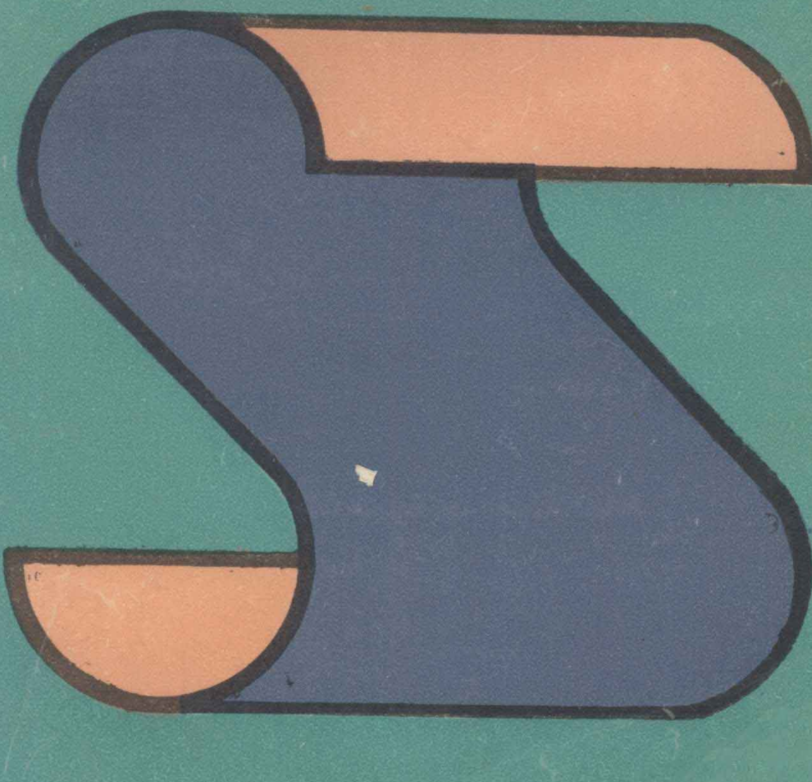
全国高等教育自学考试教材

机械类专业

高 等 数 学

（上册）　　陆庆乐　马知恩 编



高等教育出版社

全国高等教育自学考试教材

机械类专业

高 等 数 学

（上 册）

陆庆乐 马知恩 编

高等教育出版社

（京）112号

本书系全国高等教育自学考试指导委员会委托机械类专业委员会组编的自学考试的教材。

本书针对自学考试缺少教师进行系统传授的特点，下册在内容阐述上注意启发引导，揭示概念的实质。书中例题较多，注意了解题方法的训练。每节后配有思考题与运算题，每章有综合性练习题，并拟就一份自我检查题，以测试自学的效果。

本书每章后有小结，起学习指导作用。

本书分上下两册出版，下册分成两篇五章，内容是空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、常微分方程和无穷级数。

本书除供自学考试使用外，函授大学、职工大学，以及高等学校专科班的学生也可使用。

责任编辑　丁鹤龄

全国高等教育自学考试教材
机械类专业
高　等　数　学
（上册）
陆庆乐　马知恩　编
*
高等教育出版社出版
新华书店北京科技发行所发行
山东省济南新华印刷厂印装
*
开本850×1168　1/32　印张　16.5　字数420 000
1990年8月第1版　1995年3月第7次印刷
印数　87 274-107 281
ISBN7-04-002622-8/O·1004
定价　12.30元

出版前言

高等教育自学考试教材建设是高等教育自学考试工作的一项基本建设。经国家教育委员会同意，我们拟有计划、有步骤地组织编写一些高等教育自学考试教材，以满足社会自学和适应考试的需要。《高等数学》是为高等教育自学考试机械类专业组编的一套教材中的一种。这本教材根据专业考试计划，从造就和选拔人才的需要出发，按照全国颁布的《高等数学自学考试大纲》的要求，结合自学考试的特点，组织高等院校一些专家学者集体编写而成的。

机械类专业《高等数学》自学考试教材，是供个人自学、社会助学和国家考试使用的，无疑也适用于其他相同专业方面的学习需要。现经审定同意予以出版发行。我们相信，随着高教自学考试教材的陆续出版，必将对我国高等教育事业的发展，保证自学考试的质量起到积极的促进作用。

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试，希望得到社会各方面的关怀和支持，使它在使用中不断提高和日臻完善。

全国高等教育自学考试指导委员会

一九九〇年七月

编者的话

本书是根据全国高等教育自学考试指导委员会审定，经国家教育委员会批准，于1986年颁发的机械类专业专科《高等数学课程自学考试大纲》编写的。在编写过程中，我们考虑到自学考试的特点，结合多年来在教学中积累起来的经验和体会，在以下几个方面进行了努力。

1. 鉴于自学考试缺少教师的系统传授，因此，为了便于自学，我们在编写时，对问题阐述得比较仔细，对用语力求确切，对文字注意通俗易懂。

2. 注意启发引导，我们常常从实际问题引出抽象的概念，使读者知道概念的实际背景，让他们对所以要研究这一概念的重要意义有所了解，然后对概念的实质逐步进行揭示，从而逐渐加深他们对概念的理解，这样步步深入，将启发性寓于循序渐进之中。

3. 对一些重要定理或公式的证明，注意了推证思路的阐述，并尽量设法结合几何直观，使读者易于接受。

4. 书中例题较多，注意了对解题方法的训练，并及时指出在解题中一些在概念上或运算上易犯的错误。

5. 在每节后配有帮助搞清概念的思考题与帮助掌握基本方法的运算题。在每章末还配有一些比较深入而带有综合性的总习题，对其中较难的题，给了适当的提示。每章还备有一份“自我检查题”，用以检验经过自学是否已经掌握了该章的主要内容，具有阶段性测验性质。

6. 每章末写有“结束语”，其中除了对本章内容小结外，还包括了本章的内容提要、本章的基本要求、重点与难点以及对自学的建议与学习指导，以帮助读者抓住要点，提高学习质量与学习效率。书中带*的为选学内容，不作考试要求。

7. 注意了联系实际，特别是结合机械类专业的特点，举了一些有关机械方面的例子，供有关专业选学。

本书分上、下两册出版。上册内容为函数、极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用，分成三篇共六章。下册内容为空间解析几何、多元函数微积分学简介、常微分方程、无穷级数，分成两篇共五章。本书熔教材、习题集、学习指导书三者于一体，便于读者使用。

由于专科段与本科段的大纲中对一元函数微积分学的要求基本上是一样的，为了有利于读者在专科段学习通过的基础上进一步转入本科段学习，我们在编写该内容的重要部分时，比较靠近本科段水平，使读者能有比较扎实的数学基础。

本书是机械类专业自学考试教材，但也可供函授大学、职工大学、电视大学以及大专班师生参考或作为教材。

本书一定还存在不少的缺点与不足之处，诚恳希望读者提出批评与指正。

编者

1990年6月

目　　录

第一篇　函数、极限、连续

第二篇　一元函数微分学

第三篇 一元函数积分学

附　　录

第一篇　函数、极限、连续

第一章　函　　数

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是高等数学的主要研究对象．在这一章中，我们将在中学里已有知识的基础上，进一步阐明函数的一般定义，总结在中学里已经学过的一些函数，并介绍一些关于函数的简单性态．

1—1　常量与变量

自然界的现象无一不在变化之中，我们在观察自然现象、研究某些实际问题或从事生产的过程时，总会遇到许多量．如面积、体积、长度、时间、速度、温度等等．我们遇到的量，一般可以分为两种，一种是在过程进行中不断变化的量，这种量称为**变量**．变量常用x，y，z，u，v…等字母来表示．另一种是在过程进行中保持不变的量，这种量称为**常量**．常量往往用a，b，c，α，β…等字母来表示．例如，一个物体作匀速直线运动，那末时间与位移的大小都是变量，而速度则为常量．又如，一个金属圆环．由于热胀冷缩，在受热的过程中，圆环的直径与周长在不断变大，冷却时又不断变小．因此，直径与周长都是变量．但在整个过程中，周长和直径之比却始终不变，是一个常量，就是圆周率$\pi=3.141592\cdots$．

应当注意，在研究一些特定的自然现象时，同一个量在这一现象中是常量，而在另一现象中却是变量．例如速度，在匀速运动中是常量，在匀加速运动中是变量．还须注意常量与变量的相

对意义．一个量是常量还是变量，跟所研究问题的具体情况有关．例如，气温的变化会引起机器上的轴热胀冷缩，如果引起的轴长变化极为微小，而这种变化对机器精度的影响又微不足道．那末为了简化研究过程，我们宁可把它当作常量来处理；但对比较精密的机器上的轴，即使轴长的变化极为微小，也会影响机器的精度，这时就应把它当作变量来处理．

区间 一个变量能取得许多数值，这些数值的集合往往随着所研究的问题的性质不同而不同．例如要在室温为16℃的情况下把水烧开，于是水的温度将从16℃增加到100℃，即温度T这个变量取得从16到100之间的各个数值．又如变量 $x=\cos t$ 就只能取得从-1到$+1$之间的所有数值．

在几何上，一个变量的值可用数轴上的点来描述．象上述的变量$x=\cos t$，对所有t可取的值，就可用从-1到$+1$线段上所有的点来表示，包括-1与$+1$两个端点在内（图1.1）．

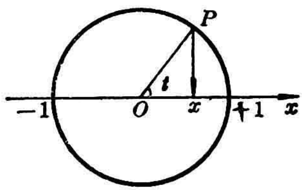


图 1.1

一个变量能取得的全部数值的集合，称为这个变量的**变化范围**或**变域**，今后我们经常遇到的变域是区间．所谓变量x的**区间**就是介于两个实数a与b之间的一切实数，在数轴上就是从a到b的线段．a与b称为区间的**端点**，当$a<b$时，a称为**左端点**，b称为**右端点**．

区间是否包括端点要看所研究的问题而定．按照包括或不包括端点在内，区间可以分为：

（1） **闭区间**，两个端点都包括在内，记作$a\leqslant x\leqslant b$，或$[a, b]$；

（2） **开区间**，两个端点都不包括在内，记作$a<x<b$，或(a,b)；

（3） **半开区间**，只包括一个端点在内，记作 $a\leqslant x<b$，或$[a,b)$ 及$a<x\leqslant b$或 $(a,b]$（图1.2）。

在图1.2中，区间的端点包括在内时，把端点画成实点，不包括在内时，把端点画成空点。

图 1.2

除了上述这些**有限区间**外，还有各种**无限区间**：

（4） 小于（不大于）c的一切实数，记作$-\infty<x<c$或$(-\infty,c)$（$-\infty<x\leqslant c$或$(-\infty,c]$）；

（5） 大于（不小于）c的一切实数，记作$c<x<+\infty$或$(c,+\infty)$（$c\leqslant x<+\infty$或$[c,+\infty)$）；

（6） 一切实数，记作$-\infty<x<+\infty$或$(-\infty,+\infty)$。

以后我们会看到，有些定理的成立将跟变量在区间的开闭有很大关系，因此我们在学习时要多加注意。但有些情形并不一定要指明区间的开闭，在这种场合，为了方便起见，我们常用I或X等来表示区间。

邻区 在下一章讲极限时，我们要用到邻区的概念。设x_0为一已知点，包括x_0的任意一个开区间(a,b)称为x_0的**邻区**。但我们通常考虑的往往是以x_0为中点的区间(a,b)，这时我们称x_0为邻区的中心，$\frac{1}{2}(b-a)$为邻区的半径。图1.3所表示的是以点x_0为中心，ε为半径的邻区$(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$，称为$x_0$的$\varepsilon$邻区。

设x为这邻区内的任一点，那末x满足不等式

$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon.$$

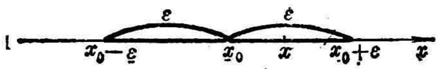


图 1.3

这个不等式可写成

$$|x-x_0|<\varepsilon. \tag{1—1}$$

所以(1—1)式也可用以表示x_0的ε邻区．在这个邻区中，如果再把它的中心x_0去掉，就称为x_0的ε去心邻区，可用不等式

$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon，\ x\neq x_0$$

或

$$0<|x-x_0|<\varepsilon \tag{1—2}$$

表示．(1—2) 式中的$0<|x-x_0|$的含意就是$x\neq x_0$．

应当指出，邻区的半径虽然没有明确规定其大小，但一般总是取很小的正数．

习 题 1—1

1． 在把圆钢锻打成圆盘的过程中，圆钢的体积V，直径D，长度L这三个量中，哪一个是常量？哪一个是变量？

2． 一个人的身高与体重是常量还是变量？

3． 试把下列区间：

$$[c,+\infty)，(c,+\infty)，(-\infty,c]$$

在数轴上表示出来．

4． 用不等式或绝对值不等式表示下列各区间：

(1) $(-2,3)$；(2) $[-2,2]$；(3) $(-5,+\infty)$．

5． 开区间 $(1,3)$ 是不是下列各点的邻区？

(1) 1.1；(2) 2；(3) 2.5；(4) 3.001．

6． 试用绝对值不等式表示 3 的 $\frac{1}{2}$ 去心邻区．

1—2 函数概念

现在让我们在上节所讲的变量概念的基础上来阐明函数概念。

在研究某一自然现象或实际问题的过程中，总会发现问题中的变量并不都是独立变化的，它们之间往往存在着依存关系。下面我们先考察几个具体例子。

例1 一个自由落体，从开始下落时算起经过的时间设为t（秒），在这段时间中落体的位移的大小设为s(米)。如果不计阻力，那末s与t之间有如下的依存关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \tag{1—3}$$

其中g为重力加速度，是一个常数（$g=9.8$米/秒^2）。

如果落体从开始到着地所需的时间为T（图1.4），那末变量t的变化范围（或称变域）为

$$0\leqslant t\leqslant T.$$

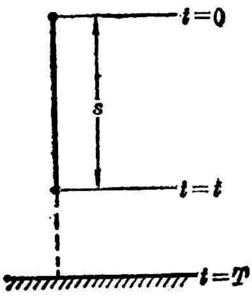


图 1.4

当t在这变化范围内任取一值时，都可以从(1—3)求出s的对应值。例如

$t=1$（秒）时，$s=\frac{1}{2}\times 9.8\times 1^2=4.9$（米）；

$t=2$（秒）时，　$s=\frac{1}{2}\times 9.8\times 2^2=19.6$（米）。

例2　金属棒受热后要伸长，根据实验的结果，棒长l与温度T℃之间有如下的依存关系：

$$l=l_0(1+\alpha T),\qquad (1—4)$$

其中l_0是0℃时的棒长，α是一个常数，称为"线胀系数"，它的值随着金属材料不同而不同。在T可以取值的范围内任取一值时，由(1—4)可求出l的对应值。

在以上两例中，变量之间的依存关系都由一个确定的公式表出。但应指出，有无这种确定的表达式，对问题中变量之间有依存关系存在是无关紧要的。

例3　下面是一台发电机启动后一小时内每分钟的转速记录：

t（分）	1	2	3	4	…	60
n（转/分）	2011	2981	2998	3001	…	3002

这张表格给出了时间t（分）与转速n（转/分）之间的依存关系，从它可以查出当t取1，2，…，60等正整数时，转速n的对应值。

例4　图1.5是气温自动记录仪描出的某一天的气温变化曲线，它给出了时间t与气温T之间的依存关系。

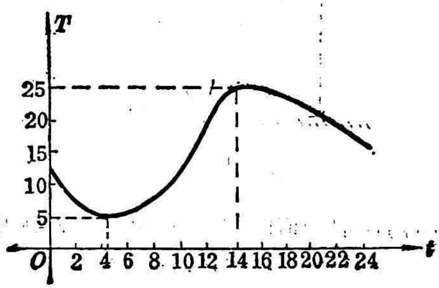


图 1.5