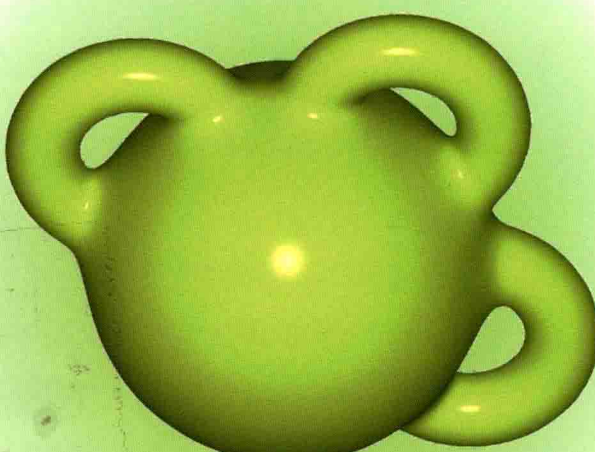
3-流形分解与内在空间图

SPLITTING OF 3-MANIFOLD AND INTRINSICALLY SPATIAL GRAPH

李 阳 著



中国原子能出版社

3-流形分解与内在空间图

李 阳 著

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

3-流形分解与内在空间图/李阳著. —北京:中国原子能出版社,2012. 9

ISBN 978-7-5022-5690-6

Ⅰ. ①3… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①拓扑流形-研究 Ⅳ. ①O189. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 219981 号

内 容 简 介

本书的主要工作是讨论了 3-流形的 D-分解、SD-分解、Heegaard 分解以及空间图理论中的若干问题。通过对曲面与 I 的乘积和压缩体的 D-亏格、SD-亏格,柄体的最小 SD-分解的唯一性及 3-流形的 2-亏格 Heegaard 分解中 Haken 球面的相关性等问题的研究,给出了一些 3-流形及其中一些曲面的拓扑性质。另外,给出了更大的一类空间图满足 Adams 猜想,这一结果有助于 Adams 猜想的完全解决。

3-流形分解与内在空间图

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100048)
责任编辑	孙凤春
技术编辑	冯莲凤
责任印制	潘玉玲
印　　刷	北京九州迅驰传媒文化有限公司
经　　销	全国新华书店
开　　本	850 mm×1168 mm 1/32
印　　张	5. 375　　**字　数** 160 千字
版　　次	2012 年 9 月第 1 版 2012 年 9 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5022-5690-6　　**定　价 25. 00 元**

网址:http://www. aep. com. cn　　**E-mail:atomep123@126. com**

发行电话:010-68452845

前　言

3-流形拓扑理论是低维拓扑学的一个重要分支。从3-流形的组合结构出发，通过3-流形中的一些曲面(如 Heegaard 曲面、不可压缩曲面、本质球面以及正则曲面等)，把复杂的几何对象化解为若干简单对象进行研究，进而了解3-流形的拓扑性质和几何结构，这是研究3-流形的组合方法。本书主要通过组合方法来研究3-流形理论中的一些问题。

3-流形的Heegaard分解理论是3-流形拓扑中最早提出的研究理论之一，它是利用嵌入在3-流形中的闭曲面将3-流形分为两个压缩体的方式来研究3-流形。除了Heegaard分解以外，用3-流形中的曲面来研究3-流形的方法还有：3-流形的素分解(prime decomposition)理论、不可压缩曲面(incompressible surface)理论、JSJ分解(Jaco-Shalen-Johannson)理论等。对于带边3-流形来说，Heegaard分解以一种自然方式一般化到另一种分解方式——D分解和SD分解。

与3-流形理论密切相关的一个重要研究领域是纽结理论，纽结理论近几十年来研究非常活跃，为3-流形的研究提供了丰富的思想和方法，并且与图论、生物学DNA及统计学等领域联系较为密切。

对空间图理论而言，可以说是纽结理论的一般化。由于二者之间的密切关系，空间图理论的研究受到了拓扑学家的关注。1994年，Adams在《纽结》一书中提到：从内在纽结图中去掉任意一个顶点以后，得到的图一定是内在链环图吗？此问题的提出唤起了许多学者对内在纽结图和内在链环图的关注，成为空间图理论中的一个研究热点。

作者近年来以3-流形理论和空间图理论为研究方向，研究内容不断丰富和深入。本书的主要成果是讨论了3-流形的D-分解、SD-分解和Heegaard分解及空间图嵌入的若干问题，通过对曲面与I的乘积和压缩体的D-亏格、SD-亏格，柄体的最小SD-分解的唯一性及3-流形的2亏格Heegaard分解中Haken球面的相关性等问题的研究，给出了一些3-流形及其中一些曲面的若干拓扑性质，并且给出了更大一类空间图也能够满足Adams猜想的条件。

本书共分9章。第1章绪论主要介绍3-流形组合拓扑学的发展情况和空间图理论的研究现状。第2章从3-流形的基本概念讲起，介绍了3-流形的D-分解、SD-分解和Heegaard分解的定义及主要定理，为第3章、第4章、第5章的研究工作做必要的准备。第3章给出了有1亏格D-分解和SD-分解的带边3-流形的特征描述；证明了柄体的SD-亏格与其本身的亏格相同；给出了曲面与I的乘积及压缩体的D-亏格和SD-亏格的计算公式；给出了3-流形的内1亏格SD-分解的弱可约与可约的关系；证明了柄体的最小SD-分解的唯一性，通过给出例子说明柄体的最小D-分解不是唯一的。第4章对亏格为2的可约Heegaard分解中Haken球面的相关性进行了深入和系统的研究，描述了当一个因子是S^3的亏格为1的Heegaard分解（如透镜空间、$S^2 \times S^1$的亏格为2的Heegaard分解）时，两个Haken球面是如何相关的，从而完成了亏格为2的可约Heegaard分解所有情况下Haken球面相关性的刻划。第5章给出了两个3-流形的融合有不可压缩边界的一个充分条件以及两个3-流形的融合是不可约的一个充分条件，该结果是若干已知结果的推广。第6章主要介绍了图的基本概念和图操作的几种变换。第7章主要介绍了纽结和链环的定义及有关研究成果。第6章和第7章的内容都是第8章

研究工作的基础。第8章证明了Adams猜想对内在纽结图为0-亏图或1-亏图经过有限次Δ-Y变换或点扩张以后得到的图成立。第9章是对本书的主要工作进行总结，并对今后的研究问题提出了建议。

由于本人水平有限，书中难免会有诸多错误和疏漏之处，敬请专家和读者批评指正！

作者

2012年1月

目 录

第 1 章　绪 论

1.1　引　言

拓扑学是数学中一个极为重要的基础学科，主要研究几何图形在连续变形下保持不变的性质，俗称“橡皮几何学”。作为一个相对独立、有足够影响的数学分支，拓扑学形成于19世纪末20世纪初。发展到近代，拓扑学分为互相联系、各具特点的几个分支，包括点集拓扑、代数拓扑、微分拓扑、低维拓扑等。

低维拓扑是一个比较活跃的领域。数学界的最高荣誉菲尔兹奖（Fields）得主中，有近三分之一的获奖者从事低维拓扑或与之有关方向的研究。我国对低维拓扑的研究起步较晚，是从20世纪80年代开始的，而且从事研究的人较少。

3-流形理论是拓扑学的重要研究领域，近几十年来的研究非常活跃，取得了令人瞩目的重大成果[1–3]，如3-流形的Dehn手术、Heegaard分解、纽结补猜想的证明以及纽结不变量等。

20世纪60年代初，Lichorish证明了任何可定向的连通的闭3-流形都可以通过三维球面内有限个互不相交的纽结进行手术得到。特别地，Kirby给出了两个3-流形微分同胚的充分必

要条件是两个链环是等价的(在Kirby变换意义下)。因此，研究3-流形的一些性质就可以转化为研究纽结的性质，研究不变量的性质更是如此。上述这些成果充分体现了纽结理论与3-流形理论关系极为密切。

纽结理论是拓扑学的一个引人入胜的领域，一方面由于它研究的是看得见摸得着的丰富多彩的几何现象，有许多问题等待人们去解决；另一方面因为纽结与链环的直观与奥妙，需要各种研究方法，成为诸如群论、矩阵论、数论、代数几何、微分几何等众多学科与拓扑学交汇的地方。

传统的图理论是数学的一个分支，似乎与纽结和链环没有联系。但是，现在的研究已经将它们紧密地联系在一起。国际上的数学家在这方面已经做了大量的工作，积累了丰富的成果。将纽结理论与空间图理论相结合，帮助我们进一步研究空间图的性质，得到更多的关于空间图的信息。

1.2 3-流形组合拓扑学的研究现状

流形是拓扑学的主要研究对象。拓扑学的中心任务就是研究流形的拓扑分类 [4]。低维拓扑主要是研究维数不超过四的流形。近几十年来，人们引进了许多方法研究3-流形，取得了一些新进展。

1982年，Fields奖得主W.P.Thurston从微分几何的角度证明了几何化猜想，即每个3-流形都可以分成许多小块，使得每块上都有唯一的齐性Riemann度量。另外，一些数学家从代数的角度研究3-流形，如F.Waldhausen，J.Stallings等给出了3-流形的基本群，以及各种不变量等。

2-流形就是通常所说的曲面，它们的拓扑分类在差不多一

个世纪前就已经完成。一个紧致连通曲面由它的亏格、边界分支数和它是否可定向完全决定，见参考文献 [5]。研究曲面拓扑的一个常用方法就是沿曲面上的简单闭曲线把曲面切成若干“简单块”，再把这些“简单块”通过粘合恢复原样，通过这样的“切与粘”来了解曲面的几何结构和拓扑性质。

人们自然也考虑用类似的方法来研究3-流形[6–8]。约在 100 年前，人们就知道，每个连通闭3-流形中都存在一个连通闭曲面，它把流形分成两个称为柄体的“简单块”。这就是3-流形的Heegaard分解[9–11]。换句话说，通过沿着亏格相同（当然定向性也相同）的两个柄体的边界把两个柄体粘合起来的方式可以得到所有的连通闭3-流形。一个世纪以来，特别是20世纪50年代Morse[12]和Bing[13]（独自地）证明了每个紧致3-流形有唯一的分片线性结构以来，通过 Heegaard 分解来研究3-流形取得了很多的重大突破。如 Waldhausen[14]于1968年证明了3-球面的 Heegaard 分解的唯一性，Haken[4]于1968年证明了可约流形的Heegaard分解也是可约的，Casson-Gordon[15]在1987年引入了弱可约Heegaard分解的概念，证明了有弱可约 Heegaard 分解的不可约3-流形一定是Haken流形，Scharlemann和Thompson[16]又把Casson-Gordon的想法推广到更一般的Heegaard分解理论上，在很多问题的研究上都取得了重要进展。可以说，人们通过3-流形的Heegaard分解结构对3-流形的拓扑性质和几何结构已经有了相当深刻的了解[17–20]。

另一方面，通过Heegaard分解来研究3-流形的分类本质上归于曲面的自同胚分类问题（映射类群）的研究，这本身就是一个十分复杂的问题，而且如何决定两个曲面自同胚是否决定同一个（或不同的）拓扑流形还是一个远未解决的问题，还有很长的路要走。

除Heegaard分解外，用3-流形中的2-球面把流形分成若干另一种意义下的“简单块”也是重要的方法，这就是3-流形的连通和分解。早在1929年，Kneser [21]就证明了每个紧致3-流形都可以分解成有限个称为素的3-流形的连通和，Milnor [22]在1962年证明这样的分解还是唯一的。Kneser-Milnor的这个定理就是我们现在通常处理3-流形的第一步，就是把3-流形分解成所谓的不可约的“简单块”。

在此基础上，把3-流形用曲面来切成更“简单”的块的方法还有：用3-流形中的不可压缩曲面来进一步切割流形，可以得到3-流形的谱分解；用3-流形中的本质环面来进一步切割流形，可以得到3-流形的JSJ分解 [23,24]；研究3-流形中的正则曲面也能对流形的拓扑性质和几何结构有深刻的了解；对于带边3-流形来说，D-分解和SD-分解是经典的Heegaard分解的一个自然而然的一般化。

通过3-流形中的曲面用组合方法（“切与粘”的方法）来研究3-流形是研究3-流形的重要方法之一。近几十年来在处理与Heegaard分解、不可压缩曲面、Dehn手术等有关的很多问题及其相关问题的研究上都取得了重要进展和突破。如Waldhausen [25]1968年关于充分大3-流形的结果、Haken [4]1968年关于流形可约蕴含其Heegaard分解可约（Haken 引理）的结果及其应用、Jaco [26]1984年给出的加柄定理及其应用、 Gabai [27] 1987年关于 Poenaru 猜想的解决、Casson-Gordon [15]1987年关于弱可约Heegaard分解的结果、Gordon-Lucke [28]1989年关于纽结补猜想的证明、Scharlemann [16]等关于一般化的 Heegaard 分解理论及其应用等都是用组合拓扑方法解决3-流形中具体问题并取得巨大成功的典型范例。最近，李涛在参考文献 [29]中利用分歧曲面的方法来研究Heegaard分解，证明了广

义Waldhausen猜想: 对于固定亏格的non-Haken流形，只有有限个 Heegaard 分解。进一步，他在参考文献 [30]中给出了比广义Waldhausen猜想更强的结果，即non-Haken流形只有有限个不可约的Heegaard分解。这是Heegaard分解理论研究的重大突破。同时，组合方法与代数方法和技巧相结合近年来在处理许多与不变量等有关的问题时也取得了很大成功。

如上所述，从3-流形的组合结构出发，通过3-流形中的一些曲面（Heegaard曲面[31–34]、不可压缩曲面[35–39]、本质球面[40–42]以及正则曲面[43–46]等），把复杂的几何对象化解为若干简单对象进行研究，是研究3-流形的重要方法，也取得了令人瞩目的进展[47–54]。下面从几个方面对国内外的研究现状作一回顾。

1.2.1 3-流形的Heegaard分解

1898年，丹麦数学家Heegaard在参考文献 [55]中注意到每个连通可定向的闭3-流形都可以表示为两个同亏格的柄体沿着其边界的并，这就是后来众所周知的3-流形的Heegaard分解。后来人们知道这种结构可以一般化到连通可定向的带边3-流形上，即每个连通可定向的带边3-流形可以表示为两个压缩体沿着正边界的并，这就是连通可定向的带边3-流形的Heegaard分解。这两种情形的分解曲面均称为流形的Heegaard曲面。3-流形M的一个Heegaard分解通常用 $V \cup_F W$ 表示，也可以用 (M, F) 表示，其中F是对应的Heegaard曲面，它把M分成两个压缩体V，W。也称F的亏格为该分解的亏格。

任意3-流形都有Heegaard分解，但一个Heegaard分解本身到底能多大程度决定它所确定的3-流形的拓扑性质和几何结构却是一个十分复杂的问题。我们先从Heegaard分解的结构来看

目前已知的结果。

3-流形M的一个Heegaard分解可以通过一个稳定化变成M的一个亏格增大1的Heegaard分解。一个经典的Reidemeister-Singer定理[56,57]断言：一个3-流形的两个Heegaard分解可以经过有限次稳定化以后成为合痕的。从这个意义上说，将Heegaard分解稳定化以后，可能会失去一些几何信息。

一个Heegaard分解是可约的，若对应的3-流形中存在一个2-球面，它与分解曲面交于一条在分解曲面上本质的简单闭曲线。早在1968年Haken就证明了可约3-流形的任意Heegaard分解都是可约的，这就是著名的Haken引理。Haken引理后来被一般化到圆片情形。由Haken引理及一般化可知，对可约或边界可约3-流形的Heegaard分解的研究一般可以归结为对亏格更小的Heegaard分解的研究。

Heegaard分解的稳定化和Heegaard分解的可约性二者之间有密切的关系:

(1) 如果一个Heegaard分解是稳定化的，则或者它是可约的，或者它是S^3的标准1亏格Heegaard分解;

(2) 若不可约3-流形的一个Heegaard分解是可约的，则该分解是稳定化的。

1987年，Casson-Gordon在参考文献 [15]中引入了弱可约Heegaard 分解的概念。一个Heegaard分解$V\cup_F W$是弱可约的，若存在本质圆片$D\subset V$，$E\subset W$，使得∂D与∂E交于一点。Casson-Gordon 证明了这样一个重要结果: 一个弱可约的Heegaard分解若不是可约的，则对应的3-流形包含正亏格的不可压缩曲面。该结果把Heegaard分解的有关信息与对应3-流形中不可压缩曲面的存在性联系起来，在处理与Heegaard分解、不可压缩曲面、Dehn手术、双曲结构等有关的一些问题时

发挥了重要的作用，见参考文献 [58–62]。

3-流形Heegaard分解理论中的一个重要问题就是: 一个3-流形的Heegaard分解本质上有多少种?

已经知道任意Heegaard分解都可以稳定化，这样 Heegaard分解本质上有多少种问题的研究就只限于那些非稳定化的分解才有意义。截至目前，只知道少数的3-流形（在一定意义下）有唯一Heegaard分解，它们是：参考文献 [14]中给出了$S^2 \times S^1$的非稳定化Heegaard分解是唯一的；Bonahon和Otal在参考文献 [63]中证明了透镜空间的任意不可约Heegaard分解的亏格都为1；Frohman和 Hass 在参考文献 [64]中给出了环面$\times S^1$的亏格为3的Heegaard分解是标准的；在此基础上，Boileau和 Otal 在参考文献 [65]里证明了环面$\times S^1$的任意Heegaard分解都是标准的；Scharlemann 和 Thompson [66]证明了闭曲面$\times I$ 的任意Heegaard分解都是标准的；Schultens在参考文献 [67]中给出了闭曲面$\times S^1$有唯一的不可约Heegaard 分解；还有一些结果，见参考文献 [68–70]。

另一方面，在1970年，Engmann在参考文献 [71]中证明了两个透镜空间的连通和有两个亏格为2但不等价的Heegaard分解。这样的反例在素流形 [72]里也可以找到。进一步地，Casson和Gordon [73]在1985年给出一个有任意大亏格的不可约 Heegaard 分解的闭3-流形例子。

已经知道，紧3-流形的任何两个Heegaard分解可以经过有限次的稳定化后成为合痕的。一个自然的问题是: 一个3-流形的两个Heegaard分解至多经过多少次稳定化可以合痕? 对于一个3-流形的两个亏格为n的Heegaard分解，Waldhausen猜测n次就够。对于一个Haken流形M的两个Heegaard分解来说，1995年K. Johannson [74]证明了所需稳定化次数的上界是关于两

个分解亏格的某一多项式(多项式可能与M有关)。当Haken流形M的两个 Heegaard 分解为强不可约时，1996年 Rubinstein和Scharlemann在参考文献 [75]中证明了所需稳定化次数的上界是关于两个分解亏格的线性函数。

2006年，李涛在参考文献 [30]里给出了比广义的 Waldhausen 猜想更强的结论: non-Haken 流形的 Heegaard 分解有限性。而 Jaco 和Rubinstein 利用1-efficient剖分和正则曲面理论在参考文献 [76]中给出了广义 Waldhausen 猜想的另一种证明。广义Waldhausen猜想的解决，向Heegaard分解分类问题的解决迈进了一大步。

比较同一个3-流形的两个Heegaard分解，除了计算稳定化次数以外，还可以从两个Heegaard分解相交的部分获得一些信息，见参考文献 [77–79]。

1.2.2 带边3-流形的D-分解和SD-分解

可定向闭3-流形上的Heegaard分解可以自然地一般化到可定向带边3-流形上的Heegaard分解，同时也可以以另一种自然方式一般化到可定向带边3-流形上的D-分解和SD-分解。Downing [80]在1970年证明了一个结论: 每个带边3-流形都可以表示为两个同胚的柄体沿着“部分”边界的并。Roeling [81]在Downing 的工作基础上，引入了边界连通3-流形的D-分解和SD-分解的概念，讨论了边界连通3-流形的D-分解、SD-分解与 Heegaard 分解之间的关系。

1999年，Suzuki [82]推广了Downing和Roeling的结果，定义了多个边界分支的3-流形的D-分解和SD-分解，即任何紧的、定向的带边 3 -流形均有一个分解$M = V \cup_F W$，其中V和W是两个同胚的柄体，$F \subset \partial V, \partial W$为一个连通的曲面，$\partial F$把$\partial M$的