

金融数学

JINRONG SHUXUE

李晓红 朱 婧 编著
赵秀芳 堵秀凤



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

金融数学

李晓红 朱 婧 赵秀芳 堵秀凤 编著

北京航空航天大学出版社

BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

全书共 11 章。第 1 章是金融数学的形成与发展的简介。第 2 章是利率基本理论的介绍。第 3 章~第 6 章是本书核心部分,主要是,年金基本计算、投资收益理论、本息分离技术、债券和股票的基本理论和定价及利率期限结构。第 8、9 章是利率风险和实际问题分析。第 9、10 章是金融衍生工具及其定价理论。第 11 章是用 Excel 软件求解金融问题技术。本书可供高等院校、数学类,经济、金融类专业本科教学用书。适度删繁就简,也可供专科教学使用。本书也可供培训、应试使用。

图书在版编目(CIP)数据

金融数学 / 李晓红等编著. --北京:北京航空航天大学出版社,2012.1

ISBN 978-7-5124-0653-7

I. ①金… II. ①李… III. ①金融—经济数学 IV.
①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 247238 号

版权所有,侵权必究。

金融数学

李晓红 朱 婧 赵秀芳 堵秀凤 编著

责任编辑 许传安

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

北京时代华都印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:10 字数:256 千字

2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月第 1 次印刷 印数:2 500 册

ISBN 978-7-5124-0653-7 定价:20.00 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前言

美国花旗银行副总裁柯林斯说过：“在 18 世纪初，和牛顿同时代的著名数学家伯努利曾宣称：‘从事物理学研究而不懂数学的人实际上处理的是意义不大的东西。’那时候，这样的说法对物理学而言是正确的，但对于银行业而言不一定是正确的。在 18 世纪，可以没有任何数学训练却能很好地运作银行。如今，过去对物理学而言是正确的说法对于银行业也正确了。于是现在可以这样说：‘从事银行业工作而不懂数学的人实际上处理的是意义不大的东西。’花旗银行 70% 的业务依赖于数学。如果没有数学发展起来的工具和技术，许多事情我们是一点办法也没有的……没有数学我们不可能生存。”

所谓金融数学(financial mathematics)，是利用数学研究金融，进行数学建模、理论分析、数值计算等定量分析，以求找到金融学内在规律，并用以指导实践的一门交叉学科。金融数学一经产生，就显示出其强大的生命力，它使得金融学由定性分析向定性与定量分析相结合的转变；由规范研究为主向实证研究为主转变；由理论阐述向理论与实用研究并重转变；由金融模糊决策向精确化决策转变。

1905 年“投机理论”被人们所重视，并开始全面研究。由此金融数学迎来了发展的全盛时期。现代金融数学是在两次“华尔街革命”的背景中成长发展起来的：1952 年，哈里·马柯维兹在《金融杂志》上发表了一篇题为《投资组合选择》的论文，首开现代金融数学的先河，在理论界被称为第一次金融革命；1973 年，费希尔·布莱克和迈伦·斯科尔斯提出了布莱克-斯科尔斯期权定价模型，被理论界和实业界广泛接受和使用，成为发生在金融领域的又一次革命。此后，罗伯特·默顿发展了期权定价模型，默顿和斯科尔斯也因此在 1997 年获得诺贝尔经济学奖。

我国的金融数学研究开始于 1993 年。其标志是 1993 年初，彭实戈教授在国家自然科学基金委举办的一次“七五”研究成果报告会上所作的关于《倒向随机微分方程研究及其在金融中的应用》的报告。1997 年基金委员会的重大项目“金融数学、金融工程和金融管理”正式立项实施。北京大学于 1997 年率先在国际上设立了第一个以金融数学命名的大学本科系。南开大学、武汉大学、山东大学等著名国内高等院校相继设立了金融数学本科专业或硕士、博士专业。

本书以北美精算师协会考试大纲为主线展开，全书共分 11 章。第 1 章简要介绍金融数学的形成与发展。第 2 章介绍利率基本理论及其计算，是全书的理论基础。第 3, 4, 5, 6 章介绍各类年金的基本计算、投资收益理论以及本息分离技术、债券和股票的相关理论和计算。这 4 章是本书的核心部分，是利率理论最直接的应用。第 7, 8 章介绍利率风险、利率期限结构理论、资本资产定价理论和套利定价理论。第 9, 10 章介绍金融衍生工具的相关理论和定价公式，是后续课“金融工程”的基础。第 11 章介绍 Excel 软件在金融数学计算中的应用。

本书具有以下五方面特点：一是体系完整，条理清楚，结构严谨，系统地介绍了金融数学的基本理论、基本方法，展示了金融数学理论及实践的最新发展趋势和研究成果。二是考虑读者的适用范围和接受程度，在普及性和广泛适用性上下功夫，尽量简化公式推导；语言上尽量通

俗易懂,利于教师讲授和读者自学。三是针对金融数学中计算比较繁琐的特点,采用 Excel 软件作为辅助工具,将其强大的函数功能与金融数学中相关计算紧密结合,使读者在进行相关计算时,降低了学习难度,简化了计算程序,提高了计算准确性。四是在某些章节后增加了必要的理论背景材料、相关科学家的生平以及对实际问题的分析,帮助读者拓展理论视野和加深对理论的理解。五是编写时参考北美精算师协会考试的主要参考书,紧扣知识点遴选例题、习题,在每章末给出知识点总结,并在本书最后给出部分课后习题答案,便于读者学习、复习。

金融数学作为新兴学科,在我国起步较晚,国内相关教材较少,并且现有教材大多数理论性较强,对读者要求有较深的数学功底,一般适用于数学专业高年级学生和研究生课程。本书的内容,是编者们多年来在金融数学课程教学实践中不断积累而形成的成果。本书的原型是金融数学课程的讲义,得到齐齐哈尔大学教材资助项目的支持。本书可供金融学、应用数学专业的金融数学、精算学和金融工程方向的本、专科学生作为教材使用,也适用于读者自学,还可以作为精算师考试及相关考试的复习参考书和金融学、经济学及相关专业从业人员定量分析金融问题的基础性参考书和培训教材。

在本书结稿之际,感谢所有关心和支持我们写作和出版此书的人们。由于我们的专业水平和对资料掌握程度有限,本书如有不足之处,恳请同仁及广大读者指正。

编著者

2011 年 8 月

第1章 金融数学引论	1	3.2.5 年金利率的近似计算	24
1.1 金融数学概述	1	3.3 广义年金	25
1.2 金融数学的发展	1	3.3.1 一般广义年金的计算步骤	25
1.3 金融数学研究的意义	3	3.3.2 年金终值和现值的关系	25
1.4 金融数学研究的前沿问题	4	3.3.3 付款周期为利息换算周期整数倍 的年金	25
1.4.1 随机最优控制理论	4	3.4 变额年金	27
1.4.2 鞅理论	4	3.4.1 递增年金	27
1.4.3 微分对策理论	4	3.4.2 递减年金	29
1.4.4 其他智能化方法及实证方法	4	3.4.3 比例变额年金	29
1.4.5 最优停时理论	4	3.5 年金应用	30
1.4.6 突发事件	5	3.5.1 银行按揭贷款	30
本章小结	5	3.5.2 养老金计划	30
课后练习	5	3.5.3 分期付款	31
阅读材料	5	3.5.4 其他实例	31
第2章 利率及利息计算	10	本章小结	31
2.1 利率	10	阅读材料	32
2.1.1 单利和复利	10	课后练习	33
2.1.2 单利方式和复利方式的区别	10	第4章 投资收益分析	35
2.1.3 名义利率和实际利率	11	4.1 常用的基本分析方法	35
2.2 实际金融问题分析	14	4.1.1 收益率	35
2.2.1 提前支取的处罚	14	4.1.2 收益率法	36
2.2.2 汇 票	14	4.1.3 净现值方法(简称 NPV 法)	36
2.3 贴现率	15	4.1.4 未结价值法	37
2.3.1 终值和现值	15	4.2 收益率计算	38
2.3.2 贴现率的定义	15	4.2.1 资本加权法	38
2.3.3 关于贴现率的几点说明	15	4.2.2 时间加权法	39
2.3.4 利率和贴现率的关系	15	4.3 再投资分析	41
本章小结	16	本章小结	42
课后练习	16	课后练习	42
第3章 年 金	18	第5章 债务偿还分析	44
3.1 年金的定义及其分类	18	5.1 等额摊还法	44
3.2 基本年金	19	5.1.1 未偿还本金余额的计算	44
3.2.1 期末年金	19	5.1.2 等额摊还法基本原理	45
3.2.2 期初年金	21	5.2 等额偿债基金法	45
3.2.3 递延年金	22	5.2.1 等额偿债基金法基本原理	45
3.2.4 永久年金	23		

5.2.2 偿债基金方式的收益率分析	47	第7章 利率风险	72
5.2.3 贷款利率变化的等额偿债基金法	47	7.1 影响利率水平的因素	72
5.3 变额摊还法	47	7.2 资产负债管理	75
5.4 变额偿债基金法	48	7.2.1 久期	75
本章小结	49	7.2.2 修正久期	76
阅读材料	50	7.2.3 有效久期	78
课后练习	51	7.2.4 凸性	78
第6章 债券和股票	52	7.2.5 免疫原理	79
6.1 债券概述	52	7.2.6 免疫原理存在的问题	80
6.1.1 债券的定义	52	7.3 久期在债券投资中的应用	81
6.1.2 债券的分类	52	7.3.1 利用久期控制利率风险	81
6.2 债券的定价	54	7.3.2 利用久期优化投资组合	81
6.2.1 短期债券基本定价	54	本章小结	81
6.2.2 中长期债券的定价公式	54	课后练习	82
6.3 债券收益率的计算	57	第8章 实际问题分析	83
6.4 债券属性对债券价格的影响	58	8.1 固定资产折旧分析	83
6.4.1 到期时间	58	8.1.1 直线法(平均年限法)	83
6.4.2 息票率	59	8.1.2 工作量法	83
6.4.3 通货膨胀调整	59	8.1.3 双倍余额递减法	84
6.4.4 税收待遇	59	8.1.4 年数总和法(年限合计法)	84
6.4.5 流动性	59	8.2 资本资产定价模型(CAPM)	85
6.4.6 发行人的信用	59	8.2.1 系统性风险的度量	86
6.5 特殊类型的债券	60	8.2.2 证券的期望收益率	87
6.5.1 早赎债券	60	8.2.3 CAPM 模型实证检验问题	87
6.5.2 永久债券	60	8.3 套利定价模型(APT)	88
6.6 普通股票	61	8.3.1 套利	88
6.6.1 普通股票概述	61	8.3.2 APT 的基本假设	89
6.6.2 股息贴现模型	62	8.3.3 因子模型	89
6.6.3 股息贴现模型的应用	64	8.3.4 APT 模型	89
6.7 优先股票	65	8.4 CAMP 模型与 APT 模型的不同	90
6.8 卖空和买空	65	8.5 无套利定价原理	91
本章小结	66	本章小结	91
阅读材料 1: 国库券	67	课后练习	92
阅读材料 2: 垃圾债券	68	第9章 金融衍生产品——金融远期、 期货和互换	93
阅读材料 3: “垃圾债券”之父—— 迈克尔·米尔根	69	9.1 金融远期合约概述	93
课后练习	70	9.1.1 金融远期合约的定义	93
		9.1.2 金融远期合约的种类	93
		9.1.3 远期合约的交易机制	94

9.1.4 远期合约的优缺点	94	10.2.1 期权价格的影响因素	115
9.2 金融期货合约概述	94	10.2.2 布莱克-斯科尔斯-默顿期权定价模型	116
9.2.1 金融期货合约的定义	94	10.2.3 看涨期权与看跌期权之间的平价关系	118
9.2.2 期货合约的分类	94	10.2.4 B-S-M 期权定价公式	119
9.2.3 期货合约的产生与发展	95	本章小结	120
9.2.4 期货市场的交易机制	95	阅读材料	121
9.3 远期与期货的不同之处	96	课后习题	122
9.4 远期合约的定价	96	第 11 章 Excel 软件在金融数学计算中的应用	123
9.4.1 远期价值、远期价格与期货价格	97	11.1 Excel 软件在利息计算中的应用	123
9.4.2 无收益资产远期合约的定价	97	11.1.1 单利终值和现值的计算	123
9.4.3 支付已知现金收益资产远期合约的定价	98	11.1.2 复利终值和现值的计算	124
9.4.4 支付已知收益率资产远期合约的定价	99	11.2 Excel 软件在年金终值和现值计算中的应用	125
9.5 互换概述	99	11.2.1 PMT 函数	125
9.5.1 比较优势	99	11.2.2 PV 函数	126
9.5.2 互换的种类	100	11.2.3 FV 函数	127
9.5.3 互换市场的起源和发展	101	11.2.4 NPER 函数	128
9.5.4 利率互换	101	11.3 Excel 软件在收益分析中的应用	128
9.5.5 货币互换	102	11.3.1 IRR 函数	128
9.6 互换的定价	102	11.3.2 NPV 函数	130
9.6.1 协议签订后的利率互换定价	102	11.4 Excel 软件在本息分离计算中的应用	130
9.6.2 货币互换的定价	103	11.4.1 PPMT 函数	130
本章小结	103	11.4.2 IPMT 函数	131
阅读材料	104	11.5 Excel 软件在固定资产折旧中的应用	132
课后习题	105	11.5.1 SLN 函数	132
第 10 章 金融衍生产品——期权	107	11.5.2 DDB 函数	132
10.1 期权概述	107	11.5.3 SYD 函数	133
10.1.1 期权的分类	107	部分参考答案	134
10.1.2 期权合约的要素	109	附 录	142
10.1.3 期权的交易机制	110	参考文献	151
10.1.4 期权的产生与发展	113		
10.1.5 期权与期货交易的区别	114		
10.2 期权定价	115		

第 1 章

金融数学引论



1.1 金融数学概述

要了解什么是金融数学,必须从金融谈起。所谓金融,简单来说就是资金的融通,是货币流通和信用活动以及与之相联系的经济活动的总称。广义的金融泛指一切与信用货币的发行、保管、兑换、结算、融通有关的经济活动,甚至包括金银的买卖;狭义的金融专指信用货币的融通。金融学是以上述经济活动为研究对象,以发现其中的一些本质规律为研究目的的一门学科。20 世纪的金融学本身由于金融实践的迅猛发展和不断创新而逐渐成为有生命力的学科,尤其是 20 世纪以后的几十年,它越来越多地表现出与数学的交融。一方面人们迫切地希望运用适当的数学方法定量地解决金融问题;另一方面金融中不断涌现的现实问题也为数学和统计学的发展提出了理论上的研究方向。这样的一种现实使得金融与数学逐渐成为一个新的交叉领域,并发展成了一门学科——金融数学。

所谓金融数学(financial mathematics),是利用数学工具研究金融,进行数学建模、理论分析、数值计算等定量分析,以求找到金融学内在规律,并用以指导实践的一门学科。金融数学一经产生,就显示出其强大的生命力,它使得金融学由定性分析向定性分析与定量分析相结合转变;由以规范研究为主向实证研究为主转变;由理论阐述向理论研究与实用研究并重转变;由金融模糊决策向精确化决策转变。金融数学有多个名称,例如:数理金融、金融工程等。这些名称只是从不同的角度对这门学科进行定义,研究对象和研究方法完全相同。数理金融侧重对所采用的数学和统计学方法进行研究,金融工程则是利用数学工具对金融产品及其衍生产品的定价、应用进行研究,实用性强于数理金融。



1.2 金融数学的发展

金融数学最早出现在 1896 年,欧文·费雪最先对基本估值关系作出解释。这种估值关系是金融理论的核心之一,它说明一项资产的价值等于其产生的未来现金流的现值之和。在之后的几年里,由于证券市场得到了较大的发展,投资者们开始寻找对风险证券进行定价和预测未来价格的方法。这样,在 20 世纪初法国数学家路易斯·巴歇里埃在他的博士论文《投机的原理》中提出了著名的“投机理论”。虽然 1905 年爱因斯坦也对此做了研究,但这一做法当时还没能引起更多人的注意。直至 1950 年,这一理论才被人们所重视,并开始全面研究,由此金融数学迎来了发展的全盛时期,现代金融学也由此正式拉开帷幕。

现代金融数学是在两次“华尔街革命”的背景中成长发展起来的。

第一次革命的成果体现在静态投资组合理论的研究上。1952 年,哈里·马柯维兹在《金融杂志》上发表了一篇题为《投资组合选择》的论文,阐述了如何利用投资组合,创造更多的可供选择的投资品种,从而在一定风险水平下取得最大可能的预期收益率。该文引发了大量的对现代证券组合的分析工作,开始了现代金融数学的先河,在理论界被称为 20 世纪发生在华

尔街的第一次金融革命。然而他的模型中要计算各个风险资产价格的协方差,计算量很大。基于这种不足,1964年,马柯维兹的学生威廉·夏普提出了著名的资本资产定价模型。它是第一个在不确定的条件下探讨资本资产定价理论的数学模型,为金融市场收益结构的分析提供了理论依据。该模型认为在均衡市场下,所有资产的预期收益率等于零风险加上一个风险补偿,从而确认了系统风险才是影响资产预期收益率的唯一因素。由于在均衡市场中不允许出现套利机会,基于这样的现实,1976年,斯蒂芬·罗斯突破性地发展了资本资产定价模型,于1976年提出套利定价理论(APT)。

第二次“华尔街革命”从静态决策发展到了动态决策。1970年布雷顿森林体系崩溃,浮动汇率代替固定汇率,许多金融衍生工具随即产生。这些工具的引入主要是为了进行金融风险管理,而要对风险进行科学的管理就必须要对衍生工具进行科学定价。1973年,费希尔·布莱克和迈伦·斯科尔斯为解决期权定价这一长期困扰金融界的难题,在《政治经济学杂志》上发表了题为《期权和公司债务的定价》的文章,提出了第一个完整的数学模型,即布莱克-斯科尔斯期权定价模型,被理论界和实业界广泛接受和使用,成为发生在金融领域的又一次革命。此后还发展了许多可供选择的期权定价模型,如考克斯的二项式期权定价模型。此外,罗伯特·默顿给出了重要的布莱克-斯科尔斯期权定价模型的变形。他在1973年就给出了以连续支付红利的股票为标的物的期权定价公式,并把布莱克-斯科尔斯期权定价理论推广到无风险利率和标的物价格的变异度可以不为常数的情形,从而完善了期权定价理论。默顿和斯科尔斯也因此于1997年获得诺贝尔经济学奖。

由于历史和体制的原因,我国的金融市场起步较晚,金融工具少,金融数学模型少,模型在金融系统中的应用更少,金融学科的建设也比较落后。我国的金融数学研究开始于1993年,其标志是1993年初,彭实戈教授在国家自然科学基金委员会举办的一次“七五”研究成果报告会上所作的关于《倒向随机微分方程研究及其在金融中的应用》的报告。这一研究动向引起了“基金委员会”领导的高度重视,随后在“基金委员会”的组织下,召开了多次讨论会。1994年以彭实戈教授为首,包括南开大学数学研究所史树中教授在内的七位数学家正式向“基金委员会”建议,把金融数学作为“九五”优先发展的研究领域。彭实戈教授在创立、推动和领导我国金融数学这个新兴的交叉学科的发展中起到了学术带头人的作用,为加强我国自然科学和社会科学的结合,为自然科学特别是数学更好地为发展国民经济服务做出了突出贡献。

1994年9月在国家自然科学基金委员会和法国纯粹数学与应用数学研究中心的支持下,在北京举办了为期18天的“随机分析及其在金融中的应用”讲习班。彭实戈教授、El. Karoui教授、E. Pardoux教授、M. Davis教授以及I. Karakzas教授是这个讲习班的主讲人。这个讲习班为金融数学在我国的传播与发展奠定了坚实的基础,也对我国金融数学研究队伍的形成起到了很大的推动作用。在“基金委员会”的组织和推动下,金融数学工作者以及其他有关专家走访了财政部、国家税务总局、中国人民银行、国务院证券委员会、中国证券监督管理委员会等金融领导部门,研讨金融数学及金融工程等相关学科的研究如何为我国金融事业服务。

1996年“基金委员会”的重大项目“金融数学、金融工程和金融管理”正式通过答辩立项,并于1997年正式实施。彭实戈教授是该重大项目的第一负责人。1997年5月16日中国人民银行与国家自然科学“基金委员会”在北京联合举办了“金融工程学术报告会”,邀请了国内在该领域有成就的学者介绍这一国际金融界重要的新兴领域的基本情况与发展概况,金融工程的基本概念及其应用前景。彭实戈教授、清华大学宋逢明教授以及南开大学史树中教授做

了学术报告。1997年6月18日至21日,“基金委员会”重大项目“金融数学、金融工程和金融管理”研究发展大会在山东大学召开。大会期间,项目总负责人彭实戈教授做了关于项目研究发展总体设想的报告。项目各子课题负责人分别做了子课题研究发展报告。会议期间,还举行了多场围绕课题研究的学术报告。这次大会是一个重要开端,大会任务的圆满完成也奠定了该项目研究的良好开端和基础。

北京大学于1997年率先在国际上设立了第一个以金融数学命名的大学本科系,中科院也建立了“金融避险小组”。南开大学、武汉大学、山东大学等著名国内高等院校相继设立了金融数学本科专业或硕士、博士专业。



1.3 金融数学研究的意义

21世纪数学技术和计算机技术一样成为任何一门科学发展过程中的必备工具。美国花旗银行副总裁柯林斯1995年3月6日在英国剑桥大学牛顿数学科学研究所的讲演中叙述到:在18世纪初,和牛顿同时代的著名数学家伯努利曾宣称:“从事物理学研究而不懂数学的人实际上处理的是意义不大的东西。”那时候,这样的说法对物理学而言是正确的,但对于银行业而言不一定是正确的。在18世纪,你可以没有任何数学训练却能很好地运作银行。如今,过去对物理学而言是正确的说法对于银行业也正确了,于是现在可以这样说:“从事银行业工作而不懂数学的人实际上处理的是意义不大的东西”。他还指出:花旗银行70%的业务依赖于数学,并特别强调:“如果没有数学发展起来的工具和技术,许多事情我们是一点办法也没有的……没有数学我们不可能生存。”这里银行家用他们的经验描述了数学的重要性。在冷战结束后,美国原先在军事系统工作的数以千计的科学家进入了华尔街,大规模的基金管理公司纷纷开始雇佣数学博士或物理学博士。

在国内不能回避这样一个事实:受过高等教育的专业人士都可以读懂国内经济类、金融类核心期刊;但国内金融专业的本科生却很难读懂本专业的国际核心期刊《Journal of Finance》,其原因不在于外语的熟练程度,而在于内容和研究方法上的差异。国内研究较多停留在描述性分析上,着重描述金融的定义、市场的划分及金融组织等;而国外学术界则以定量分析为主,比如资本资产定价原理、衍生资产的复制方法等,即使在国内金融学的教材中,虽然涉及到了标的资产和衍生资产定价,但对公式提出的原文证明也予以回避,这种现象是不合理的。

产生这种现象的原因有如下几个方面:首先,根据研究方法的不同,我国金融学科既可以归到我国哲学社会科学范围,也可以归到自然科学范畴。前者占主要地位,且这支队伍大多来自经济转轨前的哲学和政治学队伍,因此研究方法多为定性的方法。而西方正好相反,金融研究方向的队伍具有很好的数理功底。其次,我国的金融市场由实际环境所决定。我国证券市场刚刚起步,没有一个统一的货币市场,投资者队伍主要由中小投资者构成,市场投机成分高。因此,不会产生对现代投资理论的需求,相应地,学术界也难以对此产生研究的热情。

数学技术以其精确的描述,严密的推导已经不容争辩地走进了金融领域。随着我国证券业和保险业迅速发展,金融业逐步实现与国际接轨,并参与国际竞争,社会对金融人才的要求越来越高,对能定量分析的金融专门人才更是求才若渴。因此,全面开始适合我国国情的金融数学理论的研究,大规模地培养金融数学的师资和科技队伍,并造就一批真正掌握现代金融知识和技术的人才,使我国的金融学真正从描述性阶段发展到分析性阶段,再发展到产品化和工

程化的更高阶段是我们的当务之急。



1.4 金融数学研究的前沿问题

1.4.1 随机最优控制理论

随机最优控制理论是 20 世纪 60 年代末在控制理论中应用布尔曼的最优化原理,并结合测度论和泛函分析方法发展起来的解决随机问题的理论方法。这一理论很快被运用到相关的研究中。70 年代初,莫顿运用该理论对连续时间最优消费投资问题进行了研究,布洛克和布尔曼还研究了不确定条件下连续时间的最优增长问题。目前,随机最优控制理论已经在大多数金融领域得到应用。在我国,彭实戈在倒向随机微分方程上获得了突破性研究,直到今天仍然处于国际前沿。

1.4.2 鞅理论

鞅(概率论中用语)理论是现代金融理论的最新理论方法。该理论认为在有效的金融市场假设下,证券价格等价于一个随机鞅过程。现实的证券市场是不完全市场,常常表现为市场中的证券和股票投资组合是受到限制的。Karatzas 等人引入的鞅理论能够较好地解决金融市场不完备时的衍生证券定价问题。目前,国外基于鞅方法的定价理论是金融理论中占主导地位的方法。

1.4.3 微分对策理论

在现实市场中,经济人掌握的信息是不对称的。在信息不对称的情况下,问题主要涉及到经济人之间的相互对策,参与的经纪人的信息层次常常很多,因此数学处理很困难。所以,金融市场的实际环境并不符合稳态假设。当出现异常波动时,证券价格并不符合几何布朗运动。此时,用随机动态模型研究投资组合问题不论从方法上,还是从实际上来说都存在着很大偏差。运用微分对策理论不仅可以放宽对市场稳态这一假设,还可以把不确定性扰动作为敌对方,针对最差的一方加以优化,从而得到“鲁棒性”很强的决策。同时,求解微分对策的布尔曼方程比求解随机最优控制下的二阶微分方程简单。可见微分对策理论研究金融问题前景很广阔。不仅如此,重复对策、随机对策理论在金融研究中也得到深入地探索和发展,有着较好的发展前景。

1.4.4 其他智能化方法及实证方法

信息技术的迅速发展为金融数学的研究带来了新的方法。遗传算法、模拟退火算法、人工神经网络、小波分析等计算方法和金融学传统方法结合起来,在风险控制和投资决策领域均取得了很好的成果。

实证研究是从金融市场现实中取得数据,分析数据并建立模型,然后揭示数据背后隐含的规律,最后返回数据,并在现实中检验结论的正确性。当今的研究越来越趋向实证型研究,结论的好与坏在实际的检验下才能得到最终的选择。

1.4.5 最优停时理论

最优停时理论是概率论中一个具有很强应用背景的领域。它的蓬勃发展是在 20 世纪 60 年代以后。近几年,在国内也有一些学者开始热心这一领域的研究,运用最优停时理论研究了具有固定交易费用的证券投资决策问题,取得了可喜的成果。

1.4.6 突发事件

突发事件是小概率事件,例如1987年“黑色星期一”西方的金融崩溃。一般的随机分析不能解释重大的金融震荡,而起源于海岸线形状和宇宙星系描述的分形理论可以很好地解释股票如何疯长和暴跌。另外,突变理论和冲击理论也在金融实践中得到应用。



本章小结

1. 金融数学,是利用数学研究金融,进行数学建模、理论分析、数值计算等定量分析,以求找到金融学内在规律,并用以指导实践的一门学科。

2. 1950年,投机理论被人们所重视,并开始全面研究,由此金融数学迎来了发展的全盛时期,现代金融学由此正式掀开了帷幕。现代金融数学是两次“华尔街革命”的背景中成长发展起来的。第一次革命的成果体现在静态投资组合理论的研究上。第二次华尔街革命从静态决策发展到了动态决策。

3. 全面开始适合我国国情的金融数学理论的研究,大规模地培养金融数学的师资和科技队伍,并造就一批真正掌握现代金融知识和技术的人才,使我国的金融学真正从描述性阶段发展到分析性阶段,再发展到产品化和工程化的更高阶段是我们的当务之急。

4. 随着金融数学学科的发展,无论在理论上,还是方法上都有很大的进展。目前国际上对于金融数学的研究主要集中在随机最优控制理论、鞅理论、微分对策理论、其他智能化方法及实证方法、最优停时理论以及突发事件等。



课后练习

1. 简述金融数学的定义。
2. 简述金融数学的发展过程。
3. 谈谈学习金融数学的意义。
4. 简述金融数学研究的前沿问题。



阅读材料

罗伯特·默顿



罗伯特·默顿,美国哈佛大学商学院金融学教授,为哈佛大学最高级别“大学教授”,1997年诺贝尔经济学奖获得者,现代金融学开创者之一。

默顿1944年7月31日生于纽约,其父亲是美国哥伦比亚大学社会学家,是首位获得美国总统科学奖的社会学家。默顿于1970年获得麻省理工学院经济学博士学位,曾师从于著名经济学大师、美国首位诺贝尔经济学奖得主保罗·萨缪尔森教授。毕业后,进入麻省理工学院斯隆商学院金融系任教,期间进行了一系列开创性研究,奠定了现代金融学的理论基础。

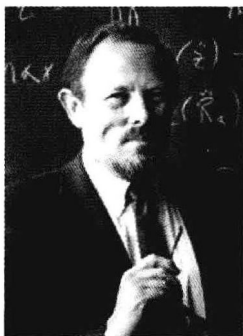
上世纪70年代,默顿与费希尔·布莱克和迈伦·斯科尔斯共同发明了期权定价的数学模

型,默顿和斯科尔斯也因此共同获得了1977年诺贝尔经济学奖。1970年,他提出了著名的“默顿模型”,被广泛应用于各种风险资产及金融衍生产品的定价工作,并为当今蓬勃发展的金融工程学奠定了基础。1973年,他提出了多时间段资本资产定价模型,这个模型明确提出了投资者在不断变化的市场环境中,如何实现最佳投资组合的问题。默顿在资产组合领域的研究成果,为现代金融理论作出了巨大贡献,指明了金融学术界的研究方向。

默顿不仅金融学术造诣很高,而且是金融学术界学以致用典范。他曾任著名投资银行摩根大通董事总经理。1994年,他和梅里韦瑟和迈伦·斯科尔斯共同发起创建了著名的对冲基金“长期资本管理公司”。现在,他兼任 trinum group 的首席科学官。

作为一名杰出经济学家,默顿一直关注经济发展的社会问题。2002年他在一系列文章中支持将期权开支视为企业支出,并予以相应的税收披露,获得 FASB(美国财务会计标准理事会)的采纳。2006年,美国发生“养老金危机”,默顿又提出了一套名为 SmartNest 的养老金管理解决方案,修正了传统的固定收益养老计划和固定缴款养老计划的弊端,也获得采纳。

威廉·夏普



1934年6月16日,威廉·夏普出生于美国马萨诸塞州的坎布里奇市。他的父母均受过大学教育。父亲的专业是英国文学,母亲的专业是科学。他的父亲当时在哈佛大学安置办公室工作。1940年,由于第二次世界大战的原因,父亲工作单位变动,他们家几次迁移,先迁至德克萨斯,后迁至北加州,最后到了南加州。就是在加州河边的公立学校,夏普完成了他的大部分大学前教育。夏普说:“那些学校都是很好的。在那里受益于令人鼓舞的老师和有挑战性的课程。”

1951年,夏普进入加州大学伯克莱分校,计划通过主修医学而取得医学学位。但是,一年的课程学习之后,他失去了兴趣,并转学到洛杉矶加州大学,选择主修企业管理专业。在加州大学洛杉矶分校,夏普得到了两个经济学学位,即在1955年获得经济学学士学位和在1956年得到经济学硕士学位,然后到陆军服役。

加州大学洛杉矶分校有两位教授对他的事业有深刻影响。在商业学院时,他有幸成为金融教授弗雷德·威斯顿的研究助理,并跟他学习。威斯顿首先介绍夏普读哈里·马克维茨的著作,并开始了使金融学发生革命的有挑战性的研究。夏普在读哲学博士时,其研究计划的一部分也与此有关。

另一位是经济学教授阿门·阿尔钦。他是夏普在洛杉矶分校时做人的楷模。阿尔钦教育学生要对一切事情要提出疑问,用自己的思想吹毛求疵。

短期服役之后,1956年夏普作为一名经济学家加入兰德公司。夏普对兰德公司的研究气氛非常赞赏。他说:“对于有志进行既有美学价值又注重实用研究的任何人,兰德都是一个理想的公司。”在那个时期,兰德正在研究计算机科学、对策论、线性规划、动态规划及应用经济学中的开拓性工作。

夏普是在兰德公司工作的同时继续在加州大学洛杉矶分校攻读博士学位。1960年,完成了全部专业课的考试之后,夏普开始考虑他的博士论文题目。在弗雷德·威斯顿的建议之下,他向同在兰德公司的哈里·马克维茨求教。他们从此开始密切合作,研究“基于证券间关系的

简化模型的证券组合分析”课题。虽然哈里并不是夏普博士论文答辩委员会的成员,但他实际上是整篇论文的顾问。夏普说:“我欠他的债是巨大的。”1961年,夏普的博士论文通过答辩,同时获得了博士学位。

在论文中,他根据马克维茨首先提出的一个模型探讨了证券组合分析的一些方法。当时称为“单一指数模型”,即现在的“单因素模型”。在论文中,他讨论了规范和实证两方面结果。最后一章“证券市场行为的一个实证理论”包括一项成果,类似现在称为资本资产定价模型的一部分,但它是在单一因素模型产生报酬的有限环境中得到的。

1961年,夏普在华盛顿大学商学院接受了一个金融学方面的职务,定居在西雅图。一安顿下来,他便开始着手归纳其博士论文的规范性成果,并于1963年发表在《管理科学》上,更重要的是他开始使博士论文最后一章中的均衡理论一般化。到1961年秋季他发现,不必对影响证券报酬的因素数目做任何假设即能得到一组很相似的结果。1962年1月他第一次在芝加哥大学公开这个方法,此后不久将一篇这个题材的文章投向《金融》杂志。由于编辑部的原因,该文推迟至1964年9月才发表。这篇文章在内容和标题两方面为现今被称为资本资产定价模型(CAPM)的理论提供了主要基础。

1968年之后,夏普应邀在斯坦福大学商业研究生院担任一个职务,但他在1970年才去那里。在去之前他完成了一本书《证券组合理论和资本市场》,总结了这些领域中的规范和实证工作。

20世纪70年代,夏普的大部分研究集中在与资本市场中均衡有关的问题以及它们对投资者的证券组合选择的影响上。美国在1974年通过关键立法后,他开始研究用于支付退休金义务的资金的投资政策。他还写了一本教科书《投资学》,将理论和经验结合在一起,便于大学生和研究生学习。1978年该书的第一版很成功,现在与高登·亚历山大合作的这本书已出了第五版。与高登·亚历山大合作的,1989年出版的另一本书《投资学基础》也受到读者好评。

1976~1977年,夏普在国民经济研究所迈塞尔的指导下,作为研究银行资本是否充分问题的研究小组成员,研究存款保险和拖欠风险之间的关系。成果于1978年发表在《金融和数量分析》杂志上,支持基于风险的保险费概念。与劳里·古德曼合作的经验工作也说明证券的市场价值能提示关于资本是否充足的重要信息。

1980年夏普被推选为美国金融学会主席。他选择《分散投资管理》为讲演的题目。目的是提供基本结构,用于分析大型机构投资者在一些投资组合中资金的分配。

20世纪80年代,夏普继续对有关退休金计划投资政策的问题进行研究。1983年,与米海尔·哈利逊完成了针对此问题的一篇理论文章。与此同时,他开始对美国股票市场中产生报酬的过程感兴趣。加州大学伯克莱分校的巴尔·罗森堡是这项研究的先驱者,他在1982年发表了关于纽约股票交易所证券报酬的因素的一篇经验论文。夏普也开始将精力集中于资产配置。为此,他进行了一系列的准备工作,包括一本书《资产配置工具》、优化软件和数据库。《资产配置工具》在1985年第一次出版。

1983年,他帮助斯坦福大学建立了一个国际投资管理计划,初期与日内瓦的国际管理研究所,以后与伦敦研究生院联合提供。这个计划是为希望得到金融经济理论和有关经验研究的高级投资专业人员设计的。夏普担任此计划的主任之一直至1986年。1986年后,夏普向斯坦福大学请假两年,以创办夏普-罗素研究公司,业务是研究,并开发程序以帮助养老金、基金会和捐赠基金选择对他们的情况和目标适合的资产配置。

由于夏普在金融领域的成就和影响,他担任了许多名誉职务。从1975年至1983年,担任大学退休股票基金的理事、注册金融分析家学会的研究基金会的理事、金融定量研究会的委员、注册金融分析家协会的教育和研究委员会委员,还担任日光证券投资技术研究所和瑞士联邦银行的单位证券管理部的策略顾问。他也得到了来自各方面的奖金:1980年,他获得美国商学院协会的优异贡献奖;1989年,得到金融分析家协会尼古拉·摩洛道夫斯基金融专业优异贡献奖。

迈伦·斯科尔斯



迈伦·斯科尔斯,生于1941年,1961年获 McMaster 大学工程学士学位,1964年获芝加哥 MBA 学位,1969年获芝加哥大学经济学博士学位。1968年—1973年执教麻省理工学院,1972—1983执教芝加哥大学,1983至今执教斯坦福大学。

斯科尔斯与已故的经济学家费西尔·布莱克曾于1973年发表《期权定价和公司债务》一文。在这篇文章中,他们给出了期权定价公式,即著名的布莱克-斯科尔斯公式。它与以往期权定价公式的重要差别在于只依赖于可观察到的或可估计出的变量,这使得布莱克-斯科尔斯公式避免了对未来股票价格概率分布和投资者风险偏好的依赖。这主要得益于他们认识到,可以用标的股票和无风险资产构造的投资组合的收益来复制期权的收益。在无套利情况下,复制的期权价格应等于购买投资组合的成本。期权价格仅依赖于股票价格的波动量、无风险利率、期权到期时间、执行价格、股票时价。市场许多大投资机构在股票市场和期权市场中连续交易进行套利,他们的行为类似于期权的复制者,使得期权价格越来越接近于布莱克-斯科尔斯的复制成本,即布莱克-斯科尔斯公式所确定的价格。布莱克和斯科尔斯复制法则的重要性在于,它告诉人们可以利用已存在的证券来复制符合于某种投资目的的新的证券品种。这成为金融机构设计新的金融产品的思想方法。

该论文中关于公司债务问题的论述也很富有创建性,指出:企业债务可以看作一组简单期权合约的组合,期权定价模型可以用于对企业债务的定价,这包括对债券、可转换债券的定价。传统方法在分析权益价格、长期债务、可转换债券时,对资本结构中不同的组合成分结合起来进行考虑。利用期权定价理论评价企业债务时,对资本结构中不同的组成部分同时进行评价。这样就考虑了每种资产对其他资产定价的影响,确保了整个资产结构评价的一致性。

利用布莱克-斯科尔斯公式对某一特定证券定价时,不像统计或回归分析那样,需要这种证券或与其相类似证券以往的数据,它可以对以往所没有的新型证券进行定价。这一特性扩大了期权定价模型的应用,为企业新型债务及交易证券进行定价提供了方法。

迈伦·斯科尔斯同罗伯特·默顿一样,是1997年度的诺贝尔经济学奖获得者,迈伦·斯科尔斯同罗伯特·默顿在期权定价理论方面作出了杰出贡献,诺贝尔经济学奖的获得体现了经济学界对期权定价理论巨大意义的充分肯定。

获博士学位后有两份工作供他选择,其一是德克萨斯大学副教授,年薪17 000美元,且可当企业顾问;另一个是麻省理工学院(MIT)助教,且不准兼职。但斯科尔斯最终接受了MIT的聘约。他舍弃优厚的薪酬和诱人的职位而投向MIT,足见其对学术研究的兴趣和志向。当

时 MIT 是美国学术研究重镇,特别是关于期权理论的研究,由于有萨缪尔森的参与,成为当时的研究中心。斯科尔斯选择 MIT 很可能与此有关。此后不久他遇到了费希尔·布莱克,由于他们两人都对 CAPM 模型的检验有共同的兴趣,而且都对期权定价理论有相似的见解,所以尽管两人性格差异很大,但却很快成为了好朋友,也成为了学术研究的合作伙伴。1972 年与布莱克合写的《期权合同约定价和市场有效性检验》、《资本资产定价模型:詹森作的一些实证检验》,此两篇论文成为对资本资产定价模型(CAPM)检验与市场有效性研究领域的重要文献。

费希尔·布莱克



费希尔·布莱克是美国经济学家,布莱克-斯科尔斯模型的提出者之一。费希尔·布莱克毕生坚持奋战在华尔街,在金融领域他是“搞实务的”而不是“做学术的”,然而就是他创建了迄今为止最正确、最经典、应用最广、成就最高的模型:布莱克-斯科尔斯期权定价模型。

费希尔·布莱克是位充满传奇色彩的人物。他从没受过正式的金融和经济学训练,却在几年之内创立了现代金融学的基础。他在生活中处处规避风险,却在学术研究和商业实践中勇敢地挑战前人。他能轻易地获得芝加哥大学和 MIT 的终身教授头衔,也能自如地放弃,再次投身到金融衍生产品革命大潮。他频繁地在象牙塔和华尔街之间穿梭、游弋,给那些以为理论和实践是两个截然不同世界的人出了大大的难题。