"十二五"应用型本科系列规划教材

线性代数

Linear Algebra

侯亚君 总主编

艾 玲 沙 萍 林洪娟 主 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十二五”应用型本科系列规划教材

线性代数

总主编　侯亚君
主　编　艾　玲　沙　萍　林洪娟
参　编　王晓光　张有君　赵伟丽

机械工业出版社

本书是线性代数课程教材，主要特点是注重代数概念与理论的背景和应用的介绍，加强数学软件在课程教学中的作用，引入知识纵横．内容包括行列式、矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型，以及与这些内容相应的数学实验．各章后配有适量习题，书后有部分习题答案．

本书适合应用型本科各专业使用，也可作为科研人员的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/侯亚君总主编；艾玲，沙萍，林洪娟主编．—北京：机械工业出版社，2012.1

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-36843-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①侯…②艾…③沙…④林… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第264364号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 昔玉花
版式设计：张世琴 责任校对：张 媛
封面设计：路恩中 责任印制：杨 曦
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2012年2月第1版第1次印刷
184mm×240mm·12.5印张·246千字
标准书号：ISBN 978-7-111-36843-4
定价：26.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	门户网：http：//www.cmpbook.com
销售一部：(010)68326294	
销售二部：(010)88379649	教材网：http：//www.cmpedu.com
读者购书热线：(010)88379203	封面无防伪标均为盗版

前　　言

本套数学基础课教学改革丛书包括《线性代数》、《概率论与数理统计》、《微积分(经济类)》三种教材，改革思路一致，体例统一，风格相似.

目前在数学基础课教学采用的教材中，纯粹的数学问题多，应用问题少；抽象、经典的内容多，直观、现代的内容少，造成了教材和教学目标有偏差.

本套教材试图尝试针对专业需求，注重直观和学生亲身实践的思路，强调教材的针对性、实用性和趣味性. 内容的安排遵循"量力"和"循序渐进"原则；概念的引入力求朴实、简明和自然，尽可能从简单问题引入；定理的证明尽可能做到严谨，但强调理论证明与直观说明并重，突出数学的思想和方法. 数学应用方面，强调与专业知识结合，与计算机手段结合. 本套教材的主要特色是：

1. 把数学软件 MATLAB 引入教材. 在实践中数学问题的解决往往要借助计算机，为了使学生既能通过计算机编程来亲身体验数学知识，又不至于被繁琐的程序编写羁绊，我们选择了数学编程简单而高效的 MATLAB，作为计算机手段引入课堂教学. 为了使学生对 MATLAB 的使用有初步的了解以及加强对相关知识的理解和运用，教材在每章后面都加入了数学实验的内容，要求学生以 MATLAB 为工具完成数学实验. 这部分内容可根据学时看是安排在正常课堂教学内，还是另外安排时间或者课后练习.

2. 引入知识纵横，加强数学教材的趣味性. 每章后我们加入知识纵横，内容丰富而灵活，既有数学简史，又有相关内容的延伸，还有数学家小传等. 这些内容为学生课外阅读提供一种引导，旨在调动学生对数学知识背后的历史和文化的兴趣，促使学生主动阅读其他的相关文献.

本册《线性代数》以矩阵为主线，在对矩阵的基本理论学习的基础上，完成对线性方程组求解、向量组的线性相关性判别、矩阵相似对角化以及二次型的化简等问题的学习. 本书注重理论联系实际，加强实际应用，并在每章中选配难易适中的应用实例，力求拓宽学生的视野和培养学生应用代数知识解决实际

问题的能力.

全书共分为5章，第1章行列式、第5章相似矩阵及二次型以及各章的数学实验部分由艾玲组织编写，第2章矩阵、第3章线性方程组、第4章向量组的线性相关性由沙萍组织编写，各章的知识纵横部分由林洪娟组织编写.

由于编者水平有限，书中疏漏与不足之处在所难免，恳请广大读者、专家和同行批评指正.

编　者

目　录

第1章

行 列 式

行列式的理论起源于解线性方程组，是一个重要的数学工具，在数学的许多分支及其他学科的研究中都有广泛的应用.

本章主要在二、三阶行列式的基础上，建立起 n 阶行列式的理论：n 阶行列式的定义、性质和计算方法，最后将介绍用行列式解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1 全排列及其逆序数

为了给出 n 阶行列式的概念，这里先引入有关全排列的知识.

定义 1.1 把 n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的**全排列**，简称**排列**.

例如，自然数 1，2，3 构成的所有排列有 $3!=6$ 种，其中任一排列记为 $p_1p_2p_3$，它们是：

$$123,\ 231,\ 312,\ 132,\ 213,\ 321.$$

显然，n 个不同的元素构成的所有排列有 $n!$ 种.

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序).

定义 1.2 设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数 1，2，…，n 的一个排列，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有 1 个**逆序**. 排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

例如，在排列 321 中，构成逆序的数对有 32，31，21，因此此排列的逆序数 $t=3$.

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如，排列 321 为奇排列，标准排列 $123\cdots(n-1)n$ 的逆序数 $t=0$，为偶排列.

按照逆序数的定义，求逆序数的关键是数对逆序的总数，我们可以从排列的右边算起，计算出一共有多少个大数排列在小数的前面.

例 1.1 求排列 32514 的逆序数.

解 4 前面有 5 比 4 大；1 前面有 3，2，5 三个大于 1 的数；2 前面有 3 比 2 大，此外再没有大数排在小数前面了，于是这个排列的逆序数为

$$t=1+3+0+1+0=5.$$

下面讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系.

定义 1.4 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的方式称为**对换**．将相邻两个元素对换，称为**相邻对换**.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$．显然 a，b 以外的数彼此间的逆序情况在两个排列中是一样的，a，b 以外的数与 a 或 b 的逆序情况在两个排列中也是一样的．现在看 a，b，若 $a<b$，则经对换后，逆序数增加 1，即后一排列的逆序数比前一排列多 1；若 $a>b$，则经对换后，逆序数减少 1，即后一排列的逆序数比前一排列少 1. 所以无论哪种情形，都改变了排列的奇偶性.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_lb_1\cdots b_mabc_1\cdots c_n$，再作 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$，总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1.1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列，因此知推论成立.

1.2 行列式的定义

1.2.1 二阶与三阶行列式

二阶行列式是在二元线性方程组的求解中提出的．设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

用消元法可得，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，该方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

式(1-2)中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得．其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$是由方程组(1-1)的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组(1-1)中的位置，排成二行二列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1-3}$$

定义 1.5 表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为数表(1-3)所确定的**二阶行列式**，并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1-4}$$

数 $a_{ij}(i=1, 2; j=1, 2)$称为行列式(1-4)的**元素**或**元**．元素 a_{ij}的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列．位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1-4)的(i, j)元.

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆．参看图 1-1，把 a_{11}到 a_{22}的实连线称为主对角线，a_{12}到 a_{21}的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

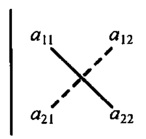

图 1-1

利用二阶行列式的概念，式(1-2)中 x_1，x_2 的分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}b_2-b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，方程组(1-1)的解可以写成便于记忆的形式

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组(1-1)的系数所确定的二阶行列式(称系数行列式)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21}所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22}所得的二阶行列式.

例 1.2 求解二元线性方程组

$$\begin{cases}3x_1-2x_2=12,\\2x_1+\ \ x_2=1.\end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix}3&-2\\2&1\end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}12&-2\\1&1\end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&12\\2&1\end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此 $$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

例 1.3 在 Oxy 面上有一个平行四边形 $OACB$，A，B 两点的坐标分别为 (a_1,b_1)，(a_2,b_2)，如图 1-2 所示，求平行四边形 $OACB$ 的面积.

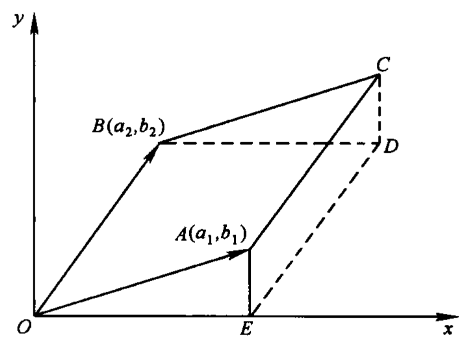

图 1-2

解 过点 A 作 x 轴的垂线，交 x 轴于点 E；过点 B 作平行于 x 轴的直线，与过点 C 作的平行于 y 轴的直线相交于点 D. 显然可以得到三角形 CDB 和三角形 AEO 全等，则有

$$\begin{aligned}S_{OACB}&=S_{OEDB}+S_{CDB}-S_{AEO}-S_{AEDC}\\&=S_{OEDB}-S_{AEDC}=a_1b_2-a_2b_1\\&=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

一般地，可以证明：过原点的两个几何向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 所构成的平行四边形的面积，等于 A，B 两点坐标所构成的二阶行列式的绝对值.

类似地，在三元线性方程组的求解中引出三阶行列式的定义.

定义 1.6 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{matrix}\tag{1-5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1\text{-}6)$$

式(1-6)称为数表(1-5)所确定的**三阶行列式**.

上述定义表明三阶行列式含6项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循图1-3所示的对角线法则：图中有三条实线看做是平行于主对角线的连线，三条虚线看做是平行于副对角线的连线，实线上三个元素的乘积取正号，虚线上三个元素的乘积取负号.

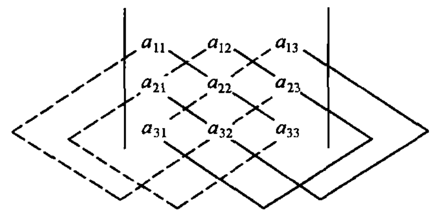

图 1-3

例 1.4 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，有

$$D = 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) \times 4 - 1 \times 1 \times 4 - 2 \times (-2) \times (-2) - (-4) \times 2 \times (-3) = -14.$$

例 1.5 求一个二次多项式 $f(x)$，使 $f(1) = 0$，$f(2) = 3$，$f(-3) = 28$.

解 设所求的二次多项式为 $f(x) = ax^2 + bx + c$，依题意得线性方程组

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ 4a + 2b + c = 3, \\ 9a - 3b + c = 28. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -20 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 28 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -40,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 9 & 28 & 1 \end{vmatrix} = 60, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & -3 & 28 \end{vmatrix} = -20.$$

于是得 $a = \dfrac{D_1}{D} = 2$，$b = \dfrac{D_2}{D} = -3$，$c = \dfrac{D_3}{D} = 1$，即 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

从以上讨论自然会想到，对于 n 个未知数 n 个线性方程的方程组，它的解是否也能用 n 阶行列式来表示呢？若能，如何来定义 n 阶行列式呢？显然，当 n 较大时用上述类似的消元法是无法推导的．注意：对角线法则只适用于二阶与三阶行列

式．解决的思路是：观察三阶行列式的表达式，寻找新的规律，然后按这些规律来定义 n 阶行列式．

1.2.2 n 阶行列式的定义

观察三阶行列式的表达式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1-7}$$

容易看出：

（1）式(1-7)右边的每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积．所以任一项除正负号外都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 的形式，其中第一个下标(行标)排成标准次序 123，第二个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$，它是 1，2，3 三个数的某个排列．这样的排列共有 6 种，对应式(1-7)右端共含 6 项．

（2）各项的正负号与列标的排列对照．

带正号的三项列标排列是 123，312，231；

带负号的三项列标排列是 321，213，132.

经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列．因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数.

综上分析，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中，t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，Σ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此，可以把行列式推广到一般情形.

定义 1.7 设有 n^2 个数排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

做出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1-8}$$

的项，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1，2，…，n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数．由于这样的排列共 $n!$ 个，因而形如式(1-8)的项共有 $n!$ 项．所有这 $n!$ 项的代

数和

$$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为**n 阶行列式**，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij}称为行列式 D 的(i,j)元.

显然，定义式的任一项还可以写成$(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$形式，因此，$n$ 阶行列式也可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1，2，…，n 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 取和.

按此定义的二阶、三阶行列式，与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆.

例 1.6 证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & ⋰ & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中未写出的元素都是 0.

证 第一式左端称为对角行列式，其结果是显然的，下面只证第二式.

在第二式左端中，λ_i 为行列式的$(i,n-i+1)$元，故记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^t \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中 t 为列标排列为 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，故

$$t = (n-1)+(n-2)+\cdots+1+0 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

例如，$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{4\times 3}{2}} 1\times 2\times 3\times 4 = 24,$

表明四阶行列式的计算不再遵循对角线法则.

主对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做上(下)三角形行列式，它的值与对角行列式一样.

例 1.7　证明下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证　由于当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为零的元素 a_{ip_i}，其下标必满足 $p_i \leqslant i$，即 $p_1\leqslant 1$，$p_2\leqslant 2$，…，$p_n\leqslant n$. 在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个标准排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，逆序数 $t=0$，所以结论成立.

1.3　行列式的性质

直接用行列式的定义来计算较高阶的行列式，往往是比较繁琐的，因此，我们从行列式的定义出发，推导出行列式的一些性质，以简化行列式的计算. 这些性质在行列式的理论研究中也有着非常重要的作用.

定义 1.8　记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质1 行列式与它的转置行列式相等.

证 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式为 $D^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，按定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=D.$$

故
$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

由此性质可知，行列式中行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的，对列也同样成立，反之亦然.

性质2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

证 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由 $D=\det(a_{ij})$ 交换 i, j 两行而得到的，即当 $k\neq i, j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i, j$ 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，于是

$$\begin{aligned} D_1 &=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

其中，$1\cdots i\cdots j\cdots n$ 是标准排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数．设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则有 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$，故

$$D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列．交换 i, j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i, j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 若行列式中有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

证 把这两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

第 i 行(或列)乘以 k，记作 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$).

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

第 i 行(或列)提出公因子 k，记作 $r_i \div k$(或 $c_i \div k$).

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素对应成比例，则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上(记作 c_i+kc_j)，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_i+kc_j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(i\neq j).$$

(以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j)

以上诸性质请读者证明之.

性质 2，3，6 介绍了行列式关于行和列的三种运算，即 $r_i\leftrightarrow r_j$，$r_i\times k$，r_i+kr_j 和 $c_i\leftrightarrow c_j$，$c_i\times k$，c_i+kc_j，利用这些运算可简化行列式的计算，特别是利用运算 r_i+kr_j(或 c_i+kc_j)可以把行列式中许多元素化为 0. 计算行列式常用的一种方法就是利用运算 r_i+kr_j 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值. 请看下例.

例 1.8 计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\1&-5&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&1&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-8&4&-6\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&0&\frac{5}{2}\end{vmatrix}=40.$$

注意 为避免麻烦的分数四则运算，第一步先交换第1，2两列使得(1,1)位置变成1，这是常用技巧.

例1.9 计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}.$$

解 这个行列式的特点是各列4个数之和都是6. 先把第2，3，4行都加到第1行，再提出公因子6，然后各行减去第1行：

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\div 6}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$