

# 數學解題規則



數學是由嚴密邏輯推演所架構成的學問，故所涉及的必有其一定的規則關係，我們只要循著理路去尋根溯源，再難的問題必可迎刃而解。美國近年來相當熱門的藉解題引導思考，以找出解答模式的教學方式，是學子的一大福音。

黃敏晃 編著

牛頓文庫

牛頓文庫

# 數學解題規則

牛頓出版社

## 數學解題規則

---

出 版 者 / 牛頓出版股份有限公司

負責人：高源清

編 者 / 黃敏晃

發 行 所 / 牛頓出版股份有限公司

地 址 / 臺北市和平東路二段107巷25號之1一樓

電 話 / 7059942 · 7061976 · 7061977 · 7062470

郵 撥 / 1179402-3牛頓出版股份有限公司

印 刷 / 江淮印刷廠

定 價 / 160元

初 版 / 1986年5月30日

再 版 / 中華民國77年11月15日

出版登記證 / 局版臺業字第3139號

法律顧問 / 林樹旺律師

● 版權所有 · 翻印必究 ●

本書如有缺頁、破損、裝訂錯誤，請寄回本社更換。

Printed in Taiwan, R. O. C. 1988

# 編者序

這本小冊子收集了十篇文章，除了兩篇文章（數學裏的極端化原則，與轉圈圈的數學）外，都是最近三年寫出來的作品。這些作品都分別刊登在中央研究院數學所出版的數學傳播與師大科教中心出版的科學教育月刊上。這些文章收集在這本小冊子前都曾經過部分的修正或改寫。

畢氏定理的一些推廣(一)，(二)與(三)，其實是一篇連續的文章，每篇討論了畢氏定理的兩種推廣。由於篇幅過長（達五萬多字），所以仍然分作三篇文章來處理。在構思此文時，本來計劃一路寫下去，數學傳播的編輯呂素齡小姐也在敲邊鼓說：「多寫幾種，這篇文章就可以單獨出一本小冊子！」但寫到第五與第六種推廣時，筆者已然感到江郎才盡。尤其是在材料的表達形式上，感到要把較深的數學結果，寫成門外漢可以看得懂的文章，實在有其極限！筆者才力有限，只能到此為止（其實，第五與第六種推廣原來登在數學傳播時，寫得不夠理想，現在改寫後稍為滿意）。

規律的尋求(一)，(二)，(三)及(四)，及古希臘人的天文測量這五篇文章，是筆者在台北市和平國中數學資優班講授的數學補充教材的一部分。筆者續同事楊維哲先生之後，有子就讀於該校該班，故援例去兼課教自己的小孩念數學（如果能易子而教，可能較好），到目前已然接近二學年，教材以應用學生已有的

數學知識解題爲主（本冊書名的來由在此），希望能兼照到數學的一般原則。由於國中生所學到的數學甚少，材料的收集真是費盡苦心。所以，在講完課之後，常有把教材寫下來的衝動。但衝動常常不能化爲行動（筆者也是血肉之軀，非寫作機器也），大部分的教材因此都沒寫出來。希望將來有時間，能把這些材料寫出來，當作這段經歷的留念。

黃敏晃

1986 年 5 月

於台大數學系

# 目 錄

|     |                      |     |
|-----|----------------------|-----|
| 第一章 | 規律的尋求(一)             | 7   |
| 第二章 | 規律的尋求(二)             | 21  |
| 第三章 | 規律的尋求(三)             | 39  |
| 第四章 | 規律的尋求(四)             | 55  |
|     | 1. 有趣的身份證號碼          | 57  |
|     | 2. 善用問題中的條件          | 61  |
|     | 3. 結果的檢驗             | 69  |
|     | 4. 孤獨的七              | 72  |
|     | 5. 結語                | 77  |
| 第五章 | 數學裏的極端化原則            | 79  |
| 第六章 | 轉圈圈的數學               | 95  |
| 第七章 | 畢氏定理的一些推廣(一)         | 109 |
|     | 1. 前言                | 111 |
|     | 2. 帶有“正”字標記的圖形       | 112 |
|     | 3. 畢氏定理的第一種推廣        | 117 |
|     | 4. 三角形的邊角關係的等式       | 122 |
|     | 5. 一個等式假設的檢驗         | 127 |
|     | 6. 畢氏定理的第二種推廣        | 131 |
| 第八章 | 畢氏定理的一些推廣(二)         | 139 |
|     | 1. 一種看法，兩條等式         | 141 |
|     | 2. 條件①式的檢查           | 144 |
|     | 3. 條件①式的發展           | 148 |
|     | 4. 畢氏定理的第三種推廣——托勒密定理 | 151 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 5. 條件②式的檢查與發展              | 155 |
| 6. 一個不等式的證明                | 157 |
| 7. 情況的羅列與簡化                | 161 |
| 8. 畢氏定理的第四種推廣——平行四邊形定理     | 166 |
| <b>第九章 畢氏定理的一些推廣(三)</b>    | 171 |
| 1. 維度的觀點                   | 173 |
| 2. 保持直線段的路線                | 175 |
| 3. 畢氏定理的第五種推廣——向量的長度公式     | 179 |
| 4. 餘弦定理在 $R^n$ 中的推廣——向量的內積 | 183 |
| 5. 捨去直線段的推廣路線              | 186 |
| 6. $R^n$ 上的 $n-1$ 維超平面     | 190 |
| 7. 幾何的建構方式                 | 193 |
| 8. 三角形與三角錐的代數結構            | 197 |
| 9. $n$ 維的單純錐               | 201 |
| 10. $n$ 維單純錐的單純結構          | 206 |
| 11. 畢氏定理的第六種推廣             | 214 |
| 12. 結語                     | 225 |
| <b>第十章 古希臘人的天文測量</b>       | 229 |
| 1. 為什麼古人要作天文測量             | 231 |
| 2. 把問題三角化                  | 236 |
| 3. 隧道之建造                   | 243 |
| 4. 地球的半徑                   | 247 |
| 5. 月亮有多遠                   | 252 |
| 6. 太陽有多遠                   | 256 |
| 7. 月球與太陽的半徑                | 262 |
| 8. 金星的軌道                   | 267 |

牛頓文庫

# 數學解題規則

牛頓出版社



# 編者序

這本小冊子收集了十篇文章，除了兩篇文章（數學裏的極端化原則，與轉圈圈的數學）外，都是最近三年寫出來的作品。這些作品都分別刊登在中央研究院數學所出版的數學傳播與師大科教中心出版的科學教育月刊上。這些文章收集在這本小冊子前都曾經過部分的修正或改寫。

畢氏定理的一些推廣(一)，(二)與(三)，其實是一篇連續的文章，每篇討論了畢氏定理的兩種推廣。由於篇幅過長（達五萬多字），所以仍然分作三篇文章來處理。在構思此文時，本來計劃一路寫下去，數學傳播的編輯呂素齡小姐也在敲邊鼓說：「多寫幾種，這篇文章就可以單獨出一本小冊子！」但寫到第五與第六種推廣時，筆者已然感到江郎才盡。尤其是在材料的表達形式上，感到要把較深的數學結果，寫成門外漢可以看得懂的文章，實在有其極限！筆者才力有限，只能到此為止（其實，第五與第六種推廣原來登在數學傳播時，寫得不夠理想，現在改寫後稍為滿意）。

規律的尋求(一)，(二)，(三)及(四)，及古希臘人的天文測量這五篇文章，是筆者在台北市和平國中數學資優班講授的數學補充教材的一部分。筆者續同事楊維哲先生之後，有子就讀於該校該班，故援例去兼課教自己的小孩念數學（如果能易子而教，可能較好），到目前已然接近二學年，教材以應用學生已有的

數學知識解題為主（本冊書名的來由在此），希望能兼照到數學的一般原則。由於國中生所學到的數學甚少，材料的收集真是費盡苦心。所以，在講完課之後，常有把教材寫下來的衝動。但衝動常常不能化為行動（筆者也是血肉之軀，非寫作機器也），大部分的教材因此都沒寫出來。希望將來有時間，能把這些材料寫出來，當作這段經歷的留念。

黃敏晃

1986 年 5 月

於台大數學系

# 目 錄

|     |                           |     |
|-----|---------------------------|-----|
| 第一章 | 規律的尋求(一).....             | 7   |
| 第二章 | 規律的尋求(二).....             | 21  |
| 第三章 | 規律的尋求(三).....             | 39  |
| 第四章 | 規律的尋求(四).....             | 55  |
|     | 1. 有趣的身份證號碼.....          | 57  |
|     | 2. 善用問題中的條件.....          | 61  |
|     | 3. 結果的檢驗.....             | 69  |
|     | 4. 孤獨的七.....              | 72  |
|     | 5. 結語.....                | 77  |
| 第五章 | 數學裏的極端化原則 .....           | 79  |
| 第六章 | 轉圈圈的數學 .....              | 95  |
| 第七章 | 畢氏定理的一些推廣(一) .....        | 109 |
|     | 1. 前言.....                | 111 |
|     | 2. 帶有“正”字標記的圖形.....       | 112 |
|     | 3. 畢氏定理的第一種推廣.....        | 117 |
|     | 4. 三角形的邊角關係的等式.....       | 122 |
|     | 5. 一個等式假設的檢驗.....         | 127 |
|     | 6. 畢氏定理的第二種推廣.....        | 131 |
| 第八章 | 畢氏定理的一些推廣(二) .....        | 139 |
|     | 1. 一種看法，兩條等式.....         | 141 |
|     | 2. 條件①式的檢查.....           | 144 |
|     | 3. 條件①式的發展.....           | 148 |
|     | 4. 畢氏定理的第三種推廣——托勒密定理..... | 151 |

|     |                            |     |
|-----|----------------------------|-----|
|     | 5. 條件②式的檢查與發展              | 155 |
|     | 6. 一個不等式的證明                | 157 |
|     | 7. 情況的羅列與簡化                | 161 |
|     | 8. 畢氏定理的第四種推廣——平行四邊形定理     | 166 |
| 第九章 | 畢氏定理的一些推廣(三)               | 171 |
|     | 1. 維度的觀點                   | 173 |
|     | 2. 保持直線段的路線                | 175 |
|     | 3. 畢氏定理的第五種推廣——向量的長度公式     | 179 |
|     | 4. 餘弦定理在 $R^n$ 中的推廣——向量的內積 | 183 |
|     | 5. 捨去直線段的推廣路線              | 186 |
|     | 6. $R^n$ 上的 $n-1$ 維超平面     | 190 |
|     | 7. 幾何的建構方式                 | 193 |
|     | 8. 三角形與三角錐的代數結構            | 197 |
|     | 9. $n$ 維的單純錐               | 201 |
|     | 10. $n$ 維單純錐的單純結構          | 206 |
|     | 11. 畢氏定理的第六種推廣             | 214 |
|     | 12. 結語                     | 225 |
| 第十章 | 古希臘人的天文測量                  | 229 |
|     | 1. 為什麼古人要作天文測量             | 231 |
|     | 2. 把問題三角化                  | 236 |
|     | 3. 隧道之建造                   | 243 |
|     | 4. 地球的半徑                   | 247 |
|     | 5. 月亮有多遠                   | 252 |
|     | 6. 太陽有多遠                   | 256 |
|     | 7. 月球與太陽的半徑                | 262 |
|     | 8. 金星的軌道                   | 267 |



# 1 規律的尋求(一)

---

這是筆者於民國73學年上學期，在臺北市和平國中一年級數學資優班，所講授的數學補充教材的一部分。

本文原刊載於科學教育月刊第77期；P.34~41，國立臺灣師範大學科學教育中心發行，民國七十四年二月出版。



數學所追求的目標之一，與其他自然科學一樣，是想在千變萬化的事物中，找出一些規律，使我們能探討事物變化的一些模式，進而預測將來的變化。當然，各門學科所研究的素材不同，研究的方式與方向就很不一樣了。例如：

1. 化學討論的素材是物質的化學變化的現象（如鐵在空氣中會氧化而生鏽），所以研究的方向是：在那些條件下，那些物質會起什麼化學變化，並且探討為什麼會這樣變化的原因。
2. 物理討論的素材是物品的物理變化的現象（如水的結冰），所以研究的方向是：在那些條件下，那些物質會起些怎樣的物理變化，並且追究其原因。
3. 數學討論的素材是數量與圖形，研究那些數量與圖形，在什麼條件下，會產生怎樣的關係。

由此看來，各學科所討論的現象（即素材）也許不同，但追求的目標則是一致的，即變化的規律。下面，我們先以簡單的例子來說明，在數學中我們如何尋找規律。

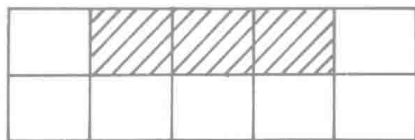


圖 1-1

例 1. 某泥水匠在一所房子的門口鋪設地磚時，習慣先鋪一行紅磚，然後在外面圍以白磚，如上圖所示（圖中帶斜線者表示紅磚）。



在上圖中，紅磚 3 塊，白磚 7 塊，共 10 塊。如果地磚較窄，或鋪地磚的地方增長，則使用的磚塊就會增加，但此泥水匠鋪地磚的習慣保持一定，則他鋪出來的地磚圖案，總是一致的。下圖是他所鋪的另一處地磚的圖案，用了五塊紅的 9 塊白的共 14 塊地磚。

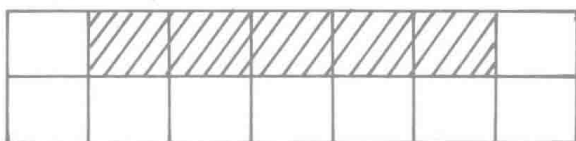


圖 1-2

如果紅磚的數目任意增加，我們如何算出白磚數目，與總共用去的磚塊數目呢？譬如說，假設他用了 200 塊紅磚，那麼他要用多少白磚？共用多少磚塊？

如果數目不是很大時，每個人都會把圖畫出來，然後加以點算。但 200 太大，畫圖很費事。即使要畫圖，也只能畫如下的示意圖：

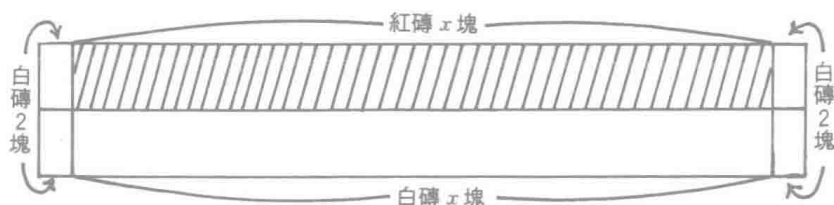


圖 1-3

由上面的示意圖可以看出，設他在上列鋪了  $x$  塊紅磚，則在下列也要用  $x$  塊白磚，另外邊上還得加上 4 塊白磚。所