普通高等教育“十二五”规划教材

卓越工程师教育培养计划——现代力学精品教材

基础力学实验

张红旗　李　瑶　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
卓越工程师教育培养计划——现代力学精品教材

基础力学实验

张红旗　李　瑶　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书内容包括材料力学性能实验、电测实验、光弹性实验、冲击实验、虚拟实验、理论力学实验以及流体力学实验等多个部分。材料的力学性能实验主要是破坏性实验，其中包括材料拉伸弹性模量测定的机测实验和部分实验仪器设备的构造和原理；电测实验部分主要为电测实验方法和配合更新的实验设备所做的常用的电测实验，其中包括用电测方法测定拉伸弹性模量和泊松比的实验；光弹性实验主要介绍光弹实验的基础知识；虚拟实验主要介绍虚拟实验的原理、实现方法等基础知识；理论力学实验主要包括理论力学应用演示实验和动力学基础应用实验；流体力学实验主要包括流体演示实验、能量方程演示实验、管道局部水头损失实验、文丘里流量计实验以及管流流态和沿程阻力实验。

本书可作为高等学校工科本科材料力学课程或力学相关课程的配套教材，作为不单独开设实验课学校使用，也可用于开放实验室，作为独立开课的学校选用。

图书在版编目(CIP)数据

基础力学实验/张红旗，李瑶主编. 一北京：科学出版社，2016.3

(卓越工程师教育培养计划)

普通高等教育“十二五”规划教材. 现代力学精品教材

ISBN 978-7-03-047914-3

Ⅰ.①基… Ⅱ.①张… ②李… Ⅲ.①力学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.①O3-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 058824 号

责任编辑：吉正霞 孙寓明/责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超/封面设计：蓝 正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16

2016 年 3 月第 一 版 印张：9 1/2

2016 年 3 月第一次印刷 字数：217 000

定价：26.50 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

材料力学、理论力学与流体力学是高等学校力学、土木、机械、材料等专业本科学生的学科基础必修课程，而力学实验是理论联系实际的一个重要环节。学生通过实验教学能够加深对力学基础理论的理解，初步掌握实验原理和实验方法，着重培养实验技能、工程意识和创新能力，从而提高综合素质。因此力学实验在力学教学中具有举足轻重的地位。

近年来随着科学技术的发展，实验技术和实验方法得到了大力发展，新技术、新设备不断涌现，因此理论教学内容和方法也不断地变革与更新。为了适应"卓越工程师教育培养计划"与教学改革的需要，武汉理工大学力学实验中心在总结多年力学实验教学经验的基础上，将材料力学、理论力学以及流体力学的相关实验讲义进行修改与补充，编写了本教材。

全书共分九章和附录。第一章为绪论，阐述了基础力学实验的任务和地位以及基本要求。第二章介绍了误差分析与数据处理方法。第三章主要讲述材料力学性能测试的实验方法和几种破坏性实验。另外，详细介绍了材料力学实验所需的材料试验机的结构和原理，尤其把最新的电子万能材料试验机的操作方法纳入本教材，把传统的由人操作材料试验机的操作方式改为由人和计算机共同控制材料试验机的方式，真正达到能够严格按国家标准进行实验的目的。第四章主要介绍电测实验方法，按照我校自己研制的多功能电测实验装置的性能，编写了所能操作的实验项目及操作方法。第五章与第六章主要讲述材料力学的演示实验，这些实验主要包括光弹实验和虚拟实验等。第七章主要介绍理论力学应用演示实验，包括静力学、运动学以及动力学等相关演示实验。第八章主要介绍动力学基础应用实验，包括滑动摩擦系数的测定、动平衡以及理论力学应用组合实验等。第九章主要介绍流体力学实验，包括流动、能量方程等演示实验，还包括管道局部水头损失实验、文丘里流量计及孔板流量计率定实验以及管流流态(雷诺)和沿程阻力实验等。

本书由张红旗与李瑶主编，在投笔统稿之际，深感此项工作的辛苦，很多同事亦为此付出艰辛和汗水。本书参与编写的人员有：第 3.1～3.4 节、附录 A、附录 B 及附录 C 由王珍、周丽编写；第 2.3～2.4 节、第 4.1～4.6 节及第 8.2 节由吕泳编写；第七章与第 8.1 节由李瑶编写；第 8.3 节由曾海燕编写；第九章部分内容由李旭编写；由张红旗编写其余章节部分，并负责了全部章节的补充完善、修改和统稿工作。

限于编者的水平，教材可能有欠妥之处，恳请广大师生和读者批评指正。

编　者

2015 年 10 月

目　录

第一章　绪　　论

第一节　基础力学实验的意义和内容

基础力学实验是工科专业教学中的一个重要环节。基础力学相关理论知识的结论及定律、力学性质(机械性质)都要通过实验来验证或测定;各种复杂构件的强度和刚度的问题,也需要通过实验才能解决。因此,实验课能使学生加强巩固应用基本理论知识,掌握测定材料机械性能及测定应力和变形的基本方法,学会使用有关的仪器及仪表(如万能材料试验机、静态电阻应变仪等),初步培养独立确定实验方案与分析处理实验结果的能力。通过实验学习还能培养严肃认真的工作态度,实事求是的科学作风和爱护财物的优良品质。因此,基础力学实验是工程专业学生必须掌握的基本技能。

基础力学实验的目的是:通过实验教学使学生掌握基础力学实验的基本知识、基本技能和基本方法;熟悉基础力学实验的主要仪器和设备,巩固应用基本理论知识;培养学生良好的实验素质和理论联系实际的作风;增强学生的实践能力;提高学生分析、研究和解决工程问题能力;培养学生的创新能力。

基础力学实验课程内容通常分为以下几个方面:

一、材料的力学性质测定实验

构件设计时,需要了解所用材料的力学性质,如经常用到的材料的屈服极限、强度极限、延伸率、冲击韧性和疲劳强度等。这些力学性质数据,是通过拉伸、压缩、扭转、冲击和疲劳等实验测定的。学生通过这类实验的基本训练,可掌握材料的力学性质的基本测定方法,进一步巩固有关材料力学性质的知识。本书这部分内容主要包括金属材料的拉、压、扭转力学性能测定和材料的冲击、疲劳实验。

二、电测应力测试实验

工程实际中,常常会遇到一些构件的形状和载荷十分复杂的情况(如高层建筑物、机车车辆结构等)。关于它们的强度问题单靠理论计算,不易得到满意的结果。因此,近几十年来发展了实验应力分析的方法,即通过实验测量,进一步进行应力、应变分析。其内容主要包括机测法、电测法和光测法等,目前已成为解决工程实际问题的有力方法。本部分着重介绍目前应用较广的电测技术,这部分内容主要包括材料的纯弯曲、弯扭组合变形实验以及板状试样偏心拉伸实验。

三、理论力学实验

作为理论力学新教学体系的重要组成部分,本部分实验的目的是通过实践教学环节

的实施，开阔学生的眼界，加强理论力学的工程概念，了解这门课程与工程实际的紧密关系，培养、锻炼学生的创新思维和科研能力。大量与理论力学相关的产品和科研成果作为“理论力学实验”实践教学的内容，学生通过参观实物、实验演示以及自己观察、分析和动手实践达到实验的目的。

四、流体力学实验

本部分内容主要介绍流体力学中几个演示实验及验证实验，目的是为了验证流体力学的基本理论，加深对课堂教学内容的了解；同时也是对学生掌握实验方法、实验技能的基本训练。培养学生独立组织完成实验的能力，严肃认真的工作作风，实事求是的科学态度，为将来从事科学研究与解决工程实际问题打好基础。

第二节　基础力学实验的基本要求

一、实验前的准备

(1) 实验前按照预习要求做好预习；要明确实验目的、原理和步骤。

(2) 了解实验设备的操作方法和工作原理，对所使用的机器和仪器要进行适当的选择。选择试验机的根据是：①需用力的类型(如使试件拉伸、压缩、弯曲或扭转的力)；②需用力的量值。前者由实验目的来决定，后者则依据试件(或模型)尺寸来决定。变形仪的选择，应根据实验精度以及梯度等因素决定。此外，使用是否方便、变形仪安装有无困难，也都是选用时应当考虑的问题。

(3) 选定试件，了解试件的材料，检查试件是否合格，细心测量试件尺寸。

(4) 估计应加荷载，拟定加载方案，预计可能出现的各种实验现象及其物理意义，做好观察记录准备。应备齐记录表格以供试验时记录数据。

二、实验过程中的要求

(1) 所有仪器、设备检验完毕，各项准备就绪。开始实验前，要检查试验机测力度盘指针是否对准零点，试件安装是否正确，变形仪是否安装稳妥等。

(2) 试运行正常后，经指导教师检查好可开机实验，实验开始后仍要注意观察，严格按照操作规程；实验过程中，要严肃认真，一丝不苟。第一次加载可不作记录(不允许重复加载的试验除外)，观察各部分变化是否正常，如果正常，再正式加载并开始记录。记录者及操作者均需严肃认真、一丝不苟地进行操作。

(3)实验完毕后检查数据是否齐全，最后清理设备，把仪器回归原位并关机，其他工具放回原处，经指导教师检查无误后，方可离开。

三、实验报告的书写要求

实验报告是实验者最后的成果，是实验过程的总结。报告应包括下列内容：

(1) 实验名称、实验日期、实验人员姓名、同组者名单。

（2）实验目的及原理。

（3）使用的机器、仪表并注明名称、型号、精度（或放大倍数）等，其他用具也应写清，并绘出装置简图。

（4）实验数据及处理数据要正确填入记录表格内，注意测量单位。

除此之外，还鼓励学生自己设计实验方案，完成实验并进行验证。

第二章　误差分析和数据处理

第一节　实验数据的误差分析

用各种实验方法测量力、位移、应力、应变等物理量时，不可避免地存在实验误差。充分研究科学实验和测量过程中存在的误差，具有重要的意义：

(1) 正确认识误差的性质，分析产生的原因，以减小误差或消除某些误差。

(2) 正确处理数据，以便得到接近真值的数据和结果。

(3) 合理设计和组织实验，正确选用仪器与测量方法，使在一定条件下，得到最佳结果。

一、误差的基本概念

测量是人类认识事物本质不可缺少的手段。通过测量和实验人们能够获得对事物定量的概念和发现事物的规律性。科学上很多新的发现和突破都是以实验测量为基础的。测量就是用实验的方法，将被测物理量与所选用作为标准的同类量进行比较，从而确定它的大小。

1. 真值与平均值

真值是待测物理量客观存在的确定值，也称理论值或定义值。通常真值是无法测得的。若在实验中，测量的次数无限多时，根据误差的分布定律，正负误差的出现几率相等。再经过细致地消除系统误差，将测量值加以平均，可以获得非常接近于真值的数值。但是实际上实验测量的次数总是有限的。用有限测量值求得的平均值只能是近似真值，常用的平均值有下列几种：

(1) 算术平均值。算术平均值是最常见的一种平均值。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为各次测量值，n 代表测量次数，则算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{2-1-1}$$

(2) 几何平均值。几何平均值是将一组 n 个测量值连乘并开 n 次方求得的平均值，即

$$\bar{x}_{几} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \tag{2-1-2}$$

(3) 均方根平均值

$$\bar{x}_{均} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \tag{2-1-3}$$

(4) 对数平均值。设两个量 x_1, x_2，其对数平均值为

$$\overline{x}_{对}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\frac{x_1-x_2}{\ln\dfrac{x_1}{x_2}} \tag{2-1-4}$$

应指出，变量的对数平均值总小于算术平均值。当 $x_1/x_2\leqslant 2$ 时，可以用算术平均值代替对数平均值。

当 $x_1/x_2=2$，$\overline{x}_{对}=1.565$，$\overline{x}=1.50$，$(\overline{x}_{对}-\overline{x})/\overline{x}_{对}=4.2\%$，即 $x_1/x_2\leqslant 2$，引起的误差不超过 4.2%。

以上介绍各平均值的目的是要从一组测定值中找出最接近真值的那个值。在力学实验和科学研究中，数据的分布较多属于正态分布，所以通常采用算术平均值。

2. 误差的分类

根据误差的性质和产生的原因，一般分为三类：

(1) 系统误差。系统误差是指在测量和实验中因未发觉或未确认的因素所引起的误差，而这些因素影响结果永远朝一个方向偏移，其大小及符号在同一组实验测定中完全相同，当实验条件一经确定，系统误差就获得一个客观上的恒定值。

当改变实验条件时，就能发现系统误差的变化规律。

系统误差产生的原因：测量仪器不良，如刻度不准、仪表零点未校正或标准表本身存在偏差等；周围环境的改变，如温度、压力、湿度等偏离校准值；实验人员的习惯和偏向，如读数偏高或偏低等。针对仪器的缺点、外界条件变化影响的大小、个人的偏向引起的误差，待分别加以校正后是可以清除的。

(2) 偶然误差。在已消除系统误差的一切量值的观测中，所测数据仍在末一位或末两位数字上有差别，而且它们的绝对值和符号的变化，时大时小，时正时负，没有确定的规律，这类误差称为偶然误差或随机误差。偶然误差产生的原因不明，因而无法控制和补偿。但是，倘若对某一量值作足够多次的等精度测量后，就会发现偶然误差完全服从统计规律，误差的大小或正负的出现完全由概率决定。因此，随着测量次数的增加，随机误差的算术平均值趋近于零，所以多次测量结果的算数平均值将更接近于真值。

(3) 过失误差。过失误差是一种显然与事实不符的误差，它往往是由于实验人员粗心大意、过度疲劳或操作不正确等原因引起的。此类误差无规则可寻，只要加强责任感、多方警惕、细心操作，过失误差是可以避免的。

3. 精密度、准确度和精确度

反映测量结果与真实值接近程度的量，称为精度(亦称精确度)。它与误差大小相对应，测量的精度越高，其测量误差就越小。“精度”应包括精密度和准确度两层含义。

(1) 精密度。测量中所测得数值重现性的程度，称为精密度。它反映偶然误差的影响程度，精密度高就表示偶然误差小。

(2) 准确度。测量值与真值的偏移程度，称为准确度。它反映系统误差的影响精度，准确度高就表示系统误差小。

(3) 精确度(精度)。它反映测量中所有系统误差和偶然误差综合的影响程度。

在一组测量中，精密度高的准确度不一定高，准确度高的精密度也不一定高，但精确

度高，则精密度和准确度都高。

为了说明精密度与准确度的区别，可用下述打靶子例子来说明，如图 2-1-1 所示。

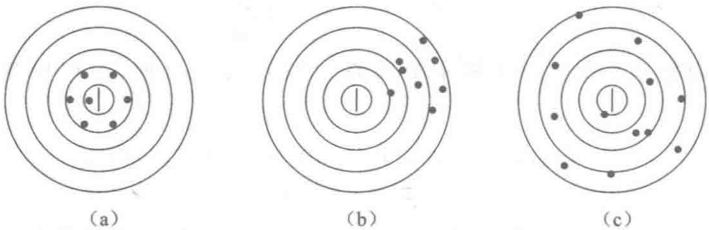

图 2-1-1　精密度和准确度的关系

图 2-1-1(a)中表示精密度和准确度都很好，则精确度高；图 2-1-1(b)表示精密度很好，但准确度却不高；图 2-1-1(c)表示精密度与准确度都不好。在实际测量中没有像靶心那样明确的真值，而是设法去测定这个未知的真值。

学生在实验过程中，往往满足于实验数据的重现性，而忽略了数据测量值的准确程度。绝对真值是不可知的，人们只能订出一些国际标准作为测量仪表准确性的参考标准。随着人类认识运动的推移和发展，可以逐步逼近绝对真值。

4. 误差的表示方法

利用任何量具或仪器进行测量时，总存在误差，测量结果总不可能准确地等于被测量的真值，而只是它的近似值。测量的质量高低以测量精确度作指标，根据测量误差的大小来估计测量的精确度。测量结果的误差愈小，则认为测量就愈精确。

(1) 绝对误差。测量值 X 和真值 X_0 之差为绝对误差，通常称为误差。记为

$$D=X-X_0 \tag{2-1-5}$$

由于真值 X_0 一般无法求得，因而上式只有理论意义。常用高一级标准仪器的示值作为实际值 X^* 以代替真值 X_0。由于高一级标准仪器存在较小的误差，因而 X^* 不等于 X_0，但总比 X 更接近于 X_0。X 与 X^* 之差称为仪器的示值绝对误差。记为

$$e^*=X-X^* \tag{2-1-6}$$

与 e^* 相反的数称为修正值，记为

$$C=-e^*=X^*-X \tag{2-1-7}$$

通过检定，可以由高一级标准仪器给出被检仪器的修正值 C。利用修正值便可以求出该仪器的实际值 X^*。即

$$X^*=X+C \tag{2-1-8}$$

(2) 相对误差。衡量某一测量值的准确程度，一般用相对误差来表示。示值绝对误差 e^* 与被测量的实际值 X^* 的百分比值称为实际相对误差。记为

$$\delta_{X^*}=\frac{e^*}{X^*}\times 100\% \tag{2-1-9}$$

以仪器的示值 X 代替实际值 X^* 的相对误差称为示值相对误差。记为

$$\delta_X=\frac{e^*}{X}\times 100\% \tag{2-1-10}$$

一般来说，除了某些理论分析外，用示值相对误差较为适宜。

(3) 引用误差。为了计算和划分仪表精确度等级，提出引用误差概念。其定义为仪表示值的绝对误差与量程范围之比。

$$\delta_A = \frac{\text{示值绝对误差}}{\text{量程范围}} \times 100\% = \frac{e^*}{X_n} \times 100\% \qquad (2\text{-}1\text{-}11)$$

式中，e^* 表示值绝对误差；X_n 表示标尺上限值－标尺下限值。

(4) 算术平均误差。算术平均误差是各个测量点的误差的平均值。

$$\delta_{\text{平}} = \frac{\sum |e_i^*|}{n}, i = 1, 2, \cdots, n \qquad (2\text{-}1\text{-}12)$$

式中，n 为测量次数；e_i^* 为第 i 次测量的误差。

(5) 标准误差。标准误差亦称为均方根误差，其定义为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum e_i^{*2}}{n}} \qquad (2\text{-}1\text{-}13)$$

上式适用于无限测量的场合。实际测量工作中，测量次数是有限的，则改用下式

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum e_i^{*2}}{n-1}} \qquad (2\text{-}1\text{-}14)$$

标准误差不是一个具体的误差，σ 的大小只说明在一定条件下等精度测量集合所属的每一个观测值对其算术平均值的分散程度，如果 σ 的值愈小则说明每一次测量值对其算术平均值分散度就小，测量的精度就高，反之精度就低。

5. 测量仪表精确度

测量仪表的精确等级是用最大引用误差(又称允许误差)来标明的。它等于仪表示值中的最大绝对误差与仪表的量程范围之比的百分数。

$$\delta_{n\max} = \frac{\text{最大示值绝对误差}}{\text{量程范围}} \times 100\% = \frac{e_{\max}^*}{X_n} \times 100\% \qquad (2\text{-}1\text{-}15)$$

式中，$\delta_{n\max}$ 为仪表的最大测量引用误差；$e_{\max}^*$ 为仪表示值的最大绝对误差；X_n 为标尺上限值—标尺下限值。

通常情况下是用标准仪表校验较低级的仪表。所以，最大示值绝对误差就是被校表与标准表之间的最大绝对误差。

测量仪表的精度等级是国家统一规定的，把允许误差中的百分号去掉，剩下的数字就称为仪表的精度等级。仪表的精度等级常以圆圈内的数字标明在仪表的面板上。例如某台压力计的允许误差为 1.5%，这台压力计电工仪表的精度等级就是 1.5，通常简称 1.5 级仪表。

仪表的精度等级为 a，它表明仪表在正常工作条件下，其最大引用误差的绝对值 $\delta_{\max}$ 不能超过的界限，即

$$\delta_{n\max} = \frac{e_{\max}^*}{X_n} \times 100\% \leqslant a\% \qquad (2\text{-}1\text{-}16)$$

由式(2-1-16)可知，在应用仪表进行测量时所能产生的最大绝对误差(简称误差限)为

$$e_{\max}^* \leqslant a\% \cdot X_n \qquad (2\text{-}1\text{-}17)$$

而用仪表测量的最大值相对误差为

$$\delta_{n\max}=\frac{e_{\max}^{*}}{X_n}\leqslant a\%\cdot\frac{X_n}{X} \tag{2-1-18}$$

由上式可以看出,用只是仪表测量某一被测量所能产生的最大示值相对误差,不会超过仪表允许误差 $a\%$ 乘以仪表测量上限 X_n 与测量值 X 的比。在实际测量中为可靠起见,可用下式对仪表的测量误差进行估计,即

$$\delta_m=\alpha\%\cdot\frac{X_n}{X} \tag{2-1-19}$$

二、误差的基本性质

实验中通常直接测量或间接测量得到有关的参数数据,这些参数数据的可靠程度如何?如何提高其可靠性?因此,必须研究在给定条件下误差的基本性质和变化规律。

1. 误差的正态分布

如果测量数列中不包括系统误差和过失误差,那么从大量的实验中发现偶然误差的大小有如下几个特征:

(1) 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多,即误差的概率与误差的大小有关。这是误差的单峰性。

(2) 绝对值相等的正误差或负误差出现的次数相当,即误差的概率相同。这是误差的对称性。

(3) 极大的正误差或负误差出现的概率都非常小,即大的误差一般不会出现。这是误差的有界性。

(4) 随着测量次数的增加,偶然误差的算术平均值趋近于零。这叫误差的抵偿性。

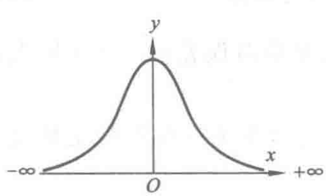

图 2-1-2　误差分布

根据上述的误差特征,可疑的误差出现的概率分布图,如图 2-1-2 所示。图中横坐标表示偶然误差,纵坐标表示误差出现的概率,图中曲线称为误差分布曲线,以 $y=f(x)$表示。其数学表达式由高斯提出,具体形式为

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{2-1-20}$$

或

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2} \tag{2-1-21}$$

上式称为高斯误差分布定律亦称为误差方程。式中,σ 为标准误差;h 为精确度指数,σ 和 h 的关系为

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \tag{2-1-22}$$

若误差按函数关系分布,则称为正态分布。σ 越小,测量精度越高,分布曲线的峰越高切窄;σ 越大,分布曲线越平坦且越宽,如图 2-1-3 所示。由此可知,σ 越小,小误差占的

比重越大，测量精度越高。反之，则大误差占的比重越大，测量精度越低。

2. 测量集合的最佳值

在测量精度相同的情况下，测量一系列观测值 M_1，M_2，M_3，…，M_n 所组成的测量集合，假设其平均值为 M_m，则各次测量误差为

$$x_i = M_i - M_m,\quad i = 1,2,\cdots,n$$

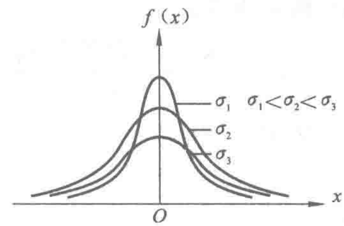

图 2-1-3　不同的 σ 误差分布

当采用不同的方法计算平均值时，所得到的误差值不同，误差出现的概率亦不同。若选取适当的计算方法，使误差最小，而概率最大，由此计算的平均值为最佳值。根据高斯分布定律，只有各点误差平方和最小，才能实现概率最大。这就是最小乘法值。由此可见，对于一组精度相同的观测值，采用算术平均得到的值是该组观测值的最佳值。

第二节　误差的传递

在实验中，对长度、重量、位移等物理量能直接测量，但对应力、弹性模量等物理量一般不能直接测量，必须通过一些能直接测量的物理量按一定公式计算求得。计算出的间接测量的结果具有一定的误差，如何由直接测量的误差计算间接测量的误差，这就是误差传递规律问题。

一、已知自变量误差求函数的误差

设函数 $y=f(X_1, X_2, \cdots, X_r)$，其自变量 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 为 r 个直接测量的物理量，其标准误差分别为 $S_1, S_2, \cdots, S_r$。

对 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 各作了 n 次测量，可算出 n 个 y 值：

$$y_i = f(X_{1i}, X_{2i}, \cdots, X_{ri})\quad i = 1,2,\cdots,n$$

每次测量的误差为

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\delta x_{1i} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\delta x_{2i} + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)\delta x_{ri}$$

两边平方得

$$\delta y_i^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \delta x_{1i}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \delta x_{2i}^2 + \cdots + 2\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\delta x_{1i}\delta x_{2i} + \cdots\quad i = 1,2,\cdots,n$$

由正负误差出现的概率相等，当 n 足够大时，将所有 δy_i^2 相加，则非平方项对消而得出：

$$\sum_{i=1}^{n}\delta y_i^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\delta x_{1i}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\delta x_{2i}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\delta x_{ri}^2$$

两边除以 n 再开方得标准误差得

$$S_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 S_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 S_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^2 S_r^2}\tag{2-2-1}$$

相对标准误差为

$$e_y = \frac{S_y}{y} = \sqrt{\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 S_1^2 + \left(\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 S_2^2 + \cdots + \left(\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^2 S_r^2} \tag{2-2-2}$$

例如

$$y = X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_r$$

因

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = X_2 \cdot X_3 \cdot \cdots \cdot X_r, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = X_1 \cdot X_3 \cdot \cdots \cdot X_r, \cdots, \quad \frac{\partial y}{\partial x_r} = X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_{r-1},$$

故

$$e_y = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_r^2} \tag{2-2-3}$$

式中，$e_1, e_2, \cdots, e_r$ 分别为 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 的相对标准误差。

二、已知函数误差求自变量的误差

通常当各实验测量值的误差难以估计时，可用等效传递原理即假定各自变量的误差对函数误差的影响相等来解决，用下式：

$$S_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 S_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) S_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right) S_r^2} = \sqrt{r\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 S_i^2} = \sqrt{r}\,\frac{\partial y}{\partial x_i} S_i \tag{2-2-4}$$

由此，各自变量误差为

$$S_1 = \frac{S_y}{\sqrt{r}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x_1}\right)}, S_2 = \frac{S_y}{\sqrt{r}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x_2}\right)}, \cdots, S_r = \frac{S_y}{\sqrt{r}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x_r}\right)} \tag{2-2-5}$$

例 2-2-1 一悬臂梁如图 2-2-1 所示，要求测量应力的误差不大于 2%，求各被测量集中力 P、臂长 l、截面宽 b、截面高 h 分别允许多大误差。

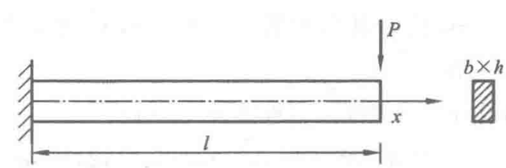

图 2-2-1 一悬臂梁受力示意图

解 梁的正应力公式

$$\sigma_x = \frac{M}{W} = \frac{6Pl}{bh^2} = f(P, l, b, h) = y$$

由式(2-2-4)，可得

$$r = 4$$

$$\frac{\partial y}{\partial P} = \frac{6l}{bh^2} = \frac{\sigma_x}{P}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial l} = \frac{6P}{bh^2} = \frac{\sigma_x}{l}$$

$$\frac{\partial y}{\partial b} = -\frac{6Pl}{b^2h^2} = -\frac{\sigma_x}{b}, \quad \frac{\partial y}{\partial h} = -\frac{12Pl}{bh^3} = -\frac{2\sigma_x}{h}$$

现要求 $S_\sigma = \pm 0.02\sigma_x$，即 $\frac{S_\sigma}{\sigma_x} = \pm 2\%$，则

$$S_P=\frac{S_\sigma}{\sqrt{r}\,\dfrac{\partial y}{\partial P}}=\frac{\pm 0.02\sigma_x}{2\sigma_x/P}=\pm 0.01P$$

$$S_l=\frac{S_\sigma}{\sqrt{r}\,\dfrac{\partial y}{\partial l}}=\frac{\pm 0.02\sigma_x}{2\sigma_x/l}=\pm 0.01l$$

$$S_b=\frac{S_\sigma}{\sqrt{r}\,\dfrac{\partial y}{\partial b}}=\frac{\pm 0.02\sigma_x}{2(-\sigma_x/b)}=\pm 0.01b$$

$$S_h=\frac{S_\sigma}{\sqrt{r}\,\dfrac{\partial y}{\partial h}}=\frac{\pm 0.02\sigma_x}{2(-2\sigma_x/h)}=\pm 0.005h$$

第三节　实验数据处理

一、有效数字

在表达一个数量时，其中的每一个数字都是准确的、可靠的，而只允许保留最后一位估计数字，这个数量的每一个数字为有效数字。

测量结果的数值几乎都是近似数(计数测量例外)。近似数使用有效数字表示。有效数字通常取几位准确数字(高位)加一位估计数字(最低位)组成。准确数字加估计数字的位数总和，称为测量度数的有效数字的位数，或说几位有效数字。工程上常取三或四位有效数字，但对于高精度测量，可能取五六位有效数字或更多。

该类数量末一位数字往往是估计得来的，具有一定的误差和不确定性。例如，用千分尺测量试样的直径，读得 10.47 mm，其中百分位是 7，因千分尺的精度 0.01 mm，所以百位上的 7 已不大准确，而前三位数肯定准确的、可靠的，最后一位数字已带有估计的性质，所以对于测量结果，只允许保留最后一位不准确数字，这是一个四位的有效数字的数量。然而，对于某些理论计算，如 1/3 和 $\sqrt{2}$ 可以根据需要计算到任意位数的有效数字。如 π 可以取 3.14、3.141、3.1415、3.141 59 等。故这一类数量，其有效数字是无限的。

在数据有效数字的判定中，0 是一个必须重点关注的问题。一个数据，其中除了起定位作用的 0 外，其他数字 0 都是有效数字。

0 在数字之间与末尾时均为有效数字。如 15.40 mm、10.08 mm，其中出现的 0 都是有效数字。

小数点前面出现的 0 和它之后紧接着的 0 都不是有效数字。例如，在测量一个杆件长度时得到 0.003 20 m，这时前面三个 0 均非有效数字，因此这些 0 只与所取的单位有关，而与测量精确度无关，该值为 3.20 mm，固有效数字是三位。

对于指数表示法，例如，12 000 无法确定是几位有效数字。若写成 1.2×10^4，表示有效数字为两位，若写成 1.20×10^4，则表明有效数字为三位。此例表明当没有小数时，为