高等学校研究生教材

系统辨识

武良臣　王裕清

焦作矿业学院

一九九四年二月

前　　言

系统辨识是现代控制理论的一个重要分支，它不仅在生产过程及工程实际中，而且在生物学、生态学、环境科学乃至社会科学中的人口学、经济学等诸多领域都得到了广泛的应用。所以系统辨识是一门蓬勃发展并得到广泛应用的新兴领域。国外学者称之为"一口袋技巧"。有些侧面目前仍然在研究之中。显然，把系统辨识方面比较成熟的理论及行之有效的方法写成供学习的教材是非常必要的。

本教材以离散、线性、定常、动态系统为主要研究对象，系统地介绍了系统辨识的基本理论和方法。主要内容是讨论如何根据动态系统的试验数据求取系统的数学模型以及状态估计等问题。全书共分十章，第一章主要介绍系统辨识概念及系统模型的数学描述。第二章介绍线性动态模型的参数辨识的最小二乘法。第三章介绍了系统脉冲函数的辨识法(相关辨识法)。第四章第五章介绍了不考虑和考虑系统干扰的情况下，实现无偏估计系统模型参数的方法。第六章介绍了最大似然估计。第七章介绍了模型定阶及闭环辨识。第八章介绍非线性系统的辨识问题。第九章介绍了实际系统的状态空间表达式及估计系统状态的最小方差理论。第十章介绍了卡尔曼滤波的基本理论及卡尔曼滤波、推广的卡尔曼滤波在参数估计中的应用，并以车削加工的智能监视和诊断系统、动态测温模型的参数估计作为实例。

本教材可作为流体传动与控制、机械制造、化工、计算机应用等专业研究生的教学用书，或本科生高年级的选修课教材，对从事本领域的科技人员亦有较大的参考价值。

系统辨识是一门新兴学科，目前仍处在发展阶段。本书是在给研究生上课的讲稿基础上整理而成。由于作者水平所限，书中错误和疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

1994 年 2 月

目　　录

第一章　系统辨识概述

§1—1　系统辨识的基本概念

一、系统辨识问题的提出

三十年代以前，人们在劳动生产、社会生活以及对天文、气象等科学的研究过程中，经常遇到大量的数据资料需要处理。当时，概率统计中统计回归方法等为实验数据进行去粗取精、去伪存真的分析整理提供了可能途径。三十年代末到五十年代末，由 H. Nyquist 所倡导的试验法丰富了经典理论，但仅限于对系统动态特性传递函数或脉冲响应的研究。然而，六十年代以后，随着现代控制理论的迅速发展，卡尔曼滤波技术的广泛应用，过程控制特别是计算机技术的不断开发，一门崭新的，在理论上和方法上都有着鲜明特色的学科"系统辨识"逐渐形成、发展而日臻完善起来。八十年代以来，由于大系统、系统工程及智能系统等需要，系统辨识已有效地应用于空间技术、生物医学系统、经济系统、机器人工程等领域。这些领域都提出一类共同关心的问题，即如何从受到随机干扰的局部观测资料出发，用数字计算机对其进行处理，来确定一个系统或过程的数学模型。

过去，建立数学模型的方法通常有两种。一种方法是以理论分析为主，加上必要的实验测试，以确定理论模型中的某些参数。这样建立的数学模型，物理概念明确，但模型阶次很高，必须根据经验作大量简化，才能实用，而且相应的实验复杂，精度高。此外，建立系统的数学模型，必须对系统的物理过程或化学过程有详尽了解。另一种方法是根据动态实验，作出频域的波德图或时域的阶跃响应曲线，再用三阶以下的典型数学模型去逼近。

系统辨识方法建立的数学模型精度高，能够满足最优控制及自适应控制理论发展的需要。它是通过对系统进行动态测试，将获得的输入及输出信号数据经过计算机处理，迅速地建立系统数学模型。这种模型能更准确地反映系统当时的状态，而不受许多未知条件的限制，而且能在不清楚物理机理的情况下，建立系统的数学模型。所以近年来在控制工程、机械、动力、化工、地质、气象、生物和经济等领域，利用系统辨识可对一个过程进行控制、预报、决策、诊断和认识。

二、系统辨识的定义

通俗地说，系统辨识是研究怎样利用未知系统的试验或运行数据（输入、输出数据）来建立系统数学模型的学科。早在 1962 年，扎德（Zadeh）就对"系统辨识"作如下定义："根据对已知输入量的输出响应的观测，从一类系统中确定一个与所观测的系统是等阶的系统"。根据这个定义，在系统辨识过程中，必须确定三方面的问题：第一，必须指定一类系统，即根据已经掌握的关于待辨识系统的知识确定它属于哪一类，例如，是静态的还是动态的，线性的还是非线性的，参数是定常的还是时变的，是确定的还是随机的等等。第二必须规定一类输入信号。通常的输入信号有正弦、阶跃、脉冲、白色噪声、伪随机信号等。第三，必须规定"等价"的含义。对于两个系统，仅当对所有可能的输入值来说它们的输入输出信号特性全部相

同时,它们才是等价的。

图 1—1 示出了一个带输入和输出的待辨识的系统,要寻找的数学模型就是在所有时刻上输入与输出之间关系的数学表达式。为了找到这种模型,可对系统施加各种输入,并观测它的响应,然后对输入、输出数据进行处理,便可得到数学模型表达式。

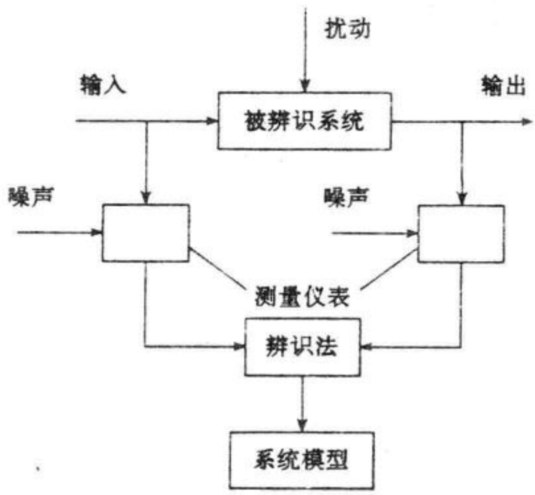

图1—1　系统辨识问题方块图

三、系统辨识问题的分类

系统辨识可按下列不同原则进行分类:

1. 按照需要的系统先验知识的多少,可分为黑箱问题及灰箱问题。前者又叫完全辨识问题,这里被辨识系统的基本特征完全不知道,例如,系统是线性的,还是非线性的,是动态的还是静态的,这些最基本信息都一无所知。要解决这类问题很困难,目前尚无有效方法。灰箱问题又叫不完全辨识问题。在这类问题中,已知系统的一些基本特性,如系统是否线性,通频带的大致值等。不能确切知道的只是系统动态方程的阶次及方程的系数值。工程上大多数问题都属于这一类。目前,这类问题已研究很多,特别是参数估计问题,是整个系统辨识领域中最重要,也是研究得最成熟的部分。

2. 按照待辨识对象的数学模型采用何种类型,可分为集中参数与分布参数,连续时间与离散时间,确定性与随机性,参数模型与非参数模型等。

3. 按照采用什么形式的输入信号,可分为阶跃、正弦、脉冲、白噪声及伪随机信号等。

4. 按照采用什么样的辨识方法可分为相关辨识法、最大拟然法、广义最小二乘法、Levy 法等。

四、系统辨识的步骤

在辨识前必须首先明确辨识目的,因为模型应用的场合不同,辨识目的是不同的,而目的不同,辨识精度要求及模型形式也会随之而异。系统辨识工作大体上按下述步骤进行:

1. 确定系统数学模型的表达形式。一般根据对象的性质和控制方法，决定用微分方程、差分方程、脉冲响应函数和状态方程等中的任一种。

2. 设计试验并记录需要的输入及输出数据。试验设计包括选择变量，选择适当的试验信号，选择采样速率，辨识允许的时间及确定测量仪器装置等。如果被辨识的系统在正常运转时不允许加入试验信号，那么只能利用系统运行时的输入输出数据进行辨识，这常常需要在系统是闭环的条件下进行辨识。

3. 根据输入及输出数据进行参数估计。在灰箱问题中，所需要辨识的只是系统动态方程的阶次及方程的系数值。当测得输入输出数据并给定模型方程的阶次后，问题就归纳为确定一种最优化准则，然后用优化的方法确定模型参数，使模型与数据能最好地拟合。除了参数估计外，有时还需要进行状态估计。

4. 模型的校验。如果模型是从一种工况取得的数据获得的，则必须针对其他工况，或设计新的试验方法来对模型性能进行校核，以便尽早地揭示出模型存在的问题。如果校核试验顺利通过，则系统辨识工作结束，否则就需要选择另一种模型，重复上述步骤，直至模型校核试验通过。

建模步骤如图 1—2 所示。

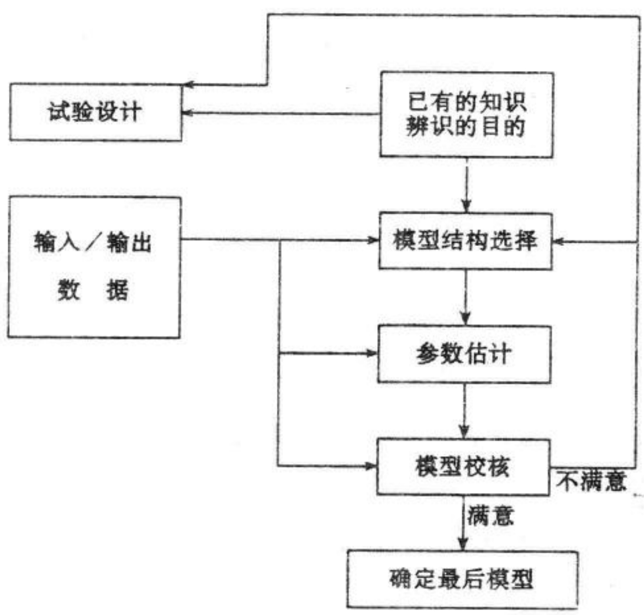

图1—2　建模步骤框图

五、系统辨识的两种模式

1. 离线(脱机)辨识

这种辨识模式是先观测全部输入、输出数据，并记录下来，然后再对所有记录数据进行估计。

2. 在线(联机)实时辨识

这种辨识模式是在每一个数据集合上递推地进行参数估计计算，因此新数据可以用来校正和刷新已经进行的估计。显然如果刷新过程可以很快进行，就可以相当准确地获得时变系统的参数估计，这种辨识方法称为在线实时辨识。

§1—2　动态系统的描述方法

用作系统辨识的数学模型应该使被辨识的参数尽量少，计算工作量尽可能小，同时数学模型本身要简单、使用方便。因为系统辨识大多是通过数字计算机来实现的，所以本节只介绍离散时间的三种最常用的描述方法，即差分方程描述、状态方程描述及脉冲响应函数描述。在前两种描述中，系统的动态特性可用模型的几个参数来表征，辨识的任务主要是确定这些参数，因而这两种模型叫参数模型。在脉冲响应函数描述中，系统的动态特性是用时间响应曲线来表征的，辨识的任务是确定一个时间序列，因而这种描述方法构成的模型叫做非参数模型。由于微分方程式是时域中用来描述系统动态过程很重要的数学表达式，而且一般微分方程都可以化成差分方程，所以首先介绍微分方程，然后再介绍三种描述方法的模型形式。

一、微分方程与传递函数

设输入量为 u(t)，输出量为 y(t)，一个线性连续系统微分方程可写成

$$a_0\frac{d^ny}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_ny=b_0\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+b_1\frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}}+\cdots+b_{n-1}u \tag{1-1}$$

令 $p=\frac{d}{dt}$ 称为微分算子，则上式可改写成

$$a_0p^ny+a_1p^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}py+a_ny=b_0p^{n-1}u+b_1p^{n-2}u+\cdots+b_{n-1}u$$

$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n)y=(b_0p^{n-1}+b_1p^{n-2}+\cdots+b_{n-1})u$$

$$\frac{y(t)}{u(t)}=\frac{b_0p^{n-1}+b_1p^{n-1}+\cdots+b_{n-1}}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n} \tag{1-2}$$

当系数 $a_0,a_1,\cdots a_n,b_0,b_1,\cdots b_{n-1}$ 均为常数，称为线性定常（时不变）系统，若它们是时间 t 的函数，则为线性时变系统。

设初值为零，将式（1—2）中 p 用 s 代替，则得传递函数

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{b_0s^{n-1}+b_1s^{n-2}+\cdots+b_{n-1}}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}=G(s) \tag{1-3}$$

所以传递函数是输出量与输入量的拉氏变换之比。

式（1—3）可分解为如下形式

$$G(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\cdots(s-z_{n-1})}{(s-r_1)(s-r_2)(s-r_3)\cdots(s-r_n)} \tag{1-4}$$

令上式分母部分等于零，就是系统的特征方程式，其根 $r_1,r_2,\cdots r_n$ 为 G(s) 的极点。G(s) 的分子部分的根 $z_1,z_2,\cdots z_{n-1}$ 称为零点。这些极点与零点形式（是复数还是实数）及数值就决定了系统的动态特性。

二、差分方程描述

差分方程是用来辨识系统最常用的数学模型。对连续系统也可以看作离散系统，用差分方程来描述系统的动态特性。后面讨论的辨识方法，大多数属于这种情况。首先，讨论单输

入、单输出的线性时不变系统，如图 1－3 所示。

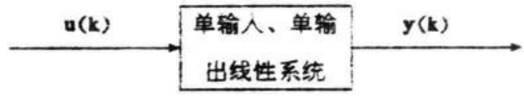

图1－3 单输入单输出系统

设输入为u(k)，输出为y(k)，两者之间的关系可用一个 n 阶差分方程描述：

$$y(k)+a_1y(k-1)+\cdots+a_ny(k-n)$$
$$=b_0u(k)+b_1(k-1)+\cdots+b_nu(k-n)$$

或 $$y(k)+\sum_{i=1}^{n}a_iy(k-i)=\sum_{j=0}^{n}b_ju(k-j) \qquad (1-5)$$

式中：k—离散时间的序数，取正整数；

n—系统的阶次；

a_i,b_j—常系数$(i=1,2,\cdots,n;j=0,1,\cdots,n)$，辨识中待定未知数。

差分方程的写法较多，例如，它也可以写成如下形式

$$y(k+n)+a_1y(k+n-1)+\cdots+a_ny(k)=b_0u(k+n)+b_1u(k+n-1)+\cdots+b_nu(k)$$

引入时间平移算子 q，定义为 $q^{-1}y(k)=y(k-1)$

并引入多项式 $A(q^{-1})=1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+\cdots+a_nq^{-n}$

$$B(q^{-1})=b_0+b_1q^{-1}+b_2q^{-2}+\cdots+b_nq^{-n}$$

于是(1－5)式可写成以下算子形式：

$$A(q^{-1})y(k)=B(q^{-1})u(k) \qquad (1-6)$$

为了找到单输入单输出线性时不变系统的差分方程与传递函数描述之间的简单关系，对(1－5)式进行 z 变换，令初始条件为零，则

系统传递函数 $$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}} \qquad (1-7)$$

或 $$H(s)=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

当输入、输出之初始值为零时，z^{-1}与 q^{-1}是等价的。

对于实际系统，常有随机噪声干扰，会产生量测误差。此外，模型本身也有误差，所以辨识带有随机误差，因此(1－6)式可写成如下形式

$$A(q^{-1})y(k)=B(q^{-1})u(k)+\varepsilon(k) \qquad (1-8)$$

差分方程(1－5)的描述可以推广到多输入多输出的线性时不变系统中。设系统如图 1－4 所示，它有 m 个输入和 y 个输出。输入和输出可用以下向量表示：

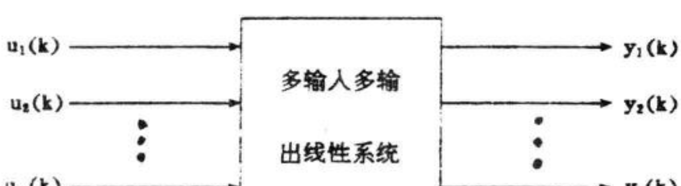

图1－4 多输入多输出系统

$$U(k)=\begin{bmatrix}u_1(k)\\u_2(k)\\\vdots\\u_m(k)\end{bmatrix}; \qquad Y(k)=\begin{bmatrix}y_1(k)\\y_2(k)\\\vdots\\y_r(k)\end{bmatrix}$$

向量差分方程为 $Y(k)+\sum_{i=1}^{n}A_iY(k-i)=\sum_{j=1}^{n}B_jU(k-j)$ (1—9)

式中：A_i,B_j—分别为 $r\times r$ 和 $r\times m$ 维常数矩阵。

如采用算子形式，上式为 $A^*(q^{-1})Y(k)=B^*(q^{-1})U(k)$

式中：$A^*(q^{-1})=I+A_1q^{-1}+\cdots+A_nq^{-n}$ $B^*(q^{-1})=B_0+B_1q^{-1}+\cdots+B_nq^{-n}$，I 为单位矩阵。

三、脉冲响应描述（或权序列描述）

所谓脉冲响应就是一个松驰系统（系统中贮能元件没有贮存任何能量的系统）在 $k=0$ 时，加一个单位脉冲函数激励后，输出响应的序列 $\{h(i)\}(i=0,1,2,\cdots)$ 就称为系统的脉冲响应（或权序列）。因而，系统的输出响应 $y(k)$ 可以用脉冲响应与输入信号的卷积来表达，即

$$y(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(k-i)u(i)$$

由于实际系统的响应时间总是有限的，假设 $i>p$ 时，输出响应已衰减到可以忽略的程度，或者权序列值已很小，此时上式可简化为下列近似形式：

$$y(k)=\sum_{i=k-p}^{k}h(k-i)u(i) \tag{1—10}$$

必须指出，脉出响应与差分方程的系数之间存在着一定关系。因为脉冲响应的 Z 变换就是脉冲传递函数，即

$$Z[h(k)]=H(z)$$

而 $$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}=h_0+h_1z^{-1}+\cdots \quad (h_i=h(i)) \tag{1—11}$$

所以 $$b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}=(h_0+h_1z^{-1}+\cdots\quad)(1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n})$$

比较上式两边 z^{-i} 项的系数可得

$$\begin{cases}\sum_{m=0}^{k}a_mh_{i-m}=\begin{cases}b_i & i=0,1,\cdots,n\\ 0 & i>n\end{cases}\\ 令\ a_0=1\end{cases} \tag{1—12}$$

上列方程表明了差分方程中的系数 a_i,b_i 与脉冲响应 $h(i)$ 之关系。(1—10)式是单输入单输出情况下系统的输出响应，这一关系可以推广到多输入多输出系统中。

设系统有 m 个输入 y 个输出，则脉冲响应函数将相应地变成脉冲响应阵 $H^*(k)$：

$$H^*(k)=\begin{bmatrix}h_{11}(k)\cdots\cdots h_{1m}(k)\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ h_{r1}(k)\cdots\cdots h_{rm}(k)\end{bmatrix} \tag{1—13}$$

式中 $h_{ij}(k)$ 为第 j 个输入对第 i 个输出的脉冲响应。

因此，系统的输入输出关系可用以下矩阵多项式表达：

$$Y(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}H^*(k-i)U(i) \tag{1—14}$$

式中 $Y(k),U(i)$ 为相应的输出与输入向量。

图 1—5 形象地表示了这一多变量系统输入与输出之间的关系。

四、状态方程描述

微分方程、传递函数等只能描述系统输入和输出关系，称外部模型；要描述系统内部的

联系，用状态方程。对连续性型单输入输出的状态方程，可由一般微分方程转换而得。设微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n y=b_{n-1}u(t) \tag{1-15}$$

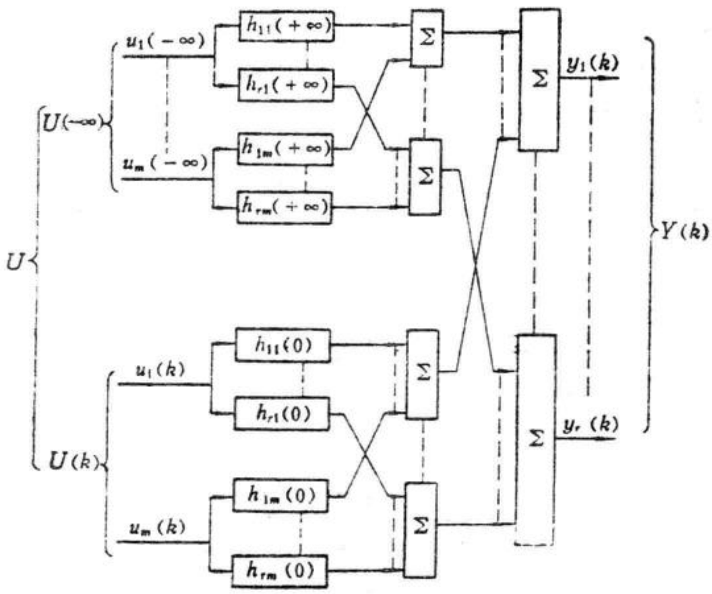

图 1—5 有 m 个输入 r 个输出的多变量系统中，输入输出的关系

引入 n 个内部状态变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$

$$x_1(t)=y(t)$$
$$\dot{x}_1(t)=0+x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=0+0+x_3(t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_{n-1}(t)=0+0+0+\cdots+x_n(t)$$
$$\dot{x}_n(t)=-a_n x_1-a_{n-1}x_2+\cdots+a_1 x_n+b_{n-1}u$$

写成矩阵形式 $\dot{X}=AX+BU$ (1—16)

式中 $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$， $A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&0&&1\\-a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$

输出方程变为 $Y=[1\quad 0\cdots 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$

$$Y=Cx \tag{1-17}$$

式中　　　　　　$C=[1\quad 0\cdots 0]$

对于离散系统可用以下状态方程和输出方程来描述

$$\begin{aligned} x(k+1)&=\varnothing X(k)+\Gamma u(k)\\ y(k)&=HX(k)+Du(k) \end{aligned} \qquad (1-18)$$

式中　$x(k)$—n 维状态向量；

$u(k)$，$y(k)$—分别为单输入单输出；

$\varnothing$，Γ，H，D—分别为 $n\times n$，$n\times 1$，$1\times n$，1×1 维参数矩阵。

式(1－18)可用图 1－6 表示。

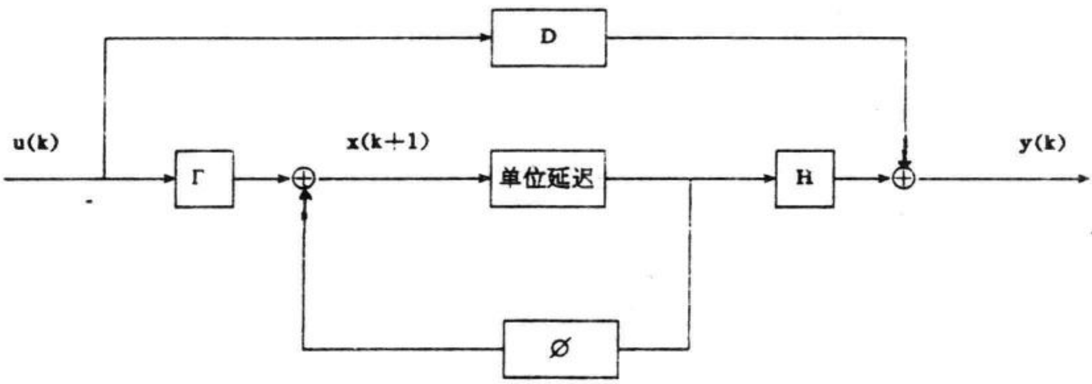

图1－6　系统的状态空间表达

这里假定状态变量系统是能控的和能观的，即 X、G 是能观的，Γ、D 是能控的。上式与差分方程及脉冲响应函数可以相互转换。下面给出式(1－18)与差分方程(1－5)的关系。这时

$$X(k)=\begin{bmatrix} x_1(k)\\ x_2(k)\\ \vdots\\ x_{n-1}(k)\\ x_n(k)\end{bmatrix}\quad X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\quad \Gamma=\begin{bmatrix} r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_{n-1}\\ r_n\end{bmatrix}$$

$$G=[1\quad 0\cdots 0\quad 0]$$

因此，式(1－18)中各矩阵式均可由差分方程系数来表达。

$$r_0=b_0$$

$$r_1=b_1-a_1r_0$$

$$r_2=b_2-a_1r_1-a_2r_0$$

$$r_n=b_n-a_1r_{n-1}-\cdots-a_{n-1}r_1-a_nr_0$$

$$D=r_0=b_0$$

式(1－18)状态方程在辨识时要确定 n^2+2n+1 个参数，而差分方程只要确定 $2n+1$ 个系数，所以状态方程不很实用。下面来介绍一种用线性变换将式(1－18)转换式所谓(规范

型)的方法，这种标准型具有最小待定参数的优点。

将式(1－18)中X(k)变换式一种新的状态矢量，即

$$X^*(k)=TX(k)$$

式中T是一个变换矩阵，它的组成为

$$T=[H \quad H\varnothing \cdots H\varnothing^{n-1}]^T$$

在新状态变量$X^*(k)$下(1－18)式变为

$$\begin{cases} X^*(k+1)=\varnothing^* X^*(k)+\Gamma^* u(k) \\ y(k)=H^* X^*(k)+Du(k) \end{cases}$$

其中$\varnothing^*$，H^*，Γ^*具有简单的形式

$$\varnothing=\left[\begin{array}{c:ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hdashline -\varnothing_n^* & -\varnothing_{n-1}^* & \cdots & -\varnothing_1^* \end{array}\right],\Gamma^*=T\Gamma=\begin{bmatrix} r_1^* \\ \vdots \\ r_n^* \end{bmatrix},H^*=[1 \quad 0\cdots 0]$$

应当指出，D实际上是一标量，它表示u(k)与y(k)之间的直接联系。由于在坐标变换中，u(k)及y(k)不变，所以D也不变。经过这样变换后，状态方程中的参数$\varnothing^*$，Γ^*及D中参数之和，共有2n＋1个，与差分方程中系数个数相等，而且两者参数之间的关系为

$$\begin{cases} \varnothing_i^*=a_i, \qquad i=1,2,\cdots n \\ D=b_0 \\ \begin{bmatrix} r_1^* \\ r_2^* \\ \vdots \\ r_n^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & 1 & & 0 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1-b_0a_1 \\ b_2-b_0a_2 \\ \vdots \\ b_n-b_0a_n \end{bmatrix} \end{cases}$$

将状态方程转换成差分方程，也可以很方便地得出上述关系。所有其他规范形都可单值地用2n＋1个参数来描述，同时所有这些规范形都可通过线性变换单值地互相转换。

对于多输入多输出系统，状态方程的形式不变，只是其中的Γ，H，D是具有一定维数的矩阵，它的规范形将更复杂，此处不介绍。

对状态方程(1－18)进行Z变换可得：

$$\begin{cases} ZX(z)=\varnothing X(z)+\Gamma U(z) \\ Y(z)=HX(z)+DU(z) \end{cases}$$

因此$(ZI-\varnothing)X(z)=\Gamma U(z)$，或$X(z)=(ZI-\varnothing)^{-1}\Gamma U(z)$

将它代入y(z)式可得$y(z)=H(ZI-\varnothing)^{-1}\Gamma U(z)+DU(z)$

所以脉冲传递函数$G(z)=\dfrac{Y(z)}{U(z)}=H(zI-\varnothing)^{-1}\Gamma+D$

上式表明了状态方程与传递函数之间的关系。

§1－3 系统辨识的应用概况

系统辨识的应用研究，不仅是解决各种实际问题的迫切需要，也是发展系统辨识理论的

正确途径。正因为如此，一些重要著作如 Goodwin 和 Payne 著的动态系统辨识一书已列为教材或作为主要参考文献。每年都有大量论文发表。1979 年我国首次派代表团参加了 IFAC 辨识会议。1982 年，在第六届 IFAC 辨识会议上，我国发表了 20 篇论文。1985 年这届会议收到论文予订本的论文 35 篇，在数量上占世界第三位。会上总共交流了 316 篇，其中应用方面的论文有 92 篇，占论文总数 29.9%，应用面在不断扩大，应用论文也愈来愈受到重视。1988 年的最近这届会议在北京召开，共录用论文 376 篇，其中国内论文 114 篇，占总数的 30.2%，实际上，会议程序委员会共收到论文摘要 821 篇，其中国内 436 篇。由于会议决定作为东道国的论文不超过总数的 1/4，这就可能最终拒收了一批实际上水平较高的国内论文，可见系统辨识在我国发展很快。下面略举例作一概略介绍。

例 1　我国人口模型参数辨识

如何应用系统辨识技术于人口系统，西安交通大学万百五、朱悦新教授根据1952年到1978年过去25年我国人口的统计数据，借助于系统辨识技术，研究了人口模型的参数估计问题，提出了一种经济而有效的方法。即根据过去非常有限的统计数据，利用按年龄留存率一种解析表达式及与之相应的辨识技术，得到了我国全国人口模型参数的辨识和预测结果。其有效性通过已往25年人口预测得到了验证，其中每年总人口的预测精度基本在 1%以内。

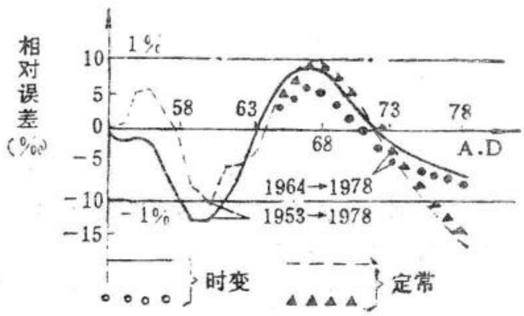

图 1—7　总人口推算精度图

例 2　自寻的导弹的自适应控制

人所共知，影响导弹命中目标的一个重要因素是制导律的选取。为此不少文献对制导律进行了大量研究。拦截问题是个非线性、随机时变不确定系统，如何拦截问题中能在飞行条件变化情况下辨识参数和估计状态，以便进行自适应控制，是一新的研究课题。对于十字型气动布局的导弹，其整个系统在误差允许范围内，可近似地分解成三个解耦子系统，即俯仰、偏航和倾斜通道，这样可以对三个子系统分别设计自适应控制器。

例 3　房室模型的建模与辨识

所谓“房室(Compartment)”是指有一定容量的容器，内含某一物质，并假定任何时刻，该物质都均匀分布于该容器内，且房室与房室之间以及房室与外界环境都可以遵守物质守恒定律进行物质交换。这个理想化的概念，最初是为了研究药物在机体内的分布、吸收、代谢和排泄等过程而引入的。所谓“房室模型”系指根据物质守恒定律写出房室系统的数学模型。房室模型在研究药物动力学以及生理动力学问题方面起着十分重要作用，其他在生态系统、化学反应动力学问题等系统也常用到。能否建立一个好的房屋模型，关键在于对所研究的课题的目的透彻了解，对理论结果与实验数据之间允许误差提出合理的要求，以及通晓系统辨识的各种建模方法。

以上可见系统辨识与其他新的分支、边缘学科和领域，例如自适应控制、预报、大系统模型简化、故障检测等相互联系、相互渗透着。目前已在生物医学系统、能源电子系统、能源电

力系统、飞行器和船舶操纵、环境系统及生产过程控制等方面得到极其广泛的应用。可以这样说一个国家应用系统辨识的广度和深度,在一定程度上反映了这个国家的工业发展程度和对新技术的重视程度。上面仅就系统辨识应用的一个或几个例子作了介绍。

近年来微处理机的迅速发展,作为系统辨识与反馈控制相结合而产生的自校正调节器得到广泛应用。但由于微处理机字长的限制,因而研究适用于微机应用的辨识新算法是十分迫切的。因为自校正调节器中辨识是在闭环状态下进行,所以闭环辨识问题的研究受到了极大关注,当然多变量系统的结构,参数辨识,辨识算法的收敛性,短样本长度建模等具有现实意义。如何把系统辨识成功的应用于分布参数系统,模糊系统,机器人工程、智能系统以及诸如人体科学等新的领域,已成为系统辨识的研究动向。

小　结

本章首先介绍了系统辨识的定义及分类,接着介绍了辨识的步骤,着重介绍了时域辨识的描述方法——微分方程与传递函数描述,差分方程描述,脉冲响应描述及状态方程描述。对于一个给定的离散系统可以用差分方程描述,脉冲响应描述及状态方程描述方法的任一种进行描述,而且这三种形式之间存在着唯一且明确的内在联系。此外,差分方程及脉冲响应函数是从系统外部描述输入、输出的关系,所以叫做系统的外部模型,而状态方程描述了系统的内部状态变量的联系所以叫做内部模型。最后介绍了系统辨识的应用概况,指出了系统辨识的研究动向。

复习思考题

1. 什么叫系统辨识?它是如何发展起来的?

2. 用系统辨识的方法建模与其他理论方法建模相比较有哪些特点?

3. 离散系统时域辨识的三种描述方法相互间存在怎样的内在联系?试分析三种描述方法适合的应用场合?

4. 系统辨识的研究动向如何?

第二章　最小二乘法

最小二乘法是数学家高斯(Karl Gauss)在1975年首先提出来确定行星轨道参数的。目前此法已应用到工程界的许多领域，已成为从实验数据来进行参数估计的主要手段，是最成熟、最基本的方法。它之所以应用广泛，是因为比其他方法容易理解，不需要数理统计知识，且在其他方法失败时，它能提供解答。在一定的条件下，用这种方法求得的估计值具有最优统计特性——无偏、有效和一致。此外，有许多用于系统辨识的估计算法可以演绎成最小二乘法程序，有可能通过最小二乘理论将一些辨识技术统一起来。

§2—1　线性方程组

一、线性模型

通常，观测值 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 与待测参数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之间的关系通常是线性的，或者可用线性关系来近似，称为线性模型。它可以表示为线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{2—1}$$

也可以写成矩阵的形式

$$AX=b \tag{2—2}$$

式中　$x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$ 是n维待估参数向量；

$b=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^T$ 是m维观测向量。

矩阵A为系数矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2—3}$$

增广矩阵 $\bar{A}$[m×(n+1)阶]为

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{2—4}$$

二、解的存在性和唯一性

线性方程组(2—1)或(2—2)解的存在性和唯一性与系数矩阵A的秩、增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩有关，n阶矩阵如果它的秩是n，则它称为满秩矩阵。否则叫降秩矩阵。

线性方程组解的判别定理

方程组(2—1)或(2—2)有解的充分必要条件是其系数矩阵A的秩R(A)与增广矩阵 $\bar{A}$

的秩 $R(\bar{A})$ 相等，即

$$R(A)=R(\bar{A}) \tag{2-5}$$

判别定理适用于任意线性方程，不论其方程的个数 m 与其包含的未知数的个数 n 是否相等；也不论系数矩阵 A 是否为满秩矩阵。

满足判别定理的线性代数方程组称为相容的，它必有解；可能只有唯一解，也可能有多个解。不满足判别定理的线性代数方程组称为不相容的，没有解。它也称为超定方程组。

线性代数方程组解的唯一性定理

若线性代数方程组(2－1)或(2－2)的系数矩阵 A 的秩 $R(A)=m<n$，则方程组有无穷多个解；若 $R(A)=m=n$，则方程组有唯一解。

显然，在 $R(A)=m$ 的条件下，方程组(2－2)必有解。在此条件下，若 $m<n$，则方程组的方程个数少于未知数的个数，则方程组有无穷多个解，这种方程组称为不定方程组；若 $m=n$，则其系数矩阵 A 为满秩矩阵，其逆 A^{-1} 存在，解存在且唯一。

三、最小二乘解和最小范数解

1. 最小二乘解

设方程组(2－2)是不相容的，即 $R(A)\neq R(\bar{A})$，则得方程组(2－2)两端右乘 A 的转置矩阵 A^T，得

$$A^TAX=A^Tb \tag{2-6}$$

称为正则方程组，如果正则方程组(2－6)的系数矩阵 A^TA 是满秩的，则定义

$$X=(A^TA)^{-1}A^Tb \tag{2-7}$$

为方程组(2－2)的最小二乘解。可以证明，A^TA 具有以下性质：

(1)对于任意 $m\times n$ 阶矩阵 A，若其秩为 r，则积 A^TA 的秩为 r，且是对称矩阵，

(2)若 A 的列向量线性独立，即其秩为 n，则积 A^TA 是对称的可逆的方阵。

2. 最小范数解

相似地，对于不定方程组(2－2)，可以定义它的最小范数解。

设方程组(2－2)是不定方程组，即 $R(A)=R(\bar{A})<n$，其解不唯一，若秩 AA^T 是满秩的，则称

$$X=A^T(AA^T)^{-1}b \tag{2-8}$$

是方程组(2－2)的最小范数解。

同样可以证明，AA^T 具有以下性质：

(1)对于任意的 $m\times n$ 阶矩阵 A，若其秩为 r，则积 AA^T 的秩为 r，且是对称方阵；

(2)若 A 的行向量线性独立，即其秩为 m，则积 AA^T 是对称的可逆的方阵(秩为 m)

3. 最小二乘解和最小范数解的唯一性和存在性

可以证明，若系数矩阵 A 的秩 $R(A)=n$，则由(2－7)式定义的方程组(2－2)式的最小二乘解存在的，并且是唯一的。

由于 $R(A)=n$，因此 $n\times n$ 的矩阵 A^TA 的秩也是 n，即 $R(A^TA)=n$，由此推出正则方程(2－6)存在唯一解 $x=(A^TA)^{-1}A^Tb$。从而证明当 $R(A)=n$ 时，方程组(2－2)的最小二乘解(2－7)存在且唯一，定义(2－7)有意义。