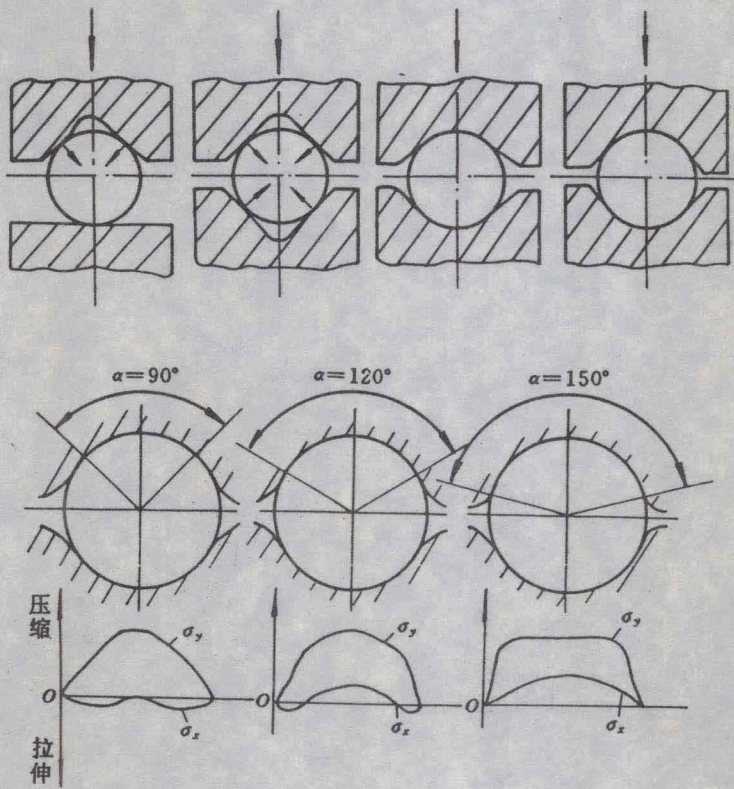


金属塑性加工力学

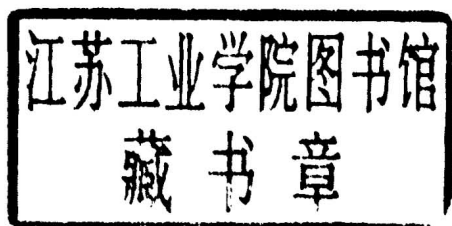
朱为昌主编



兵器工业出版社

金属塑性加工力学

朱为昌主编



兵器工业出版社

内 容 简 介

《金属塑性加工力学》为金属压力加工专业本科生主修课程《塑性加工力学》或《工程塑性理论》的教学书,主要阐述压力加工过程中工件和工具相互作用时应力、应变等重要问题的物理概念和基本方程,并介绍几种常用的有关金属流动和力能参数方程的解析方法,为合理设计和选择设备工具、制订加工工艺规程提供理论依据;为提高产品质量、开发新工艺启迪思想、开拓方向,进一步学习其它专业课程打下理论基础。

本书除作高等学校金属压力加工专业的教材外,也可供有关专业的教师、研究生和科研、设计及生产部门的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

金属塑性加工力学/朱为昌主编:—北京:兵器工业出版社,1996.9

ISBN 7—80132—059—X

I. 金… II. 朱… III. 金属压力加工—塑性力学 IV. TG301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 14968 号

兵器工业出版社 出版发行

(北京市海淀区车道沟 10 号)

各地新华书店经销

昌平兴华印刷厂印装

*

开本:787×1092 1/16 印张:9.75 字数:227 千字

1996 年 9 月第 1 版 1996 年 9 月第 1 次印刷

印数:0000~2000 定价:12 元

前 言

本书为金属压力加工专业本科生主修课程《塑性加工力学》或《工程塑性理论》的教学用书,主要阐述压力加工过程中工件和工具相互作用时应力、应变等重要问题的物理概念和基本方程,并介绍几种常用的有关金属流动和力能参数方程的解析方法,为合理设计和选择设备工具、制订加工工艺规程提供理论依据;为提高产品质量、开发新工艺启迪思想、开拓方向,进一步学习其它专业课程打下理论基础。

本书授课时数约为 60 学时,书中附有例题和习题。本书除作高等学校金属压力加工专业的教材外,也可供有关专业的教师、研究生和科研、设计及生产部门的工程技术人员参考。

本书以编者多年授课的讲义为蓝本,按新的教学计划进行了修改,其中第 1、2、3、4、5、7、9、10 章由朱为昌执笔,第 6、8 两章由王进执笔,最后由朱为昌进行统一修改和定稿。

本书定稿前,邀请了有关院校的任课教师对原稿件进行了审阅,汪家才等同志提出了许多宝贵意见,编者对此表示衷心感谢。胡海萍同志和郑宝龙同志对全书的习题和图表进行了校核,编者深表谢意。编者对在各方面曾热情帮助和支持过本书编写和出版的同志们表示感谢!

由于编者水平有限,书中难免存在遗漏和错误,敬请读者批评指正。

编 者

1996 年 5 月

目 录

1	应力分析	1
1.1	截面上的应力	1
1.2	点的应力状态	2
1.3	主应力和主切应力	3
1.4	球应力和偏应力	7
1.5	主应力简图	8
1.6	平衡微分方程	9
1.7	应力边界条件	12
	小结	14
	思考和练习	14
2	应变分析	16
2.1	应变的表示方法	16
2.2	点的应变状态	17
2.3	主应变和主切应变	20
2.4	球应变和偏应变	21
2.5	应变增量和应变速率	21
2.6	应变的连续方程	23
2.7	体积变形和不可压缩条件	24
2.8	主应变简图	25
2.9	速度边界条件	25
	小结	26
	思考和练习	27
3	屈服准则	28
3.1	简单拉伸实验结果	28
3.2	屈服准则的一般概念	30
3.3	屈雷斯加屈服准则	33
3.4	米塞斯屈服准则	34
3.5	屈服准则的实验验证	38
3.6	各向同性的加工硬化材料的后继屈服轨迹	40
	小结	41
	思考和练习	41
4	应力—应变关系	43
4.1	弹性的应力—应变关系	43
4.2	塑性的应力—应变关系	44
4.3	普朗特—劳斯理论	44
4.4	列维—米塞斯理论	45

4.5	塑性功	45
4.6	等效应力和等效应变	46
4.7	等效应力—等效应变的关系曲线及其简化模型	48
	小结	50
	思考和练习	51
5	塑性加工问题的解	52
5.1	精确解	52
5.2	近似解	52
5.3	金属材料的特性	53
5.4	摩擦边界条件	53
5.5	计算值与实验值的比较	54
5.6	基本方程的简化	54
	小结	58
	思考和练习	58
6	平行截面法	60
6.1	基本方程的简化	60
6.2	锻造	62
6.3	拉拔	69
6.4	轧制	75
	小结	85
	思考和练习	86
7	滑移线法	87
7.1	基本概念	87
7.2	汉基应力方程	89
7.3	常见的滑移线场	91
7.4	应力边界条件	94
7.5	格林格速度方程及速度图	96
7.6	挤压时的滑移线场	99
7.7	锻压时的滑移线场	102
	小结	113
	思考和练习	114
8	上限法	116
8.1	下限定理	116
8.2	上限定理	116
8.3	圆盘压缩时的总压力和平均压力	118
8.4	半无限体压入时的平均压力	120
8.5	平面应变挤压时的挤压力	122
8.6	轧制问题的上限解	124
	小结	125

思考 and 练习	125
9 塑性加工时金属温度的变化	128
9.1 高速变形时的温度变化	128
9.2 平面应变压缩时的温度变化	129
9.3 高速挤压时的温度分布	130
小结	133
思考 and 练习	133
10 变形区几何学	135
10.1 变形区几何学的特征参数	135
10.2 工具压力- Δ 的关系曲线	136
10.3 摩擦和多余变形	137
10.4 变形的不均匀性	138
10.5 结晶织构	140
10.6 内应力分布	141
10.7 内部破裂	143
10.8 残余应力	145
小结	145
思考 and 练习	145
主要参考文献	147

1 应力分析

1.1 截面上的应力

所谓应力,是指由外力、非均匀温度场和(或)物体中的永久变形等因素引起物体内部单位截面面积上的内力。设 ΔA 为过物体内 P 点的一小块截面积, ΔF 为作用在该小面积上的内力,则 $\Delta F/\Delta A$ 为该小块面积上的应力,它表示了该面积 ΔA 上应力的平均值。在一般情况下,截面上的应力分布是不均匀的,平均应力不足以描述截面上各点的应力分布,而以 $S_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta F/\Delta A)$ 表示该截面上点 P 的应力。由于 ΔF 对于 ΔA 可以有任意的方向,因此,能够将 ΔF 按 ΔA 的法向 n 和切向 t 分解为两个分量 ΔF_n 和 ΔF_t ,则

$$\sigma_{nn} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta F_n/\Delta A), \quad \sigma_{nt} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} (\Delta F_t/\Delta A) \quad (1-1)$$

为区别起见,可以称 S_n 为截面 ΔA 上 P 点的全应力, σ_{nn} 和 σ_{nt} 分别为它的法向分量和切向分量,显然, $S_n^2 = \sigma_{nn}^2 + \sigma_{nt}^2$ 。我们通常遇到的问题三维的空间问题,为便于对物体内各点进行应力分析,可以把过该点的平面取作三个互相垂直的坐标平面、三个截面的法线分别与三个坐标轴 x 、 y 和 z 平行,截面上的全应力分别为 S_x 、 S_y 和 S_z ,每个全应力沿三个坐标方向分解为三个应力分量,即一个法向应力分量和两个切向应力分量,因而有:

$$\left. \begin{aligned} S_x^2 &= \sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 \\ S_y^2 &= \sigma_{yx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{yz}^2 \\ S_z^2 &= \sigma_{zx}^2 + \sigma_{zy}^2 + \sigma_{zz}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

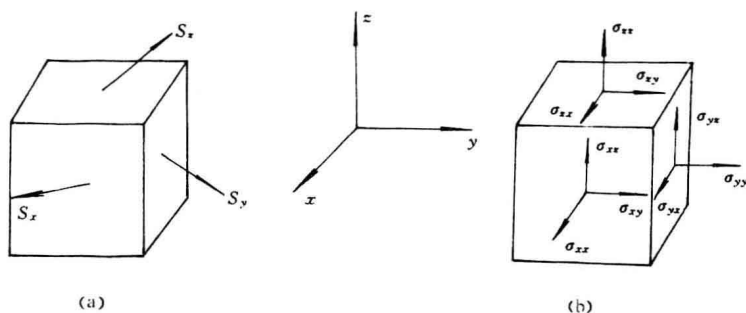


图 1-1 过一点三个互相垂直平面上的应力分量

如图 1-1 所示。直角六面体上互相平行的两个平面实为过该点的同一平面,其上的应力分量大小相等、方向相反,过一点三个互相垂直平面上的应力分量共有 9 个,其中,3 个为法向应力分量 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} ,其余 6 个为切向应力分量。应力分量都有两个下标,第一个下标表示应力分量所在的平面,该平面用其法线表示,第二个下标表示应力分量的方向,该方向与对应的坐标轴平行,但它的指向是不确定的,可以是坐标轴的正方向,也可以是它的负方向。法向应力(亦称正应力)的两个下标相同,切应力的两个下标不同。例如, σ_{xy} ,它是切应力,它所在平面的法线是 x 轴,它的方向与 y 轴平行。切应力亦称为剪应力。

可以证明,当过一点三个互相垂直平面上的 9 个应力分量为已知时,过该点任意截面上

的应力都能确定。证明过程如下所述。过物体内一点作一六面体,通常称之为单元体,在直角坐标系下为直角六面体,单元体的平面与坐标平面平行,每个面上的应力分量已知,如图 1-2(a)所示。现过该点作一任意截面 ABC ,它的法线 n 与坐标轴的方向余弦分别为 $l = \cos(n, x)$ 、 $m = \cos(n, y)$ 和 $n = \cos(n, z)$, 且有 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 。为了看得清楚,将单元体的 9 个应力分量标在其背面的三个互相垂直的平面上,而把正面的部分移去,如图 1-2(b)所示。作用在截面 ABC 上的全应力 S_n 及其沿坐标轴的分量 σ_{nx} 、 σ_{ny} 和 σ_{nz} 均标在图 1-2(c)上。四面体 $OABC$ 各面的面积分别为 $\triangle ABC = \Delta A$, $\triangle OBC = l \cdot \Delta A$, $\triangle OAC = m \cdot \Delta A$, $\triangle OAB = n \cdot \Delta A$ 。四面体应满足力的平衡方程: $\sum F_x = 0$ 、 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum F_z = 0$, 从而有

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} \cdot \Delta A - \sigma_{xx} \cdot l \cdot \Delta A - \sigma_{yx} \cdot m \cdot \Delta A - \sigma_{zx} \cdot n \cdot \Delta A &= 0 \\ \sigma_{ny} \cdot \Delta A - \sigma_{xy} \cdot l \cdot \Delta A - \sigma_{yy} \cdot m \cdot \Delta A - \sigma_{zy} \cdot n \cdot \Delta A &= 0 \\ \sigma_{nz} \cdot \Delta A - \sigma_{xz} \cdot l \cdot \Delta A - \sigma_{yz} \cdot m \cdot \Delta A - \sigma_{zz} \cdot n \cdot \Delta A &= 0 \end{aligned}$$

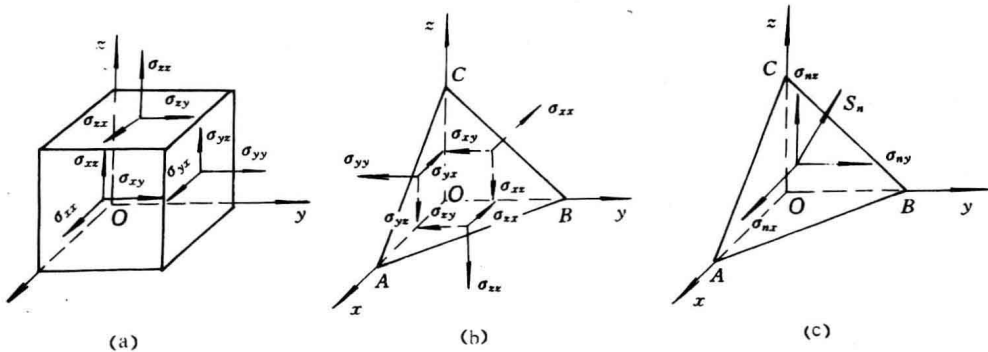


图 1-2 任意截面上的应力

简化后可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_{xx}l + \sigma_{yx}m + \sigma_{zx}n \\ \sigma_{ny} &= \sigma_{xy}l + \sigma_{yy}m + \sigma_{zy}n \\ \sigma_{nz} &= \sigma_{xz}l + \sigma_{yz}m + \sigma_{zz}n \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

全应力 $S_n = \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2}$, 将 S_n 分解为正应力 σ_{nn} 和切应力 σ_{nt} , 则有 $\sigma_{nn} = \sigma_{nx}l + \sigma_{ny}m + \sigma_{nz}n$, $\sigma_{nt} = \sqrt{S_n^2 - \sigma_{nn}^2}$ 。

1.2 点的应力状态

过一点有无限多个截面,每个截面上的应力可以各不相同。一般说来,为了完整地描述物体内一点的应力状态,需要知道过该点的任一截面上的应力。实际上,如前所述,当过一点三个互相垂直截面上的 9 个应力分量为已知时,过该点任意截面上的应力都可确定,因此,该点的应力状态即可完全确定,而与坐标的选择无关。为了简化,通常设定三个互相垂直的截面与所选的坐标平面平行,如图 1-3 为直角坐标 (x, y, z) 和圆柱坐标 (r, θ, z) 下点应力状态的几何表示,它的数学表达式分别为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

或

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

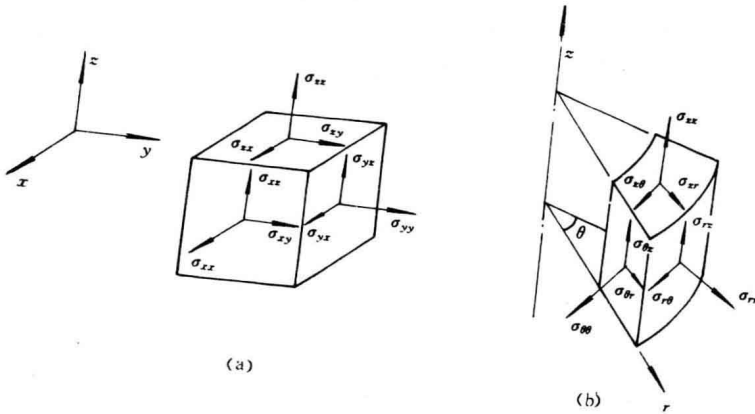


图 1-3 点的应力状态的几何表示
(a)直角坐标； (b)圆柱坐标

在上述表达式中，下标 $i=j$ 时为正应力， $i \neq j$ 时为切应力，但在式(1-5)中，正应力用 σ 表示，仅用一个下标，切应力用 τ 表示，用两个下标。本书在以后将采用式(1-5)形式的表达式。显然，我们不应该把应力分量和应力状态这两个不同的概念相混淆，应力分量是相对于某一截面而说的，它的方向和大小随截面方位的变化而改变，由方程式(1-1)定义，过一点可以有无限多个应力分量，在三维坐标系中，应力分量是一个向量，由三个元素描述。点的应力状态不是某一截面上的应力，而由过该点三个互相垂直平面上的 9 个应力分量来描述，由方程式(1-4)、(1-5)来定义，并称为应力张量，它由 9 个元素组成，每一个元素就是一个应力分量，称为应力张量的分量。应力分量随坐标的变化而改变，而应力状态或应力张量是不随坐标而改变的。

1.3 主应力和主切应力

要了解应力分量随坐标而变化的全貌，应力圆是一个有用的工具。图 1-4 为一般应力状态下的应力圆，三个应力圆同横坐标有三个交点，表示了三个互相垂直的平面。在这些平面上，切应力等于零，正应力达到极值。切应力为零的平面称为主平面。作用在主平面上的正应力称为主应力，通常用 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 表示，下标 1、2、3 为主应力的方向。应力圆的半径为切应力的极值，切应力的极值共有 6 个，它们分别作用在两两正交的 6 个平面上，达到极值的 6 个切应力称为主切应力，其所在的平面称为主切平面。从应力圆上可以看到，主切平面与主平面成 45° 的夹角，主切应力与主应力在数值上有如下的关系：

$$\left. \begin{aligned} \tau_{12} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \tau_{23} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ \tau_{13} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

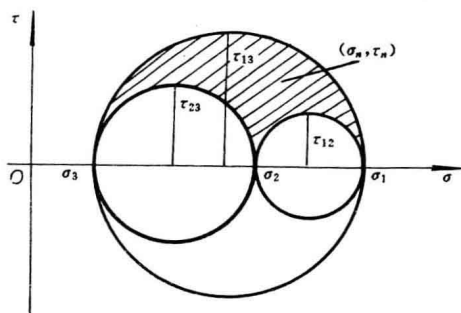


图 1-4 应力圆上的主应力和主切应力

在 6 个主切应力中,绝对值最大者称为最大切应力,用 τ_{\max} 表示,它在塑性理论中有重要的意义。如果按代数值规定了主应力有如下的关系: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, 则 $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, 在这种情况下,称 σ_1 为最大主应力,它是过一点的正应力的上限,称 σ_3 为最小主应力,它是过一点的正应力的下限, σ_2 为中间主应力,任意截面上的应力 σ_n 和 τ_n 表示在三个应力圆之间的阴影面积内,其变化范围为: $\sigma_3 \leq \sigma_n \leq \sigma_1$, $0 \leq \tau_n \leq \tau_{\max}$, 应该指出的是,主应力之间的关系是按代数值规定的,切应力之间的关系是按绝对值规定的。

以上是用应力圆图解的方法讨论主应力和主切应力,下面将以解析的方法来讨论主应力和主切应力,并从中引出应力张量不变量的概念。

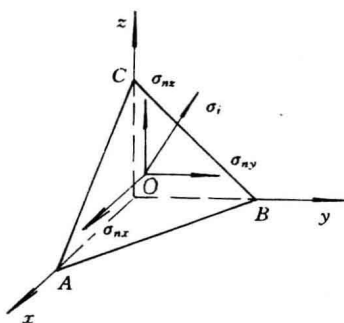


图 1-5 主应力和主平面

设过 O 点的三个坐标平面上的 9 个应力分量为已知,斜面 ABC 为过该点的一个主平面,它的外法线 n 与坐标轴的方向余弦 l, m, n 和主应力 σ_i 待定,见图 1-5。将 σ_i 沿三个坐标方向分解为 σ_{nx}, σ_{ny} 和 σ_{nz} , 则有: $\sigma_{nx} = \sigma_i l, \sigma_{ny} = \sigma_i m$ 和 $\sigma_{nz} = \sigma_i n$, 根据式(1-3), 可得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i l &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \sigma_i m &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ \sigma_i n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \text{或} \left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_i) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0 \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma_i) m + \tau_{zy} n &= 0 \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma_i) n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

上式是关于 l, m, n 的线性方程组, 且有非零解(因为 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$), 因此, 该方程组的系数行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0 \quad (1-8)$$

展开后得

$$\begin{aligned} \sigma_i^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \sigma_i^2 - (\tau_{xy} \tau_{yx} + \tau_{zy} \tau_{yz} + \tau_{zx} \tau_{xz} - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x) \sigma_i \\ - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} + \tau_{xz} \tau_{zy} \tau_{yx} - \sigma_x \tau_{zy} \tau_{yz} - \sigma_y \tau_{xz} \tau_{zx} - \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yx}) = 0 \end{aligned} \quad (1-9)$$

解方程(1-9), 可得 σ_i 的三个实根, 它们就是表示该点应力状态的三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 将三个主应力的值分别代入式(1-7), 可求得每个主平面的三个方向余弦, 并且可以证明, 这些主平面是互相垂直的。

对于同一点的应力状态, 如果采用 $x' y' z'$ 坐标代替原有的 xyz 坐标, 重复上述的做法, 可以得到一个相似的系数行列式, 展开后得到下式

$$\begin{aligned} \sigma_i^3 - (\sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_{z'}) \sigma_i^2 - (\tau_{x'y'} \tau_{y'x'} + \tau_{y'z'} \tau_{z'y'} + \tau_{z'x'} \tau_{x'z'} - \sigma_{x'} \sigma_{y'} - \sigma_{y'} \sigma_{z'} - \sigma_{z'} \sigma_{x'}) \sigma_i \\ - (\sigma_{x'} \sigma_{y'} \sigma_{z'} + \tau_{x'y'} \tau_{y'z'} \tau_{z'x'} + \tau_{y'z'} \tau_{z'x'} \tau_{x'y'} - \sigma_{x'} \tau_{y'z'} \tau_{z'y'} - \sigma_{y'} \tau_{z'x'} \tau_{x'z'} - \sigma_{z'} \tau_{x'y'} \tau_{y'x'}) = 0 \end{aligned} \quad (1-10)$$

由于主应力与坐标的选择无关, 方程式(1-9)和(1-10)的根应该相同, 因此, 该两式的系数必须相等, 可以把它们写成相同的形式, 即

$$\sigma_i^3 - I_1 \sigma_i^2 - I_2 \sigma_i - I_3 = 0 \quad (1-11)$$

式中 $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_{z'}$

$$\begin{aligned} I_2 &= \tau_{xy} \tau_{yx} + \tau_{yz} \tau_{zy} + \tau_{zx} \tau_{xz} - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x \\ &= \tau_{x'y'} \tau_{y'x'} + \tau_{y'z'} \tau_{z'y'} + \tau_{z'x'} \tau_{x'z'} - \sigma_{x'} \sigma_{y'} - \sigma_{y'} \sigma_{z'} - \sigma_{z'} \sigma_{x'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} + \tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz} \tau_{zy} - \sigma_y \tau_{zx} \tau_{xz} - \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yx} \\ &= \sigma_{x'} \sigma_{y'} \sigma_{z'} + \tau_{x'y'} \tau_{y'z'} \tau_{z'x'} + \tau_{y'z'} \tau_{z'x'} \tau_{x'y'} - \sigma_{x'} \tau_{y'z'} \tau_{z'y'} - \sigma_{y'} \tau_{z'x'} \tau_{x'z'} - \sigma_{z'} \tau_{x'y'} \tau_{y'x'} \end{aligned}$$

方程式的系数 I_1, I_2 和 I_3 同坐标的选择无关, 对于同一点的应力状态, 它们不随坐标变换而改变, 分别称它们为应力张量的第一、第二和第三不变量。

另一方面, 由于 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是方程式的根, 下述方程式必定成立, 即 $(\sigma_i - \sigma_1)(\sigma_i - \sigma_2)(\sigma_i - \sigma_3) = 0$, 展开后得 $\sigma_i^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \sigma_i^2 + (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \sigma_i - \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 0$, 因此,

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

可见, 采用应力主方向为坐标轴方向时, 可使应力状态的描述大为简化, 点的应力状态可用三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 表示

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

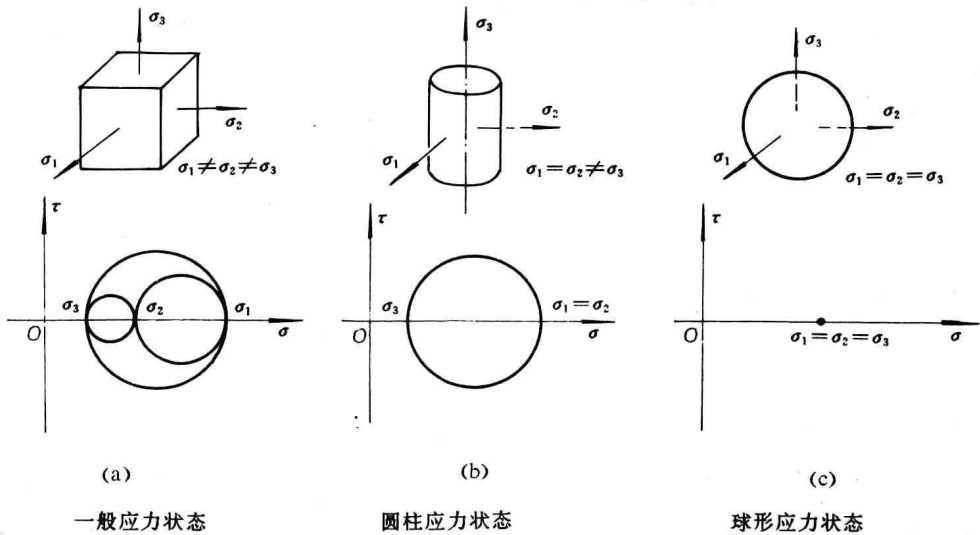


图 1-6 三种典型的应力状态及其应力圆
(a)一般应力状态;(b)圆柱应力状态;(c)球形应力状态

我们经常遇到以下三种应力状态:(1)一般应力状态,即三个主应力各不相等,由三个应力圆表示,有三个主平面,如图 1-6(a)。(2)圆柱应力状态,在三个主应力中有两个相等,例如 $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$,三个应力圆中有两个重合且蜕化为一个点,如图 1-6(b),因此在坐标轴 1-2 之间的任意截面上的切应力都等于零,也就是有任意多个主平面,且主应力都相等,形同于以坐标轴 3 为对称轴的一个圆柱面,圆柱面的半径表示主应力的大小。(3)球应力状态,三个主应力相等,三个应力圆重合且蜕化为一个点,过该点有无限多个主平面,且主应力都相等,形同于一个球,球的半径表示主应力的大小。由于在静止流体中任一点处的压力在各个方向都是相同的,因此,球应力状态也称流体静压力或静水压力。

过一点三个互相垂直平面上的 9 个应力分量为已知时,该点的主应力就唯一确定。为了求出主应力的大小,应用方程式(1-11)是十分方便的。下面举例说明:

例:已知一点的应力状态为(单位:100MPa) $\sigma_x = 10, \sigma_y = 5, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 3, \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$,求该点的主应力。

解:方程式(1-11)为 $\sigma_i^3 - I_1\sigma_i^2 - I_2\sigma_i - I_3 = 0, I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 15, I_2 = \tau_{xy}\tau_{yx} + \tau_{yz}\tau_{zy} + \tau_{zx}\tau_{xz} - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x = -41, I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} + \tau_{yx}\tau_{xz}\tau_{zy} - \sigma_x\tau_{yz}\tau_{zy} - \sigma_y\tau_{xz}\tau_{zx} - \sigma_z\tau_{xy}\tau_{yx} = 0$,因此得 $\sigma_i^3 - 15\sigma_i^2 + 41\sigma_i = 0$,解此方程得 $\sigma_1 = 11.4, \sigma_2 = 3.6, \sigma_3 = 0$ 。

下面讨论主切应力。设一点的主应力为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$,过该点任意截面上的全应力为 S_n 及其在主坐标方向上的应力分量为 σ_{n1}, σ_{n2} 和 σ_{n3} ,该截面上的正应力和切应力用 σ_n 和 τ_n 表示,截面与坐标轴的方向余弦为 l, m, n ,根据式(1-3),则有: $\sigma_{n1} = \sigma_1 l, \sigma_{n2} = \sigma_2 m, \sigma_{n3} = \sigma_3 n, S_n^2 = \sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + \sigma_{n3}^2 = (\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2, \sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$,因此, $\tau_n^2 = S_n^2 - \sigma_n^2 = (\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2$,化简后,得到下式:

$$\tau_n^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 l^2 n^2 \quad (1-14)$$

为了求出切应力 τ_n 的极值,将 $n^2 = 1 - l^2 - m^2$ 代入式(1-14),分别对 l 和 m 求偏导数,并令其值等于零,且取 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$,从而可得到 τ_n 为极值时的各组方向余弦 l, m, n 之值。其中, τ_n 取极小值(即 $\tau_n = 0$)时的方向余弦,表示了过该点的主平面, τ_n 取极大值时的方向余弦,表示了过该点的主切平面。将主切平面的各组方向余弦分别代入式(1-14),可求出各主切平面上的主切应力。现将以上结果列表如下:

	主平面			主切平面		
l	0	0	± 1	0	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$
m	0	± 1	0	$\pm 1/\sqrt{2}$	0	$\pm 1/\sqrt{2}$
n	± 1	0	0	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	0
切应力	0	0	0	$\pm(\sigma_2 - \sigma_3)/2$	$\pm(\sigma_1 - \sigma_3)/2$	$\pm(\sigma_1 - \sigma_2)/2$
正应力	σ_3	σ_2	σ_1	$(\sigma_2 + \sigma_3)/2$	$(\sigma_1 + \sigma_3)/2$	$(\sigma_1 + \sigma_2)/2$

1.4 球应力和偏应力

一点的应力张量可分解为两个应力张量之和:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

或 $\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + \sigma'_{ij}$

式中 $\sigma_m \delta_{ij} = \sigma_m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$ 称为球应力张量, $\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ 称为球应力张量的分量。 δ_{ij} 为单位矩阵。

$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$ 称为偏应力张量,其中的每个元素都称为偏应力张量的分量,仿照全应力张量的分析方法去确定偏应力张量的主应力和主方向,并得出与式(1-11)相似的表达式,即:

$$\sigma'^3_i - I_1' \sigma'^2_i - I_2' \sigma'_i - I_3' = 0 \quad (1-16)$$

式中 σ'_i —— 偏应力张量的主应力;

I_1', I_2', I_3' —— 偏应力张量的第一、第二和第三不变量,分别表示为

$$\begin{aligned} I_1' &= \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0 \\ I_2' &= -(\sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x) + (\tau_{xy} \tau_{yx} + \tau_{yz} \tau_{zy} + \tau_{zx} \tau_{xz}) \\ I_3' &= \sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z + (\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} + \tau_{yx} \tau_{xz} \tau_{zy} - \sigma'_x \tau_{yz} \tau_{zy} - \sigma'_y \tau_{xz} \tau_{zx} - \sigma'_z \tau_{xy} \tau_{yx}) \end{aligned} \quad (1-17)$$

式中 $\sigma'_x = \sigma_x - \sigma_m, \sigma'_y = \sigma_y - \sigma_m, \sigma'_z = \sigma_z - \sigma_m$,其中,偏应力张量的第二不变量 I_2' 在塑性理论中有着特殊重要的意义,这将在第3章中提到。

下面举例说明求球应力和偏应力的方法。

例：求下列情形的球应力和偏应力：(1)单向拉伸；(2)纯剪切；(3) $\sigma_1=3a, \sigma_2=2a, \sigma_3=-2a$ 。

解：(1)单向拉伸时的各应力分量为 $\sigma_1, \sigma_2=\sigma_3=0$ ，因此，球应力分量 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{\sigma_1}{3}$ ，偏应力分量 $\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_m = \frac{2}{3}\sigma_1, \sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_m = -\frac{\sigma_1}{3}, \sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_m = -\frac{\sigma_1}{3}$ 。

(2)纯剪切时的应力分量为 $\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$ ，球应力 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0$ ，偏应力分量即为原来的全应力分量，即 $\sigma_1' = \sigma_1, \sigma_2' = 0, \sigma_3' = -\sigma_1$ 。

(3) $\sigma_m = \frac{1}{3}(3a + 2a - 2a) = a, \sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_m = 2a, \sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_m = a, \sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_m = -3a$ 。

应该注意到，计算三个正应力之和时，是按代数值求和，而不是按绝对值求和，因此，应力分量的符号相同时，球应力较大，符号相反时，球应力较小。

1.5 主应力简图

主应力简图是采用主坐标系定性描述点应力状态的一种简化几何图形。用单元体表示物体内的一个点，画在单元体上的箭头仅表示主应力的指向而不表示它的大小，箭头向外表示拉伸应力，向内为压缩应力。可能的主应力简图有图 1-7 所示的 9 种。

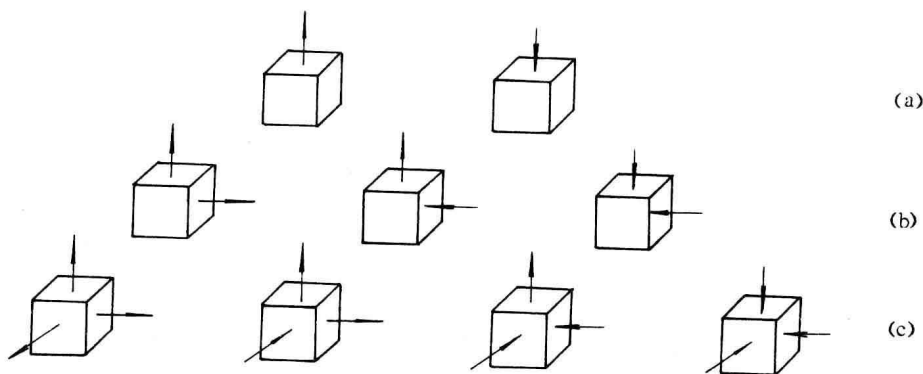


图 1-7 可能的主应力简图
(a)单向应力；(b)双向应力；(c)三向应力

全应力可分解为球应力和偏应力，因此，上述的主应力简图亦可分解为球应力简图和偏应力简图。

由于球应力状态的每个分量均相同，即 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ ，因此，可能的球应力简图仅有拉伸的和压缩的两种，即三向等量拉伸或者三向等量压缩。由于三个主偏应力分量必需满足 $\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$ ，因此，可能的偏应力简图仅有三种，即两向拉伸一向压缩、一向拉伸两向压缩和一向拉伸一向压缩。如图 1-8 所示。

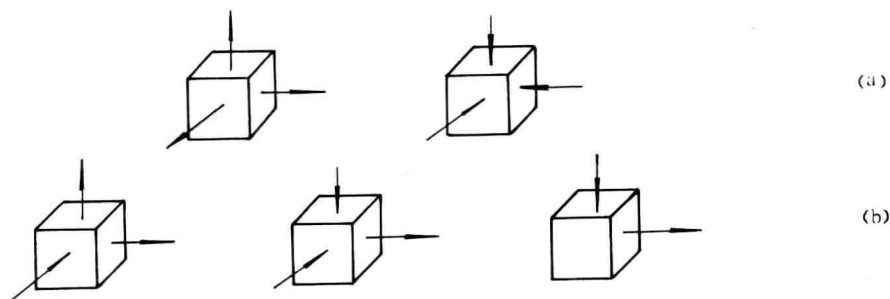


图 1-8 球应力简图和偏应力简图
(a)球应力;(b)偏应力

1.6 平衡微分方程

在一般情况下,物体各点的应力状态可能不相同,但是各点的应力状态之间不可能毫无联系,因为我们所研究的物体是处于平衡状态的,每个单元体上所受的力也应满足平衡条件,由一点到其附近的另一点,应力分量的变化必须服从这种平衡条件。现在讨论物体任一点 M 的平衡条件。点 M 的坐标为 x, y, z , 应力张量记为 σ_{ij} , 它的 9 个应力分量标记在过点 M 的三个互相垂直的平面上。设点 N 与点 M 无限接近, 其坐标为 $x+dx, y+dy, z+dz$, 应力张量为 σ_{ij}^N , 它的 9 个应力分量标记在过点 N 的三个互相垂直的平面上, 从而得到一个以 M 和 N 为对角顶点、边长为 dx, dy, dz 的平行六面体, 如图 1-9 所示。由于我们把研究

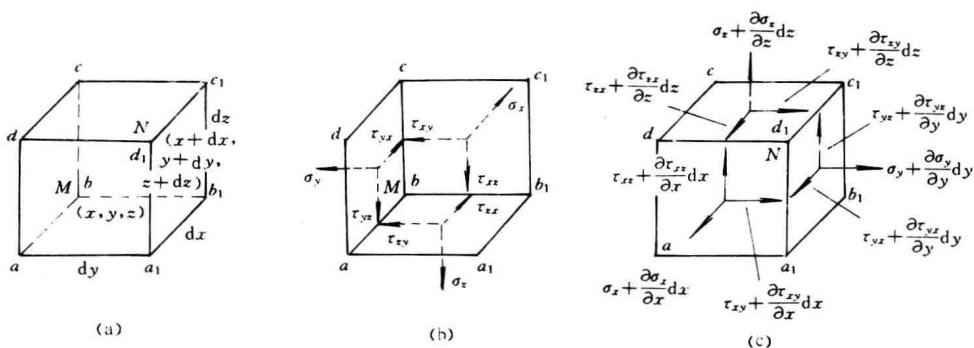


图 1-9 平行六面体各面上的应力分量

(a)平行六面体;(b)六面体背面的应力分量;(c)六面体正面的应力分量

对象设定为连续体,因此,每点上的应力分量都是该点坐标的函数,并且是连续可微的。首先讨论相距为 dy 的两个平面 $abcd$ 和 $a_1b_1c_1d_1$ 上正应力之间的关系。作用在平面 $abcd$ 上的正应力表示为 $\sigma_y = f(x, y, z)$, 作用在平面 $a_1b_1c_1d_1$ 上的正应力表示为 $\sigma_{y1} = f(x, y+dy, z)$, 将 σ_{y1} 按泰勒级数展开, $\sigma_{y1} = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} (dy)^2 + \dots$ 由于 dy 是微分量, 可以略去二阶以上高阶微分量, 从而得到 $\sigma_{y1} = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$, 这就表明, 当沿着 y 坐标方向由一点移动微小距离 dy 到达另一点时, 应力分量产生变化, 变化的大小可相当精确地表示为其方向导数 $\partial \sigma_y / \partial y$ 与移动距离 dy 的乘积 $(\partial \sigma_y / \partial y) dy$, $\partial \sigma_y / \partial y$ 表示了 σ_y 沿 y 轴的变化率。同样, 该平面上的其它两个应力分量表示为 $\tau_{y_1x_1} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$, $\tau_{y_1z_1} = \tau_{yz} + (\partial \tau_{yz} / \partial y) dy$ 。其余两个平面上的应力分

量可按上述方法导出,它们已标明在图 1-9(c)上。前面所研究的物体处于平衡状态,并满足以下六个平衡方程,即:三个静力平衡方程 $\sum F_x=0$ 、 $\sum F_y=0$ 、 $\sum F_z=0$,三个力矩平衡方程 $\sum M_x=0$ 、 $\sum M_y=0$ 、 $\sum M_z=0$ 。按照标明在图 1-9 上六面体各面上的应力分量,考虑 $\sum F_x=0$,即作用在六面体上各面的力在 x 轴上投影的总和等于零,

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \sigma_x dydz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dx dy = 0$$

六面体的体积 $dx dy dz \neq 0$,因此,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

分别考虑 $\sum F_y=0$ 和 $\sum F_z=0$,可得到另外两个方程:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

再考虑力矩平衡方程 $\sum M_x=0$,即作用在六面体上各面的力对于 x 轴的力矩总和等于零。当把坐标的原点移动到六面体的中心上,即互相平行的两个平面的中心线与坐标轴重合,这样,对 x 轴有力矩的应力分量仅有 4 个: τ_{yz} 、 τ_{zy} 、 τ_{yz_1} 、 $\tau_{z_1y_1}$,得到的力矩平衡方程为

$$\left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dx dy \frac{dz}{2} + \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} - \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} = 0$$

从各项中消去 $dx dy dz$,并略去微分小量,可得

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

再分别考虑 $\sum M_y=0$ 和 $\sum M_z=0$,得到另外两个方程:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{和} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

根据上面微分六面体平衡条件的讨论,得到了两组方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

方程式(1-18)表明了物体内任一点各应力分量沿着坐标方向变化所要遵守的条件,方程式(1-19)表明了过物体内任一点相互垂直面上且其方向垂直于两面交线的切应力分量必定大小相等,这一结果又称为切应力互等定理。根据这个结果,点应力状态的 9 个应力分量中,仅有 6 个是独立量,即三个正应力分量和三个独立的切应力分量,故今后在切应力两