应用型本科院校规划教材/工科数学学习指导丛书

孔繁亮　主编

线性代数学习指导

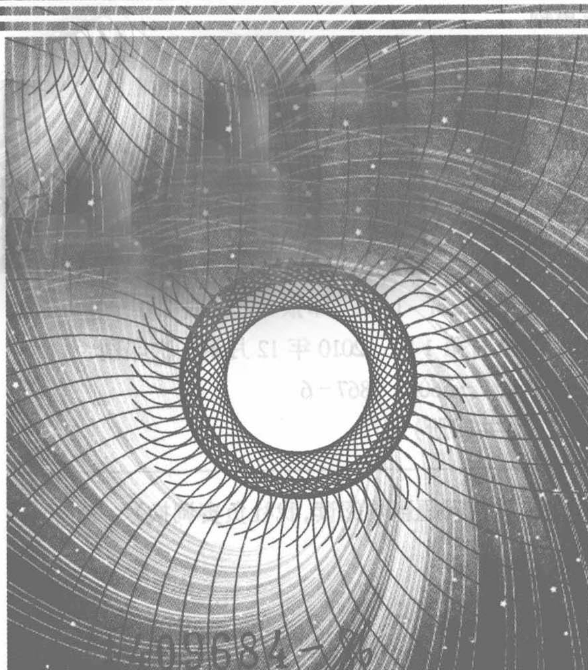
A Guide to the Study of Linear Algebra

哈爾濱工業大學出版社

主　编　孔繁亮
副主编　王剑飞　王礼萍　高恒嵩

线性代数学习指导

A Guide to the Study of Linear Algebra



哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书是应用型本科院校规划教材工科数学学习指导丛书之一，它是孔繁亮教授主编的《线性代数》教材相配套的学习指导书。内容包括：行列式，矩阵，n 维向量和线性方程组，相似矩阵及二次型等。每章都编写了以下五方面的内容：内容提要，典型题精解，同步题解析，验收测试题，验收测试题答案。还编写了五套自测习题，并附有答案。叙述详尽，通俗易懂。

本书可供应用型本科院校相关专业学生使用，也可作为教师与工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/孔繁亮主编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.11
（工科数学学习指导丛书）
应用型本科院校规划教材
ISBN 978-7-5603-2867-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①孔… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 234716 号

策划编辑 赵文斌 杜 燕
责任编辑 王勇钢
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 8 字数 170 千字
版 次 2010 年 12 月第 1 版 2010 年 12 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2867-6
定 价 80.00 元(共四册)

序

哈尔滨工业大学出版社策划的“应用型本科院校规划教材”即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的“应用型本科院校规划教材”，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神，根据黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用

讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的PPT多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

“应用型本科院校规划教材”的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

前　　言

为了加强学生的自学能力、分析问题与解决问题能力的培养，加强对学生的课外学习指导，我们编写了这套学习指导书。这套学习指导书是与应用型本科院校数学系列教材相匹配的。

本书是与孔繁亮教授主编的《线性代数》教材相配套的学习指导书。内容包括：行列式，矩阵，n 维向量和线性方程组，相似矩阵及二次型等。每章都编写了以下五方面的内容：内容提要，典型题精解，同步题解析，验收测试题，验收测试题答案。在最后编写了五套自测习题，并附有答案。叙述详尽，通俗易懂。

本书由孔繁亮教授任主编，王剑飞、王礼萍、高恒嵩任副主编。在编写过程中参阅了我们以往教学过程中积累的有关资料和兄弟院校的相关资料，在此一并表示感谢。

建议读者在使用本书时，不要急于参阅书后的答案，首先要独立思考，多做习题，尤其是多做基础性和综合性习题，这对掌握教材的理论与方法有着不可替代的作用。希望本书能在你解题山重水复疑无路之时，将你带到柳暗花明又一春的境界，引导你不断地提高自学能力、分析问题与解决问题的能力。

由于时间仓促，水平有限，书中难免存在不当之处，敬请广大读者不吝指教。

编　　者

2010 年 9 月

目　　录

第 1 章

行列式

1.1　内容提要

1.1.1　n 阶行列式的定义

由 n^2 个数排成 n 行 n 列，得到如下算式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

称之为 n 阶行列式.其中

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

1.1.2　余子式与代数余子式

n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素，余下的元素按照原来位置构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，称 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

1.1.3　行列式的展开定理

n 阶行列式等于它任意一行(列)的所有元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=$$
$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$
$$i,j=1,2,\cdots,n$$

1.1.4 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等.

(2) 互换行列式的两行(列), 行列式变号.

(3) 如果行列式有两行(列) 完全相同 , 则此行列式等于零.

(4) 设有 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$$

(5) 行列式的某一行(列) 中所有元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘以此行列式.

(6) 如果行列式有两行(列) 元素成比例, 则此行列式等于零.

(7) 如果行列式的某一行(列) 元素都是两个数之和, 例如第 i 行的元素都是两个数之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

那么 D 等于下列两个行列式之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(8) 如果行列式的某一行(列) 元素都乘以同一个数然后加到另一行(列) 对应的元素上去,行列式不变.

1.1.5　克莱姆法则

n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ 时,对应的方程组称为齐次线性方程组.

请注意:(1) 克莱姆法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组.

(2) n 元非齐次线性方程组, 当系数行列式 $D \neq 0$ 时有唯一解;当系数行列式 $D = 0$ 时,克莱姆法则失效,方程组可能有解也可能无解.

(3) n 元齐次线性方程组, 当系数行列式 $D \neq 0$ 时只有零解;当系数行列式 $D = 0$ 时有非零解.

1.2　典型题精解

本章的主要问题是行列式的计算问题. 行列式的计算方法如下:

(1) 直接利用行列式的定义计算.

(2) 利用行列式的性质将其化为三角形行列式来计算.

(3) 利用行列式的性质将其化为较低阶的行列式来计算.

(4) 利用行列式的性质将一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶的行列式, 然后根据此关系式递推求得所给的 n 阶行列式.

(5) 利用数学归纳法进行计算或证明.

(6) 利用已知行列式进行计算,其中最重要的已知行列式是范德蒙德行列式.

例 1 计算三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}\quad(\alpha\neq\beta)$$

解 按第一列展开得到

$$D_n=(\alpha+\beta)\cdot\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}+$$

$$\beta\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}=$$

$$(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}\quad(n\geqslant 3)$$

可见

$$D_1=\alpha+\beta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\\ \beta & \alpha+\beta\end{vmatrix}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$$

假设 $D_{n-1}=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$,则有

$$D_n=5D_{n-1}-6D_{n-2}D_{n-1}=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}=$$

$$\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

由数学归纳法知

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

行列式

$$\begin{vmatrix}5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 3 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 3 & 5 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 5\end{vmatrix}$$

即是上述特例.

例2 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$$

将第 $i+1(i=1,2,\cdots,n)$ 列的 $-\frac{c_i}{a_i}$ 倍加到第一列上,得到

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}=$$

$$a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)$$

形如

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

及

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \quad (a_1a_2\cdots a_n \neq 0)$$

的行列式通过简单变形,也可转化为具有上述特征的行列式.

1.3 同步题解析

1.(1)0,0 (2) -6 (3) $\pm 1, \pm 2$ (4) 1 或 -2 (5) 3×2^n

2.CBAA

3.用定义计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

(1) 根据三阶行列式的定义

$$\text{原式} = 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

(2) 根据 n 阶行列式的定义

$$\text{原式} = 1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-2)\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \cdots =$$

$$(-1)^n n!$$

4.(1) 可得

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

(2) 可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a_1 & 1+a_2 & 1+a_3 & 1+a_4 \\ a_1+a_1^2 & a_2+a_2^2 & a_3+a_3^2 & a_4+a_4^2 \\ a_1^2+a_1^3 & a_2^2+a_2^3 & a_3^2+a_3^3 & a_4^2+a_4^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1+a_1^2 & a_2+a_2^2 & a_3+a_3^2 & a_4+a_4^2 \\ a_1^2+a_1^3 & a_2^2+a_2^3 & a_3^2+a_3^3 & a_4^2+a_4^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^2+a_1^3 & a_2^2+a_2^3 & a_3^2+a_3^3 & a_4^2+a_4^3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{4 \geqslant i > j \geqslant 1} (a_i - a_j)$$

5.(1) 由已知,有

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b^2-a^2 & b^2(b-a) \\ 1 & c^2-a^2 & c^2(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b+a & b^2 \\ 1 & c+a & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & b^2 \\ c+a & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ac) =$$

$$(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(2) 由已知有

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0-y \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} =$$

$$xy^2 + x\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

同理

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = -y^2 - x\begin{vmatrix} 1+y & 1 \\ 1 & 1-y \end{vmatrix} = -y^2 + xy^2$$

于是

$$原式 = x^2y^2$$

6.(1) 可得

$$D_n = [3+(n-1)]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix} =$$

$$(n+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 2^{n-1}\cdot(n+2)$$

(2) 可得

$$D_n = [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} =$$

$$[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} =$$

$$(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$$

(3) 按第一列展开得到