46 歲，而兒子是 23 歲，前者恰是後者的 2 倍。

在解某些問題時，應該組成方程，並學會它的解法；因此必須知道方程的某些一般性質。

在研究這些性質以前，先解出我們已經作出的方程：

$$40+x=2(17+x).$$

展開方程右邊的括號：

$$40+x=34+2x.$$

從方程的兩邊減去 x；得：

---

* 幾個數相乘，若乘數有一個是零，則所得的積也是零；相反的，若乘積是零，則乘數中至少有一個是零。

$$40=34+x.$$

再從方程兩邊減去 34; 得:

$$6=x, \quad 即\ x=6.$$

這樣,用一連串的變化,得出方程的根爲 6.

以後我們能够看到,用這樣的演算方法,還可以解其他的方程.

練　習

149. 觀察下列等式,哪些是恆等式,哪些是方程:

$x+y=y+x$; $(a-b+x)c=ac-bc+xc$;

$3a-4=2a+1$; $8x+1=5x+7$; $a(bc)=abc$;

$2x=x+1$; $(xy)\div y=x$; $a\div 2b=\frac{a}{2}\div b$.

81. 同解方程 如果第一個方程所有的根,都是第二個方程的根;相反地第二個方程所有的根,也都是第一個方程的根;則此二方程叫做同解方程.例如:兩個方程:

$$x^2+2=3x \text{ 與 } 3x-2=x^2$$

爲同解,因爲它們有相同的根: 1 與 2; 而方程:

$$7x=14 \text{ 與 } x^2+2=3x$$

就不是同解,因爲第一個方程僅有一個根 2, 而第二個方程除此根外還有另一根 1.

解任何一個方程的時候,我們都必須把它加以改變,在這種變化的過程裏,我們才能順次地用比較簡單的方程代替已知的比較複雜的方程,直到得出最簡單的形式: $x=a$; 這時,數字 a

就是已知方程的根。但是，在每次變化裏所得到的各個方程，都必須與原方程同解。因爲只有這樣，我們才能够斷定求得的根是正確的。

至於解方程時所有的變化，則是根據方程所具有的兩種性質；我們即將在下面說明它們。

82. 方程的第一種性質 取任一方程，例如：

$$x^2+2=3x, \tag{1}$$

設若在此方程的兩邊加上某數 m（正數、負數或零），得出新方程：

$$x^2+2+m=3x+m. \tag{2}$$

則此方程與已知方程同解。爲了証明這種性質，需要証明：第一，方程(1)的一切根都適合於方程(2)；第二，方程(2)的一切根也都適合於方程(1)。

(1)設方程(1)有$x=1$的根。這就是說，當用 1 代替方程(1)中的 x 時，代數式 x^2+2 的值就會等於代數式 $3x$ 的值（都等於 3）。但是當 $x=1$ 時，二代數式 x^2+2+m 與 $3x+m$ 的值也是相等的；因爲從等數（3 與 3）加等數（m），仍得等數（$3+m$ 與 $3+m$）。這就証明了 $x=1$ 同時也適合於方程（2）。根據同樣的道理可以証明：若方程（1）有另外的根時，也同樣能够適合於方程(2)。因此，我們可以確認：方程(1)所有的根都是方程(2)的根。

(2) 設方程 (2) 有 $x=2$ 的根。這就是說，若用 2 代替方程(2)中的 x，代數式 x^2+2+m 的值就等於 $3x+m$ 的值（都等於 $6+m$）。但是 $x=2$ 時，二代數式 x^2+2 與 $3x$ 的值也是相等的；因爲從等數（$6+m$ 與 $6+m$）減去等數（m），仍得等數。這就証

明了$x=2$同時也適合於方程(1). 根據同樣的道理可以証明:若方程(2)有其他的根,同樣也能適合於方程(1). 由此,我們可以確認:方程(2)的一切根也都是方程(1)的根.

因爲方程(1)與(2)的根相同,故此二方程同解.

這種性質,同樣地也適合於由方程的兩邊減去同數,因爲減去某數等於把某數變號相加.

由此,若方程的兩邊同時加上或減去某數時,所得的新方程與原方程同解.

83. 推論 由於上述方程的性質可以引出以下的推論.

1. 方程的各項,可以在改變符號以後,由方程的一邊移到他一邊. 例如,方程:

$$8+x^2=7x-2.$$

兩邊加2得: $8+x^2+2=7x.$

-2項由方程的右邊移到左邊,而它的符號改變爲$+$. 再由上面方程的兩邊減去x^2,得:

$$8+2=7x-x^2.$$

$+x^2$項從左邊移到右邊,同時它的符號則改變爲$-$.

2. 方程的兩邊有相同的項時,可以相消. 例如方程:

$$6x+3=x^2+3.$$

由兩邊減去3得: $6x=x^2.$

84. 方程的第二種性質 仍取前面的方程

$$x^2+2=3x. \qquad (1)$$

若在此方程的兩邊乘以正數或負數m(不可爲零),則得出新方程: $(x^2+2)m=3xm. \qquad (2)$

爲了証明這兩個方程同解，我們也必須沿用討論第一種性質時所用的方法，作完全同樣的討論，亦即，要証明：第一，方程(1)所有的根都適合於方程(2)；第二，方程(2)所有的根都適合於方程(1)。

(1)設方程(1)有$x=1$的根，這就是說，當用1代替方程(1)中的x時，代數式x^2+2的值等於代數式$3x$的值（都等於3）。但是當$x=1$時，$(x^2+2)m$與$3xm$兩個乘積的值也是相等的；因爲等數（3與3）乘以等數(m)仍得等數($3m$與$3m$)，這就証明了$x=1$同時也適合於方程(2)。並且，對方程(1)所有其他的根也都可以作同樣的討論，因此可以確認：方程(1)所有的根都是方程(2)的根。

(2)設方程(2)有$x=2$的根，這就是說，若用2代替方程(2)中的x，則代數式$(x^2+2)m$的值就等於$3xm$的值（都等於$6m$）。但是當$x=2$時，代數式x^2+2與$3x$的值也是相等的；因爲用不等於零的同一數m除等數($6m$與$6m$)仍得等數。這就証明了$x=2$同時也是方程(1)的根。同理可以証明方程(2)的一切根，也都是方程(1)的根。因此這兩個方程同解。

若所用的乘數m等於零，例如，用零乘根爲1與2的方程$x^2+2=3x$的兩邊，那時我們得出新的方程：

$$(x^2+2)\times 0=3x\times 0.$$

這時適合於此方程的x的數值不僅是1與2，而是任何的數值。例如：用5、6以及其他數代替x時，得：

$$(5^2+2)\times 0=3\times 5\times 0; \qquad (6^2+2)\times 0=3\times 6\times 0;$$

即 $\quad 27\times 0=15\times 0; \qquad 38\times 0=18\times 0;$

或者　　$0=0$;　　　　　$0=0$.

(因爲零與任何數相乘均得零.) 這就是說, 如果乘數爲零, 就破壞了方程的同解性.

由此, 若方程的兩邊同時乘以或除以不等於零的某數時, 則得出與原方程同解的新方程:

85. 推論　從方程的第二種性質可以引出以下的三個推論:

1. 若方程的各項含有不等於零又不含未知數的公因數時, 可用此公因數除方程的各項. 例如:

$$60x-160=340-40x.$$

用20除各項, 得出較簡單的方程,

$$3x-8=17-2x.$$

2. 方程可去掉分母內不含有未知數的各分數項的分母. 例如:

$$\frac{7x-3}{6}-\frac{x-5}{4}=\frac{43}{6},$$

化各項分母爲公分母,

$$\frac{14x-6}{12}-\frac{3x-15}{12}=\frac{86}{12},$$

或

$$\frac{14x-6-(3x-15)}{12}=\frac{86}{12}.$$

用不等於0的數12, 乘方程的兩邊去掉分母, 則得出與原方程同解的方程:

$$14x-6-(3x-15)=86 \text{ 或 } 14x-6-3x+15=86.$$

3. 方程所有的各項可以改變爲相反的符號, 這與用 -1 乘方程兩邊的結果相同. 例如方程:

$$-8-x^2=-7+2$$

的兩邊乘以 -1 則得，

$$8+x^2=7-2.$$

86. 用同一代數式乘或除方程的兩邊 爲了變化已知方程，有時需要用同一代數式去乘或除方程的兩邊（在下節我們可以看到這樣的例子）。不過，只有在該代數式不等於零的情形下，所得到的新方程才能與已知方程同解。因爲乘式爲零，就破壞了方程的同解性。

87. 增根 當我們演算含有分式的方程，而在分式的分母內又含有未知數時，就必須用含有未知數的代數式同乘方程的兩邊。例如，

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2}. \qquad (1)$$

顯然地各分式的公分母是 $(x-2)^2$。將各項化爲公分母後：

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{x-2}{(x-2)^2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2};$$

用 $(x-2)^2$ 乘方程兩邊的各項，消去分母，得，

$$x^2+2=x-2+2x+2,$$

即

$$x^2+2=3x. \qquad (2)$$

此新方程有二根：1 與 2。但是我們不能肯定這兩個根都能適合於原方程；因爲我們曾用代數式 $(x-2)^2$ 同乘原方程的兩邊；而且當 $x=2$ 時，$(x-2)^2=0$。但當以零作乘數時已破壞了方程的同解性。

因此，我們對所求得的根：1 與 2，必須加以驗算，看它們是否適合於方程(1)。

把 $x=1$ 代入方程(1),

$$\frac{1^2}{(1-2)^2}+\frac{2}{(1-2)^2}=\frac{1}{1-2}+\frac{2\times1+2}{(1-2)^2},$$

$$\frac{1}{(-1)^2}+\frac{2}{(-1)^2}=\frac{1}{-1}+\frac{2+2}{(-1)^2}.$$

$$1+2=-1+4,\ \text{即}\ 3=3.$$

故 $x=1$ 適合於方程(1),但 $x=2$ 却不能適合於原方程(1),因爲當 $x=2$ 時,方程就失掉了意義.

$$\frac{4}{0}+\frac{2}{0}=\frac{1}{0}+\frac{6}{0}$$

(用零除的除法沒有意義).

所以 $x=2$ 雖然是方程(2)的根,却不是原方程(1)的根,也就是說:當我們這樣變方程(1)爲方程(2)時,就產生了不適合於原方程的**增根**.

由此可知,若在已知方程內含有分式,並且在分式的分母中含有未知數時,則在用公分母同乘方程的兩邊,去掉分母,求出新方程的根以後,我們應該把所得的根代入原方程,檢驗其中是否含有增根.

相反地,如果用含有未知數的代數式同除方程的兩邊,則可能失掉某些根.例如,用 $x-3$ 除方程

$$(2x+3)(x-3)=(3x-1)(x-3)$$

的兩邊,得出的新方程:

$$2x+3=3x-1.$$

這個新方程便不與原已知方程同解.因爲,已知方程有兩個根:$x=4$ 與 $x=3$,而新方程則只有一根:$x=4$.

II　一元方程

88. 解一元一次方程　用以下二例說明一元一次方程的解法.

1. 解方程:

$$3x+2(4x-3)=5(x+2)-4.$$

展開括號後得:

$$3x+8x-6=5x+10-4.$$

將含未知數的各項移到左邊(方程第一種性質推論):

$$3x+8x-5x=10-4+6.$$

歸併同類項,　　　　　$6x=12.$

用 6 除方程的兩邊(方程第二種性質),得,

$$x=2.$$

要知道解方程時是否發生錯誤,必須進行驗算. 爲此將求得的根代原方程的 x, 若方程兩邊相等, 則所得的根是正確的. 在這個例題裏:

$$3\times2+2(4\times2-3)=5(2+2)-4.$$

或者　　　　　$16=16.$

即解答正確.

2. 解方程:

$$\frac{3x-4}{2}+\frac{3x+2}{5}-x=\frac{7x-6}{6}-1.$$

將各項化成公分母爲 30 的分式,

$$\frac{15(3x-4)}{30}+\frac{6(3x+2)}{30}-\frac{30x}{30}=\frac{5(7x-6)}{30}-\frac{30}{30},$$

用 30 乘方程的各項（或去各項的公分母），

$$15(3x-4)+6(3x+2)-30x=5(7x-6)-30.$$

若開始就用各項的公分母乘原方程的各項，也能直接得出同樣的結果：

$$\frac{30(3x-4)}{2}+\frac{30(3x+2)}{5}-30x=\frac{30(7x-6)}{6}-30\times 1.$$

化簡後，

$$15(3x-4)+6(3x+2)-30x=5(7x-6)-30.$$

去括號，

$$45x-60+18x+12-30x=35x-30-30.$$

將含未知數的各項移到左邊，已知各項移到右邊：

$$45x+18x-30x-35x=60-12-30-30.$$

歸併同類項，得，　　$-2x=-12.$

用未知數的係數除兩邊（也可先用 -1 乘兩邊，使其變爲正數）：

$$x=\frac{-12}{-2}=\frac{12}{2}=6.$$

驗算：
$$\frac{3\times 6-4}{2}+\frac{3\times 6+2}{5}-6=\frac{7\times 6-6}{6}-1;$$

$$7+4-6=6-1;\quad 5=5.$$

由以上各例題，得出一元一次方程的解法：

1. 去方程的分母。
2. 展開括號。
3. 將含未知數的各項移到一邊，已知各項移到他一邊。
4. 歸併同類項。

5. 用未知數的係數除方程的兩邊。

然後將求得的根代入原方程驗算其有無錯誤。

因爲方程的形式不同，在解某些方程的時候，上述步驟並不是完全必需的。

注意：在作完前四個步驟後，方程的每邊各剩一項：左邊的是含有未知數的項，右邊的是已知項。故可寫成這樣的形式：

$$ax=b.$$

a 與 b 可能是正數、負數、或等於零，這樣形式的方程，叫做**一元一次方程的標準式**。

練　習

解以下各方程：

150. $2x+1=35$;　$19=4+3y$;　$7y-11=24$.

151. $3x+23=104$;　$89=11y-10$;　$38=2+3x$.

152. $3x=15-2x$;　$4x-3=9-2x$;　$5x+\frac{1}{4}=3\frac{1}{2}$.

153. $2.5x-0.86=4+0.7x$;　$29+2x=(x-7)\cdot 3$.

154. $x-7=\frac{3x+13}{20}$;　$-x=3$;　$-2x=8$.

155. $\frac{2x+1}{2}=\frac{7x+5}{8}$;　$x+\frac{11-x}{3}=\frac{20-x}{2}$.

156. $x+\frac{3x-9}{5}=11-\frac{15x-12}{3}$.

157. $3x-4-\frac{4(7x-9)}{15}=\frac{4}{5}\left(6+\frac{x-1}{3}\right)$.

158. $2x-\frac{19-2x}{2}=\frac{2x-11}{2}$.

159. $\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}=2-\frac{4+x}{4}$.