高等院校考研数学精品辅导丛书

线性代数

同济 第六版

同步辅导·习题全解·考研精粹

主编 张军好

教材习题详细解答
考研大纲深度解读
知识结构图全面归纳
典型题练习强化技巧
近年考研题模拟实战

西北工业大学出版社

高等院校考研数学精品辅导丛书

线性代数

（同济第六版）

同步辅导·习题全解·考研精粹

主　编　张军好

副主编　胡军浩　余启港　夏永波

安　智　佘　纬　龙爱芳

编　委　万　杭　孔跃东　宁　娣

龙爱芳　孙仁斌　安　智

李学峰　李浩光　余启港

佘　纬　杨占英　罗艾花

周　静　欧阳露莎　胡国香

俞诗秋　李学锋　张军好

张国东　胡军浩　夏永波

殷红燕　谌永荣　蔡明建

西北工业大学出版社

【内容简介】

本书为《线性代数》(同济第六版)的配套辅导书。全书分为六章，每章包含本章知识结构图、考研大纲要求、考研试卷分值统计、章节内容概述、题型与方法、历年考研真题解析、教材课后习题详解和目标自测题与答案7部分。本书主要特点：例题种类全面，知识点的结构层次清楚，内容充实，方法性强以及与考研练习紧密。

本书是针对使用该教材的教师与学生的同步辅导书，也适合作为考研数学复习的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步辅导·习题全解·考研精粹/张军好主编. —西安：西北工业大学出版社，2016.4
ISBN 978-7-5612-4811-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①张… Ⅲ.①线性代数—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第085087号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号 **邮政编码**：710072
电　　话：(029)88493844 88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：武汉武铁印刷厂
开　　本：880mm×1 230mm 1/32
印　　张：8.875
字　　数：330千字
版　　次：2016年4月第1版 2016年5月第1次印刷
定　　价：24.80元

前　　言

本书为《线性代数》(同济第六版)配套使用的学习辅导与习题全解.可以作为使用该教材的教师与学生的同步辅导书,更适合作为考研数学的复习用书.

当今,我国的高等教育已经走向了大众化的教育,社会各界对高等教育的质量十分关切.我们编写这本配套教辅书,主要是为了适应新时期大学数学教育的新要求,一方面满足学生学习线性代数课程的需要,期望对保证和提高线性代数课程的教学质量,对广大学生掌握线性代数的基本思想与方法起到辅导作用;另一方面,也为了满足不同层次学生的学习需要,利用辅导教材这种形式,对教材的内容与方法作出适当的总结、延伸与扩展,对大学生继续深造给予帮助,同时对新时期的大学教育如何培养具有创新精神的优秀人才做些有益的探讨.

按照配套辅导教材的编写要求,本书的内容按章编写,与教材同步.每章包含知识结构图,考研大纲要求,考研试卷分值统计,本章内容概述、题型与方法,考研真题解析,教材课后习题详解,目标自测题与答案等 7 部分。基本结构如下:

知识结构图:对每一章主要内容作一个结构图表,使读者对该章的重点内容关系结构一目了然.

考研大纲要求:结合教育部颁发的研究生入学考试基本要求对本章教学内容按“了解”“理解”与“掌握”3 个层次进行了分类编注,使读者对线性代数的考研要求做到一目了然,成竹在胸.

考研试卷分值统计:对近 16 年来的研究生入学考试数学一、数学二与数学三中的线性代数内容分数值进行了统计,使读者对该章内容在考研数学试卷中比例一目了然.

本章内容概述、题型与方法:该部分包含本章重点内容概述、典型的例题与方法等方面的内容。它对本章的内容与方法进行了归纳总结,将基本的理论、基本的方法、解题技巧等多方面的内容融于范例之中.这些典型例题注重分析解题思想,揭示解题规律,引导读者如何思考问题,对培养读者理性思维及分析问题

和解决问题的能力大有帮助.

考研真题解析：考研题型与方法部分主要将近10多年来全国硕士研究生入学考试数学一、数学二与数学三试题中线性代数部分进行了归纳与整理，对典型的测试类型进行了详细的剖析，并指出了经常的测试类型的大致演变方向，使学生对考研题型有一个清楚的认识，把握学习的方向，这对以后考研大有益处.

教材课后习题详解：该部分对教材章后练习作出了详细的解答，以便学生在学习过程中对自己的解题答案与过程进行对照、比较，从中找出自己的不足之处，达到对问题的更深刻和更透彻的理解.

目标自测题与答案：该部分是笔者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学线性代数试题特点科学设计的，目的是给读者提供更深入的练习机会，让读者进一步消化知识、夯实考点、提高能力.

本书体现例题种类详细，知识点的结构层次清楚，内容充实，方法性强以及与考研联系紧密的特点.

编写本书曾参阅了相关书籍、文献和资料，在此，谨向其作者深表谢意！由于水平所限，书中难免有不妥之处，恳请各位同行、读者批评指正。

编　者

2016年3月

目　　录

第一章　行　列　式

1 知识结构图

- 行列式
  - 二、三阶行列式的定义及对角法则公式(只有二、三阶行列式有对角法则公式)
  - 排列及其逆序数
    - 逆序与逆序数
    - 奇偶排列
  - n 阶行列式
    - 定义：$|a_{ij}|=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$
    - 几种特殊的 n 阶行列式
      - 对角行列式
      - 三角行列式
      - 反对角行列式
      - 反三角行列式
  - 行列式的性质
    - 换行(列)值换号
    - 倍行(列)倍值
    - 倍行(列)加值不变
    - 行列式转置值不变
    - 行列式按某行(列)拆开性质
  - 行列式的展开性质
    - $|a_{ij}|_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$(按第 i 行展开)
    - $|a_{ij}|_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$(按第 j 列展开)
    - $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0(i\neq j)$
    - $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0(i\neq j)$
    - 范德蒙德行列式
  - 余子式与代数余子式：行列式的某行(列)元素的余子式、代数余子式与该行(列)元素无关

图 1-1　第一章知识结构图

② 考研大纲要求

1. 掌握排列逆序数的计算和奇偶性判别.

2. 掌握行列式的基本性质,并应用于行列式的计算.

3. 掌握余子式、代数余子式的计算,并应用于行列式的计算.

4. 掌握范德蒙德行列式的特征与计算公式.

③ 考研试卷分值统计

表 1-1 为近 16 年来,本章所含知识点在考研真题试卷中所占分值统计.

表 1-1　第一章行列式在考研数学试卷中分值统计情况

年份/年		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
分数/分	数学一	6	0	0	0	4	4	4	0	6	0	0	0	0	0	4	4
	数学二	3	0	0	4	4	4	4	0	6	0	4	0	4	0	4	0
	数学三	3	0	0	0	4	4	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0

④ 本章内容概述、题型与方法

一、内容概述

1. 排列有关内容

(1) 由数字 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1i_2i_3\cdots i_4$ 称为一个 n 级排列,简称为排列. 特别地,n 级排列 $123\cdots n$ 称为 n 级自然排列或标准排列.

(2)在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n(s<t)$ 中的两个数字 i_s,i_t,如果 $i_s>i_t$,则称它们构成一个逆序. 排列 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 中全部逆序之和称为排列的逆序数,记作 $t=N(i_1i_2i_3\cdots i_n)$.

(3)求排列的逆序数的方法:

对排列 $i_1i_2i_3\cdots i_n$,数出每个数字 i_t 后面比 i_t 小的数字的个数 $N_t,t=1,2,\cdots n-1$,则 $i_1i_2i_3\cdots i_n$ 的逆序数 $t=N(i_1i_2i_3\cdots i_n)=\sum\limits_{t=1}^{n-1}N_t$.

(4)逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

2. 行列式定义

由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式(其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列位置的数,称为第 i 行第 j 列元素),

它表示所有取自不同行、不同列的 n 个数的乘积按照如下方法带上正号或负号的代数和：每项乘积中的个数按行号排成标准排列时，其列号排列的奇偶性决定该项的符号：奇排列时为负号，偶排列时为正号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{\Delta} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中，求和 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 取遍所有 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$. 而 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项. 特别地，当 $n=1$ 时，规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

行列式 $|a_{ij}|$ 的一般项还可以写成如下形式：

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)+N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

行列式的等价定义 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 也可定义为

$$|a_{ij}| \xlongequal{\Delta} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

这是一个将各项乘积中的 n 个数按列号排成标准排列，其行号排列的奇偶性确定该项符号的定义.

3. 行列式的基本性质

(1)将行列式转置，行列式的值不变.

转置变形：把行列式的行与列互换，即把原来在第 i 行第 j 列位置的元素换到第 j 行第 i 列上去，所得到的行列式称为原来行列式的转置行列式，记 D 的转置行列式为 D' 或 D^{T}.

(2)行列式的初等变换及其性质.

1)换行：第 i 行与第 j 行交换，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，

换列：第 i 列与第 j 列交换，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$；

2)倍行：第 i 行 k 倍，记作 kr_i，

倍列：第 i 列 k 倍，记作 kc_i；

3)倍行加：第 j 行 l 倍加到第 i 行上去，记作 $r_i + lr_j$，

倍列加：第 j 列 l 倍加到第 i 列上去，记作 $c_i + lc_j$；

规定：1)每次变形每个元素至多只能改变一次；

2)每次变形所做的多个初等变换按从上往下的次序进行.

行列式的初等变换性质：

1)换行⇒值反号；

2)倍行⇒倍值；

3)倍行加⇒值不变.

(3)提取一行公因子，即可把行列式中某一行所有元素的公因子提取出来放到行列式外面作为因子.

(4)具有如下特征之一的行列式，其值为 0.

1)有一行元素全为 0；

2)有两行元素对应相等;

3)有两行元素对应成比例.

(5)拆行拆值,即把一个行列式的某一行拆开成两行所得到的两个行列式的值之和就等于原行列式的值.

(6)展开性质.

1)在 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后,余下的元素按原来的相对位置排成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},称 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

2)n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于任一行的元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n$$

3)n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中,任一行的数字与另一行中同列数字代数余子式的乘积之和等于 0,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j)$$

二、典型例题、方法与技巧

例 1 设行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&4&3&2\\1&3&x&x\\a&0&x&y\\1&3&4&2\end{vmatrix}$$

求(1)D 中含元素 $x\cdot y$ 的项;(2)D 中项 x^2 的系数;(3)元素 a 的代数余子式.

解:根据行列式定义中一般项的构成,各行各列取一个元素作乘积再带上符号的方法知道:

(1)D 中含元素 $x\cdot y$ 的项为

$$(-1)^{N(2341)}\cdot4\cdot x\cdot y\cdot1+(-1)^{N(1342)}\cdot2\cdot x\cdot y\cdot3=4xy+6xy=10xy$$

(2)D 中含元素 x^2 的项为

$$(-1)^{N(1432)}\cdot2\cdot x\cdot x\cdot3=-6x^2\text{ 和 }\quad(-1)^{N(2431)}\cdot4\cdot x\cdot x\cdot1=4x^2$$

因此 D 中项 x^2 的系数为 $-6+4=-2$.

(3)元素 a 所在的位置为第 3 行第 1 列,其代数余子式为

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}4&3&2\\3&x&x\\3&4&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix}4&3&2\\3&x&x\\-1&1&0\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix}4&7&2\\3&x+3&x\\-1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}7&2\\x+3&x\end{vmatrix}=-[7x-2(x+3)]=-5x+6$$

注:(1)“D 中含元素 $x\cdot y$ 的项”意指行列式定义中的项,而“D 中项 x^2 的系数”意指 D 的值多项式中 x^2 的系数,这时要“合并同类项”.

(2)a 的代数余子式与 a 的位置(不是下标)有关,而与 a 的值大小无关.

例 2　设 4 阶行列式 D_1 依次经过下列变形后变成 D_2:

(1)交换第 1,3 行;　(2)2 倍第 2 行;　(3)第 1 行 3 倍加到第 4 行;

(4)3 倍第 2 列;　(5)转置;　(6)提出第 2 行的公因子 3.

若已知 $D_1=1$,求 D_2.

解:根据行列式的性质,记 $C_1=D_1$ 经交换第 1,3 行得 C_2,C_2 经 2 倍第 2 行得 C_3,C_3 经第 1 行 3 倍加到第 4 行得 C_4,C_4 经 3 倍第 2 列得 C_5,C_5 转置得 C_6,C_6 提出第 2 行公因子 3 后余下行列式为 C_7,则由 $D_1=1$ 得

$$C_1=1\Rightarrow C_2=-C_1=-1\Rightarrow C_3=2C_2=-2\Rightarrow C_4=C_3=-2\Rightarrow C_5=3C_4=-6\Rightarrow$$

$$C_6=C_5=-6\Rightarrow C_7=\frac{1}{2}C_6=-3$$

从而 $D_2=C_7=-3$.

注:此题考查行列式的各种变形性质,特别要注意"倍行(列),倍值"和"提取行(列)公因子"性质的灵活应用,"什么时候乘以倍数(公因子)、什么时候除以倍数(公因子)".

例 3　试判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否是 6 阶行列式 $D_6=|a_{ij}|$ 中的项.

解:题中所给两个乘积刚好都是 D_6 中不同行、不同列的 6 个元素,因此要判别它们是不是 D_6 中的项,必须检查它们的符号对不对.

第一个 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 的 6 个元素的行位置(这时与第一个下标相同)排列为自然排列,第二个下标(即列位置)排列 431265 的逆序数 $3+2+0+0+1=6$,为偶数,所以带正号,即 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是 D_6 中的项.

第二个的 6 个元素次序重排列 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 即将行位置(第一个下标)排成自然排列,这时列位置(第二个下标)排列 452316 的逆序数为 $3+3+1+1+0=8$ 为偶排列,应带正号,故 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是 D_6 中的项.

例 4　不计算行列式的值,用行列式的性质证明行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

能被 13 整除.

证: $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+10c_2+10^2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 104 \\ 3 & 2 & 325 \\ 4 & 1 & 416 \end{vmatrix} = 13\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 25 \\ 4 & 1 & 32 \end{vmatrix}$$

注:虽然题中的数都不能被 13 整除,但通过初等变换将第 3 列化成了能被 13 整除的数,从而提出 13 这个因子.

例 5　计算 4 阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

解:方法 1:$D\xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}x&x&0&0\\1&1-x&1&1\\0&0&y&y\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1-x&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4-r_3]{r_2-r_1}xy\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&-x&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&-y\end{vmatrix}=x^2y^2$$

方法 2:如果 $x=0$ 或 $y=0$,易知 $D=0$. 如果 $x\neq0$ 且 $y\neq0$,构造行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&1+x&1&1&1\\0&1&1-x&1&1\\0&1&1&1+y&1\\0&1&1&1&1-y\end{vmatrix}$$

显然按第一列展开知 $D_1=D$. 而

$$D_1\xlongequal[i=2,3,4,5]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\-1&x&0&0&0\\-1&0&-x&0&0\\-1&0&0&y&0\\-1&0&0&0&-y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&x&0&0&0\\0&0&-x&0&0\\0&0&0&y&0\\0&0&0&0&-y\end{vmatrix}=x^2y^2$$

故 $$D=x^2y^2$$

注:方法二是把原行列式添加 1 列 1 行,使所得的行列式易求值且与原行列式值相等,这种计算行列式的方法称为加边法.

例 6 计算 n 阶行列式:

$$f(x)=\begin{vmatrix}a+x&ax&0&0&\cdots&0&0\\1&a+x&ax&0&\cdots&0&0\\0&1&a+x&ax&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&&\ddots&0\\0&0&0&1&\cdots&a+x&ax\\0&0&0&0&\cdots&1&a+x\end{vmatrix}$$

解:按行列式中第 1 行展开后,并将 ax 的余子式再按第 1 列展开,得

$$D_n=(a+x)D_{n-1}-axD_{n-2},D_n-aD_{n-1}=x(D_{n-1}-aD_{n-2})$$

这是一个递推关系式,它对一切 n 都成立,故依次递推可得:

$D_n=(a+x)D_{n-1}-axD_{n-2},D_n-aD_{n-1}=x(D_{n-1}-aD_{n-2})$

这是一个递推关系式,它对一切 n 都成立,故依次递推,可得

$$\begin{aligned}D_n-aD_{n-1}&=x^2(D_{n-2}-aD_{n-3})\\&=x^3(D_{n-3}-aD_{n-4})\\&=\cdots\end{aligned}$$

$$=x^{n-2}(D_2-aD_1)$$
$$=x^{n-2}[(a+x)^2-ax-a(a+x)]$$
$$=x^n$$

其中 D_2 和 D_1 是按上面的展开方法降阶至原行列式的右下角而得到的，从而有

$$D_n-aD_{n-1}=x^n. \tag{1.1}$$

又在原行列式中，a 和 x 的地位一样，故同理得

$$D_n=xD_{n-1}+a^n. \tag{1.2}$$

联立式(1.1)和式(1.2)构成方程组，当 $x\neq a$ 时，解得 $D_n=\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$.

而当 $x=a$ 时，有

$$\begin{aligned}D_n&=aD_{n-1}+a^n=a(aD_{n-2}+a^{n-1})+a^n=a^2D_{n-2}+2a^n\\&=a^2(aD_{n-3}+a^{n-2})+2a^n=a^3D_{n-3}+3a^n\\&=\cdots\\&=a^{n-2}D_2+(n-2)a^n=a^{n-2}(4a^2-a^2)+(n-2)a^n=(n+1)a^n\end{aligned}$$

注：本题的解法是根据原行列式的特点，经过展开得到递推行列式，然后用递推的方法解题的这种方法称为递推法.

例 7　计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0\end{vmatrix}\text{（其中 } n \text{ 是奇数）}$$

解：这个行列式的特点是，第 i 行第 j 列的元素等于第 j 行第 i 列元素的相反数，即 $a_{ij}=-a_{ji}$ 具有这种特点的行列式（n 是自然数）称为反对称行列式.

先把 D_n 转置为 D'_n，再对 D'_n 的每一行提取公因子-1，得

$$D_n=D'_n=\begin{vmatrix}0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n}\\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n}\\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & a_{0n} & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{03n} & \cdots & 0\end{vmatrix}=(-1)^nD_n$$

由于题中的 n 是奇数可知 $D_n=-D_n$，从而得 $D_n=0$，故奇数阶反对称行列式等于零.

例 8　已知 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&-1&-1&\cdots&-1\\1&1&-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&-1\\1&1&1&\cdots&1\end{vmatrix}$$

试计算 D_n 的展开式中正项的项数.

解:将 D_n 的最后一行加到其余各行上去,则得到的为下三角行列式,它的主对角线上的元素最后一个是1,其余都是2,因此 $D_n=2^{n-1}$. 为了计算 D_n 的展开式中正项的项数,设 D_n 的展开式的 $n!$ 项中有正项数 p 个,负项数 q 个,由于展开式的每一项是 $+1$ 或 -1,故

$$\begin{cases}p+q=n!\\p-q=2^{n-1}\end{cases}$$

从而 $p=2^{n-2}+\frac{1}{2}n!$,即有 D_n 的展开式中正项的项数为 $2^{n-2}+\frac{1}{2}n!$.

例 9　计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\c&a&b&\cdots&b\\c&c&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\c&c&c&\cdots&a\end{vmatrix}\quad(b\neq c)$$

解:把 D_n 的第1列元素都写成两个数之和,从而 D_n 可拆成两个行列式之和

$$D_n=\begin{vmatrix}c&b&b&\cdots&b\\c&a&b&\cdots&b\\c&c&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\c&c&c&\cdots&a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a-c&b&b&\cdots&b\\0&a&b&\cdots&b\\0&c&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&c&c&\cdots&b\end{vmatrix}$$

$$=c\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\1&a&b&\cdots&b\\1&c&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&c&c&\cdots&a\end{vmatrix}+(a-c)D_{n-1}$$

$$\xlongequal{c_j-bc_1}c\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&a-b&0&\cdots&0\\1&c-b&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&c-b&c-b&\cdots&a-b\end{vmatrix}+(a-c)D_{n-1}$$

$$=c(a-b)^{n-1}+(a-c)D_{n-1}.\tag{1.3}$$

把 D_n 的第一行元素都写成两个数之和,从而 D_n 又可以拆成两个行列式相加:

$$D_n=\begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}+(a-b)D_{n-1}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-cr_1}b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b & \cdots & b & b \\ 0 & 0 & a-c & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-c \end{vmatrix}+(a-b)D_{n-1}$$

$$=b(a-c)^{n-1}+(a-b)D_{n-1} \tag{1.4}$$

联立式(1.3)、式(1.4),组成关于 D_n,D_{n-1} 为未知数得方程组解出

$$D_n=\frac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b}$$

注:本题计算中使用了把已知行列式拆成两个行列式之和的方法,这种把一个行列式拆成几个行列式的和计算的方法通常称为拆行(列)法.

5 考研真题解析

行列式的考研题型以填空、选择为主,考题大致可以分为 3 种类型:一是数字型行列式的计算,一是抽象型行列式的计算,还有就是行列式值的判定(特别是行列式是否为零).

1. (2008 年,数学一)设 n 元线性方程组 $Ax=b$,其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n},x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

证明行列式 $|A|=(n+1)a^2$.

证明:用数学归纳法.记 n 阶行列式 $|A|=(n+1)a^2$ 的值为 D_n.

当 $n=1$ 时,$D_1=2a$,命题正确;当 $n=2$ 时,$D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$,命题正确.设 $n<k$ 时,命题正确,即 $D_n=(n+1)a^2$.当 $n=k$ 时,对 a_n 按 D_n 第一列展开,则有

$$D_k=2a\begin{vmatrix}2a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=2aD_{k-1}-a^2D_{k-2}=2a(ka^{k-1})-a^2[(k-1)a^{k-2}]=(k+1)a^k$$

所以$|A|=(n+1)a^2$.

2. (2000 年,数学三)设$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$,$n$为正整数,则$|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=$________.

【解法一】 因为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1,0,-1)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix},\text{而 }\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2$$

则
$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})^n=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=2^{n-1}\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=2^{n-1}\boldsymbol{A}$$

所以
$$|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=|a\boldsymbol{E}-2^{n-1}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&a&0\\2^{n-1}&0&a-2^{n-1}\end{vmatrix}=a^2(a-2^n)$$

【解法二】 因为

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\Rightarrow\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$$

所以,2 为$\boldsymbol{A}$的特征值. 由于$r(\boldsymbol{A})=1$,所以$\boldsymbol{A}$的特征值为 2,0,0. $\boldsymbol{A}^n$的特征值为2^n,0,0,从而$a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n$的特征值为$a-2^n,a,a$,故$|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=a^2(a-2^n)$.

4. (2000 年,数学三)若 4 阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似,矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$,则行式$|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$________.

分析: 本题已知特征值,要求行列式的值,根据特征值的性质来求解,即矩阵的行列式等于其全部特征值的乘积.

解: 由于$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似,所以$\boldsymbol{B}$的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$. 于是$\boldsymbol{B}^{-1}$的特征值为 2,3,4,5. 那么$\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}$的特征值为 1,2,3,4. 从而

$$|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=1\times2\times3\times4=24$$

5. (2004 年,数一)设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,其中$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$是单位矩阵,则$|\boldsymbol{B}|=$________.

解: 由于$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,易知$|\boldsymbol{A}|=3$. 对$\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,两边同时