苏俄教育科学院

初等數学全書

函數和極限

第二册

導數·積分·級數·初等複变函數

И. П. 那湯松，В. Л. 崗恰罗夫著
何旭初 唐述釗譯

商务印書館

П.С.亞力山大罗夫，А.И.馬庫舍維

苏俄教育科学院初等數学全書

函數和極限

第二册

導數·積分·級數·初等複变函數

И.П.那湯松，В.Л.崗恰罗夫著

何旭初　唐述釗譯

商务印書館

本書係根据苏联技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的亞力山大罗夫（П. С. Александров），馬庫舍維奇（А. И. Маркушевич）和辛欽（А. Я. Хичин）編輯的"初等數学全書（Энциклопедия элементарной математики）"第三卷崗恰罗夫（В. Л. Гончаров）和那湯松（И. П. Натансон）合著的"函數和極限"（Функци и пределы）"1952年版譯出。

本書（原書第三卷）分二册出版，这本第二册为那湯松和崗恰罗夫所著，由南京大学何旭初、唐述釗二位同志担任翻譯。

苏俄教育科学院初等數学全書

函 數 和 極 限

第二册

И. П. 那湯松，В. Л. 崗恰罗夫著

何旭初 唐述釗譯

商 务 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一号

（上海市書刊出版業營業許可証出字第〇二五号）

新 華 書 店 總 經 售

商 务 印 書 館 北 京 廠 印 刷

（54243 B）

開本850×1168 1/32 印張8 15/16 字數235,000

1955年12月初版 印數1—2,500 定價(8) ¥1.35

第二册目錄

導數·積分与級數

（И. П. 那湯松）

初等複变函數
(В. Л. 岡恰罗夫)

導數·積分与級數

И. П. 那湯松

序

人們在研究自然時經常会接觸到的一些量，其中大都是在变化着的量，或者，如通常所說，是一些变量。空气的溫度，汽鍋內蒸汽的压力，电路網的电压，飛机的速度，所有这些量都是逐漸改变的，因而都是变量。可是，一直到了十七十八世紀，在自然科学与工業技術蓬勃發展的影响下，數学才獲得了变量的一般概念，从那个時候起，变量就開始成为數学研究的基本对象。这時，笛卡尔的數学工作佔有重要的地位。

“笛卡尔的变數是數学中的轉折點——恩格斯說，因此运動和辯証法便進入了數学，因此微分与積分也就立刻成为必要的了，而它們也就立刻產生出來，並且整个講來，它們是由牛頓和萊布尼茨完成的，而不是由他們發現的。[1]

可以簡略地說，數学分析便是研究变量的數学。

为了更完备地表徵出數学分析的对象，应当指出，數学分析从事於变量的研究，是把它們当作相互有联系的而不是把它們当作孤立的东西來看的。表達变量相互联系性的精確的數学概念便是函數概念。这就是數学分析的基本的和最重要的概念。

數学分析的观念，即变量与函數的观念，对於數学分析來說具有極端重要的意义。三角函數的全部理論，实际上便是數学分析的基本的一章。在中学代數学教程裏所講的是有理函數，最簡單的代數無理函數和一些非代數的函數（超越函數）：具無理指數的冪函數，指數函數与对數函數便都是这一种；那時还講了極限和最簡單的無窮級數——幾

[1] 恩格斯，自然辯証法，曹葆華等譯，人民出版社 1955 年版，二一七頁。

何級數的基本理論。在幾何学中，曲線圖形和曲面所包圍的物体的度量，係定义为某些其他圖形和物体的度量，当其改变並逼近所繪圖形和物体時的極限。

微分学、積分学与級數論是數学分析的重要的篇章，它們在數学、物理学与技術上的全部領域內具有各种各样的应用。这些部分在目前还沒有列入普通中学的教学計劃中去。然而，導數和積分早已是科学上的基本概念了，它們具有極大的教育意义，在將來總会列入(当然以非常簡短的篇幅)中学的數学課程中去的。

本書包含了導數、積分与級數的系統的知識。介紹这些知識的篇幅，当然在分量上是超过了能够列入中学課程裏去的好多倍。这些內容的选擇，和“初等數学全書”的其他幾卷一样，都是根据学習与研究初等函數及其計算以及解許多幾何与物理問題(作曲線的切線，根据行程求速度，和根据速度求行程，求平面圖形的面積，曲線的長度，最簡單物体的体積与表面積)而確定的。

關於數学分析發展史的稍稍完备的概述，不是本書的目的，我們只指出歷史上的若干點。分析学的某些重要观念可以認为早在古代科学中就已經有了。古典的“窮举法”便是級數理論的原形。在阿基米德的一些著作中，便採用了可以作为後來積分学特徵的萌芽形式的思維过程。

大約在十七世紀中葉，古希臘的科学在數学領域內就已經很优越了，如已經記載的，在十七世紀末牛頓(1642—1727)与萊卜尼慈(1646—1716)的工作，已完成了微積分学的建立。

在說到數学分析創立过程的“完成”時，我們所指的是數学分析的基本的指導原則的建立，而首先便是微分学与積分学的相互可逆性問題的確定。如果把“完成”一語理解成在牛頓和萊卜尼慈的工作以後分析学便停止發展，那便錯了。相反，在这个領域中科学上的創作在十八世紀与十九世紀急剧地繼續下去，直到現在都还在很有成績地進行着。

現在，在數学分析的各不同部門，每年發表的文章要超过一千篇。

在俄國，分析学問題研究的創始是与著名的 Л. 歐拉(1707—1783)的名字分不開的。歐拉原是瑞士人，他的整个一生幾乎都是在彼得堡度过的，他是彼得堡科学院的院士。他致力於研究數学与力学的各种問題，尤其对微積分学有重要的貢献。

積分学的許多重要發現(積分技術、重積分理論、微分方程、变分学)係出自米海里·瓦西里葉維奇·奧斯特罗格拉得斯基院士(1801—1861)。所有的教学参考書中都載有他的著名的重積分变換公式和他的有理分式的積分法。

除奧斯特罗格拉得斯基以外，和他同時的彼得堡院士維克多·雅考夫勒維奇·布尼亞考夫斯基(1804—1889)也曾研究过分析学的問題，他在这个領域內發表了許多文章。我們的偉大的幾何学家尼古拉·伊凡諾維奇·罗巴切夫斯基(1792—1856)在數学分析方面也完成若干有價値的研究。

數学分析的一个大的学派的創始人便是天才的俄國數学家帕夫努奇·里瓦維奇·切彼謝夫(1821—1894)。他是積分学方面(例如積分成初等函數的問題以及定積分的近似計算方面)許多重要著作的作者，而切彼謝夫在數学分析上的主要功績是他在函數逼近理論方面的突出的研究。这些研究進一步的發展便導致了分析学新的重要分枝——函數結構理論的建立，这种理論具有很大的实用價値。

切彼謝夫在彼得堡大学当了許多年教授，他創立了一个强大的学派，它的最卓越的代表便是 A. A. 馬尔可夫院士(1856—1922)和 A. M. 里雅普諾夫院士(1857—1918)。直到現在列寧格勒大学还保有这个学派的傳統。

在二十世紀，主要是在 H. H. 魯金(1883—1950)和 Д. Ф. 葉果罗夫(1869—1931)的影响下形成了莫斯科学派。在苏維埃時代早已達到了它的全盛時期，現在，由於莫斯科学派趣味的寬廣和工作的重要性，無

疑地居世界的首要地位。在分析学的領域中，它的最突出的代表便是 A.H.柯莫果罗夫、И.Г.彼得罗夫斯基、Д.Е.孟寿夫等人。

C.H.白恩斯坦(1880年生)是当代最大數学家之一，在函數逼近理論的(和概率論方面)研究工作方面，他是切彼謝夫繼承者。在他的影响下培养出了許多年青的苏維埃研究者。

标誌國家社会主义勝利的文化与科学的巨大的普遍高漲，在數学的領域中表現得非常鮮明。前面曾指出了莫斯科学派活動的意义。非常巨大的和廣泛的研究在我國的其他文化中心——列寧格勒、基也輔、哈尔科夫、敖德薩、梯比里斯、嘉桑、挨里溫等地正進行着。

苏联在數学上成就的詳細敘述(到1947年)可以在集体編寫的"苏联數学三十年"(國立技術理論書籍出版社1948年出版)中找到。

第一章　導數

§ 1. 導數及微分

1. 引出導數概念的問題　微分学中最重要的概念便是導數概念，我們來考慮導出这个概念的一些帶有具体特性的問題。

A. 速度的問題　設點 M 沿某一直線运動[1]。大家知道，動點在某段時間內所行的距离，对它所經歷的時間的比，称为这一點在这段時間內的平均速度。

容易看出，點在这段或那段時間內的平均速度的值，並沒有給出在这區間中个别的瞬時的运動特性的概念。由於这个原故，在力学上要研究在給定的瞬時點的速度的概念。这个概念是理解为：由給定的瞬時開始(或終止於这一瞬時)的無限小[2]的一段時間內，點的平均速度的極限。

为了强調这个概念与先前所定义的平均速度的不同，有時称之为點在給定的瞬時的"瞬時"速度。

設在點所沿着运動的直線上，选取某一起點 O，选取一个確定的單位長度及直線的確定的方向。則動點 M 在每一瞬時的位置，可以由始點 O 到它的距离 OM 來確定(圖 1)。这个距离是一个(正的、負的或等於零)數 s，顯然这个數是依賴於所談到

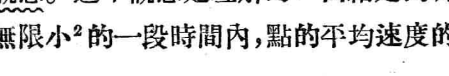

圖 1.

---

[1] 在非直線运動的情形下，速度具有向量的性質，而它的定义是比較複雜的。

[2] 也就是所經歷的時間趨於零。

的瞬時。另一方面，这一瞬時自身係由它与某一確定的開始瞬間相隔的單位時間數 t 來確定。

於是，$OM=s$ 是变量 t 的函數

$$s=f(t), \tag{1}$$

而这函數的值就完全確定了點的运動。等式(1)称为运動方程，这裏便是这种方程的一些例子：

$$s=t^2,\ s=2t^3+1,\ s=\sin t,\ s=\frac{gt^2}{2}.$$

如果已知运動方程(1)，我們來研究怎样去求點 M 在時刻 t 的"瞬時"速度(即，离開時間區間的開始時刻为 t 單位的那个時刻)。

除了時刻 t 而外，我們考慮另一个時刻 $t+\Delta t$。在这一時刻，動點 M 位於离原點 O 的距离为

$$s+\Delta s=f(t+\Delta t)$$

的地方。於是，開始於時刻 t 而終止於時刻 $t+\Delta t$ 的这段時間內，點所走的距离 Δs 等於

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t).$$

因为这段時間之長为 Δt，顯然在这一段時間內的平均速度是比

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t},$$

因而，點 M 在時刻 t 的瞬時速度 v，等於当 Δt 趨於零時这个比的極限：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \tag{I}$$

於是求速度的物理問題就化为求極限(I)的分析問題。

現在我們來考慮另外一个問題，它也導至了類似的極限。

Б. 切線的問題　在只研究圓周那一种曲線的初等幾何中，圓的切線是定义为与这个圓周祇有一个公共點的直線。假如去研究任意的曲線，切線的这种定义就將不能令人滿意了。当然不能認为 Oy 軸是抛物線 $y=x^2$ (圖 2)的切線，虽然它們只有一个公共點。

因此，要採取另一种較普遍的切線的定义。

即，曲線K在其上一點M（它称之为切點）处的切線是这样的直線 MT，它是經过M及曲線上另一點 N 的割線 MS 当點 N 沿 K 趨向於 M 時的極限位置[1]（圖 3）。

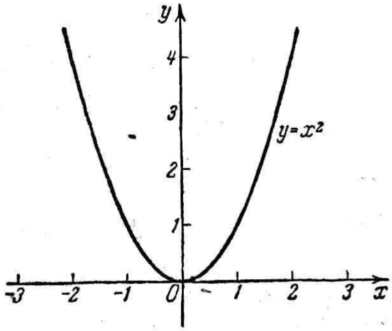

圖 2.

容易証明，当K是圓周時，切線的新定义对等於在中学中所給的那个定义。

現在我們提出对曲線

$$y=f(x) \tag{2}$$

引切線的問題，这裏 $f(x)$ 是某一連續函數。如果切點$M(x, y)$給定了的話。

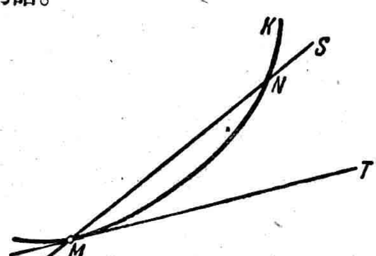

圖 3.

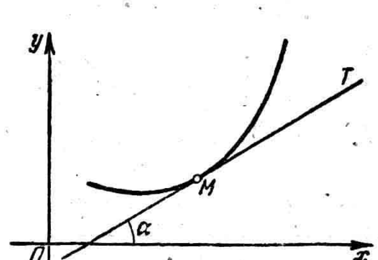

圖 4.

既然我們知道M點，所以要確定切線 MT，祇要知道它的斜率 k，即，MT 与軸 Ox 所夾的角 α 的正切（圖 4）就够了。

为了確定这一斜率，我們在曲線上再取一點$N(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 並經过M与N引割線 MN。由解析幾何学我們知道割線的斜率是

$$k^* = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

---

[1] 这就表示，直線 MT 与 MS 間之角趨於零。

由於切線是割線的極限位置，所以顯然有[1]

$$k=\lim_{N\to M} k^*. \tag{3}$$

因为M与N兩點都在曲線(2)上，所以

$$y=f(x),\ y+\Delta y=f(x+\Delta x),$$

於是

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

另一方面，由於點N趨於點M，Δx趨於零[2]。因此，等式(3)可以寫成如下的形式:

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{II}$$

於是問題便化为求極限(II)，这个極限除了記号之外，与極限(I)是沒有什麼區別的。

我們再研究一个具体的問題，它还是引向同一極限的。

B. 密度的問題　一根直桿的質量与其長度之比称为桿的平均密度(在这裏我們只注意桿的線性密度；当略去桿的厚度与寬度時就得到这个概念)。为了对直桿上質量分佈的特性有較準確的观念，我們引進在桿上給定的一點处的密度这一概念。这一概念是理解为集結於这一點的無窮小段的平均密度的極限。

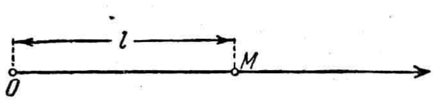

圖 5.

我們可以用桿上一點M离桿之一端點O的距离$OM=l$，來說明點M在桿上的位置(圖5)。於是，在用m表示OM这一段的質量之後，顯然可知m是l的函數:

$$m=f(l), \tag{4}$$

这時知道了關係式(4)，我們就完全確定桿的質量是如何分佈的了。

---

[1] 由函數$\operatorname{tg}\alpha$的連續性不难得到等式(3)的嚴格的証明。

[2] 由於$f(x)$是連續的，故当$\Delta x\to 0$時$N\to M$，反之亦然。