双博士系列

普通高等学校"九五"国家教委重点教材配套辅导用书

主 编 北京大学数学科学学院 田勇
编 写 双博士数学课题组
支 持 双博士网校 www.bbdd.cc
总策划 胡东华

线性代数教材辅导

（同济四版·线性代数）

科学技术文献出版社

线性代数教材辅导

同济四版·线性代数

主　编　北京大学数学科学学院　田勇
编　写　双博士数学课题组
支　持　双博士网校　www.bbdd.cc
总策划　胡东华

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数教材辅导/田勇主编. -3 版,—北京:科学技术文献出版社,2005.1

ISBN 7-5023-3412-4

Ⅰ.线... Ⅱ.田... Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 073631 号

出　　版　　者:科学技术文献出版社

邮 购 部 电 话:(010)82608021

图书发行部电话:(010)82608022/82608013

门 市 部 电 话:(010)62543201

图书发行部传真:(010)82608039

E-mail:sbs@bbdd.cc

策　划　编　辑:胡东华

责　任　编　辑:郝宏智

责　任　校　对:郝峥嵘

封　面　设　计:蒲菊祥

发　　行　　者:科学技术文献出版社发行　新华书店北京发行所经销

印　　刷　　者:北京拓瑞斯印务有限公司

版　(　印　)　次:2005 年 1 月第 3 版　第 1 次印刷

开　　　　　本:850×1168　大 32 开

字　　　　　数:493 千字

印　　　　　张:13.82

定　　　　　价:15.00 元

前　　言

双博士品牌高等学校数学辅导系列丛书历年位居全国销量排行榜第一，有居高不下的人气指数！该书作为与同济版经典教材《线性代数》第四版的完全配套参考书，在章节安排上完全遵循同济四版的严密逻辑。该书整体难易程度的把握，兼顾不同层次水平的学生，既适合基础差的学生夯实基础，提升成绩，也适合基础较好的学生再创佳绩，是一本集同步课堂辅导、全方位多角度的应试攻略经济实惠版学生用书。本书特点为：

基础知识导学：详细叙述了每章、节的基本概念，基本定理和基本方法。

重点难点突破：针对每一章节的重点难点用具体的例子加以详细分析。

典型题型解析：本书对每一章节的典型题型进行了分类，解答评析。指出同类题的解题思路和程序，及在应用方法和运算过程中常犯的错误。习题选用既有一般教科书和习题集中的典型题目，也有选自全国高教自考、全国研究生统考和全国 MBA 联考中的考题，对有难度的习题，在答案中予以适当的提示。

考研试题讲析：每章最后对近十年来全国研究生考试高等数学（一）、（二）、（三）、（四）线性代数部分的考题进行了归类、讲解和分析。

附：

来自北京大学研究生会的感谢信

双博士：

您好！

首先感谢您对北京大学"十佳教师"评选活动的热情支持和无私帮助！师恩难忘，北京大学"十佳教师"评选活动是北京大学研究生会的品牌活动之一，是北京大学所有在校研究生和本科生对恩师情谊的最朴素表达。双博士作为大学教学辅导及考研领域全国最大的图书品牌之一，不忘北大莘莘学子和传道授业的老师，其行为将永久的被北大师生感怀和铭记。

作为考研漫漫征途上的过来人，双博士曾陪伴我们度过无数个考研岁月的日日夜夜，曾带给我们无数个明示和启发，当然也带给我们今天的成功。

特致此信，向双博士表达我们内心长久以来的感激之情，并祝愿双博士事业蒸蒸日上。

北京大学研究生会

二零零二年十二月

来自北京大学研究生会的感谢信

双博士：

您好！

首先感谢您对北京大学“十佳教师”评选活动的热情支持和无私帮助！师恩难忘，北京大学“十佳教师”评选活动是北京大学研究生会的品牌活动之一，是北京大学所有在校研究生和本科生对恩师情谊的最朴素表达。双博士作为大学教学辅导及考研领域全国最大的图书品牌之一，不忘北大莘莘学子和传道授业的老师，其行为将永久的被北大师生感怀和铭记。

作为考研漫漫征途上的过来人，双博士曾陪伴我们度过无数个考研岁月的日日夜夜，曾带给我们无数个明示和启发，当然也带给我们今天的成功。

特致此信，向双博士表达我们内心长久以来的感激之情，并祝愿双博士事业蒸蒸日上。

北京大学研究生会
二零零二年十二月

安徽某大学学生的来信

双博士：

您好！

我是一名在校大学生，从去年来到学校时，我就认定了双博士图书，我认为它非常实用。我很喜欢。所以今年我一来就又一次购买了双博士图书，还推荐给我们班许多同学了。他们都感觉双博士不错。

现在，我们班报了英语四级，我上了 www.bbdd.cc 网看了一下，我觉得非常适合我们的备考。在此我非常感谢你们，希望你们工作顺利！

买了双博士图书，还可以获得赠品，我觉得这是一件非常好的事……

谢××
2003 年 12 月 28 日

湖南某高校学生的来信

双博士：

你们好！

……

我们非常感谢你们，因为在学习上您们给了我许多帮助，您们无声无息的为万千学子奉献好书，精题，使他们在学习路上不再举步维艰，而是轻松跃进，使他们面对考试不再紧锁眉尖，而是信心十足，意气风发，因此一句“润物细无声”也不足以形容您的伟大。双博士对我的帮助可真太大了，《大学英语精读课文辅导》《线性代数解题指导》等丛书使我大一，大二两个学期都拿到了甲等奖学金，英语四、六考试我买了你们出版的阅读和词汇等方面的书，结果我一次性都通过了，并且四级还得了一个“优”，正因为如此，我非常信赖双博士，这次考研我买的资料书基本上是双博士出版的图书，相信他一定会对我考研有巨大帮助！

这次借寄领奖凭证之机，向默默工作着的你们说了几句心里话，希望没有打扰您们的工作。在此，我想代表广大读者朋友对您们的辛勤工作表示衷心感谢，祝您们身体健康。好人总有好报，读者的眼睛是雪亮的，你们的默默工作他们一定看到或感受到了，他们会在内心为您们祝福。

您的朋友：邓××
2003 年 11 月 8 日

目　录

第一章　行列式

第二章　矩阵及其运算

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

第四章 向量组的线性相关性

第五章 相似矩阵及二次型

第 1 章 行列式

本章知识网络图

⇩

- 行列式
  - 排列
    - 奇偶排列
    - 逆序
  - n 阶行列式
    - 行列式的定义
    - 代数余子式
  - 行列式的性质
    - 行列式的 7 个性质
    - 利用性质，采用适当的方法来求行列式的值。
  - 行列式按行(列)展开
    - 展开定理
    - Laplace 定理
  - 克莱姆法则
    - 适用情形
    - 克莱姆法则的意义

§1 二阶与三阶行列式

（略）

§2 全排列及其逆序数

【基础知识导学】

1. n 阶行列式的“排列逆序”定义

(1) 排列

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 级排列的总数是 $n!$ 个.

(2) 逆序和逆序数

在一个排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中,若 $i_t > i_s$,则称这两个数 i_ti_s 组成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$. 若 τ 为奇数,则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 为奇排列;若 τ 为偶数,称此排列为偶排列.

【典型题型解析】

例 1.1 求下列排列的逆序数,从而决定它们的奇偶性:

(1) 1347265;

(2) $n(n-1)\cdots21$;

(3) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解:(1) $\tau(1347265)=0+0+0+3+1+2=6$,

故 1347265 为偶排列.

(2) $\tau(n(n-1)\cdots21)$

$$=(n-1)+(n-2)+\cdots1$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

易知,当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数,故此时排列为偶排列;

当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$ 为奇数,故此时排列为奇排列.

(3) 该排列中前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$ 不构成逆序，后 n 个数 $246\cdots(2n)$ 也不构成逆序，只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序.

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)) = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

故奇偶性与排列(2) 一致.

【同步强化训练】

确定下列排列的逆序数，并确定是偶排列还是奇排列？

1.1　53214

1.2　$246\cdots2n(2n-1)\cdots31$

1.3　654321

【参考答案】

1.1　7　奇排列

1.2　n^2　n 为偶数时为偶排列，n 为奇数时为奇排列

1.3　15　奇排列

§3　n 阶行列式的定义

【基础知识导学】

1. n 阶行列式的归纳定义

对由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $n=1$ 时，$|a_{11}| = a_{11}$.

当 $n \geqslant 2$ 时，

$$D = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

其中 $M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为 a_{1j} 的余子式，

$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 为 a_{1j} 的代数余子式.

【重点难点突破】

行列式是研究线性方程组、矩阵、特征多项式等问题的重要工具.对初学者而言,其定义也是一个难点.掌握行列式的“排列逆序”定义必须抓住三个特点,即:

(i) 由于 n 级排列的总数是 $n!$ 个,故展开式中共有 $n!$ 项;

(ii) 每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积;

(iii) 每项前的符号取决于 n 个元素列下标所组成排列的奇偶性.

行列式的计算有许多技巧,但灵活掌握其定义是计算行列式的基础.

【典型题型解析】

1. 灵活运用行列式的定义,判断行列式展开项的性质.

例 1.2(1) 在 6 阶行列式中,项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 应带什么符号?

(2) 写出 4 阶行列式中,带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项.

(3) 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中,求 x^3 的系数.

解:(1) 适当调整该项元素位置,使 6 个元素的行下标(即第一个下标)按自然顺序排列,则列下标排列为 431265,其逆序数 $\tau(431265)=6$,故取正号.

(2) 由行列式的定义可知,包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 和 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$,其列下标排列的逆序数分别为 $\tau(2314)=2$ 和 $\tau(4312)=5$.已知所求项带负号,故取列下标为奇排列的 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

(3) 根据行列式的定义,仅当 $a_{12},a_{21},a_{33},a_{44}$ 四个元素相乘才会出现 x^3 项,这时该项列下标的排列的逆序数为 $\tau(2134)=1$,故含 x^3 的项的系数为 -1.

2. 对于含零元素较多的行列式,可直接用定义计算.

由定义知,n 阶行列式共有 $n!$ 项,每一项的一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,若某一项 n 个元素的乘积中有零因子,则该项为零,若行列式中零元素较多,则为零的项就较多,故只须找出那些不为零的项就可求出行列式的值.

例 1.3 计算

$$(1)D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2)D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解:(1) 在 D 中只有 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素不为零,且恰处于不同行不同列,所以 D 中不为零的项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=1\cdot 2\cdot 3\cdots n=n!$$

由于 $a_{1j_1}=1$,它位于第1行第2列,故 $j_1=2$,又 $a_{2j_2}=2$ 位于第2行第3列,故 $j_2=3$,同理 $j_3=4,\cdots,j_{n-1}=n,j_n=1$,从而

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\tau(23\cdots n1)=n-1$$

而行列式的其余各项中都至少有一个元素为零,所以其余各项均为零,故

$$D=(-1)^{n-1}n!$$

(2) 与(1) 完全类似,由于行列式中不为零的项只有 $1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n$ 这一项,而把这 n 个元素行下标按自然顺序排列时,列下标的排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 21n$,而 $\tau(n-1,n-2,\cdots,2,1,n)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ 所以

$$\begin{aligned} D&=(-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 1n)}1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n \\ &=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}n! \end{aligned}$$

例1.4 利用

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0$$

证明 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列中,奇偶排列各半.

证明：根据行列式的定义有

$$D_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$$

其中$j_1 j_2 \cdots j_n$为n个数$1,2,\cdots,n$的某一排列，该和式中共有$n!$项，且每项的绝对值都是1. 由已知$D_n=0$，知上面和式中1和-1的个数相等，均为$\frac{n!}{2}$个，这说明$1,2,\cdots,n$的所有排列中，奇偶排列各占一半.

例 1.5 证明：

(1) 上、下三角形行列式等于主对角线（从左上角到右下角这条对角线）上的元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 对角行列式也等于主对角线上的元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) $$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

证明：(1) 先考察上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据行列式的定义,展开项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为零,因之,只要考虑 $j_n=n$ 的那些项. 在第 $n-1$ 行中,除去 $a_{n-1,n-1}$,$a_{n-1,n}$ 外,其余的项全为零,因之 j_{n-1} 只有 $n-1$,n 这两个可能. 由于 $j_n=n$,所以 j_{n-1} 就不能等于 n 了,从而 $j_{n-1}=n-1$. 这样逐步推上去,不难看出,除去

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这一项外,其余的项全是零. 而这一项的列下标所成的排列是一个偶排列,所以这一项带正号. 于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对下三角形行列式,完全类似地有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 作为 D 的特殊情形,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 先考察行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据行列式的定义,项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

注意到行列式的第1行除 a_{1n} 外全为零,第2行除 $\alpha_{2(n-1)}$, a_{2n} 外全为零,……,与(1) 的分析过程类似,除去

$$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

这一项外,其余的项全是零. 而这一项的列下标所成的排列的逆序数为

$$\tau(n,n-1,\cdots,2,1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

于是

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

完全类似地可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

作为一种特殊情形,有

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

【同步强化训练】

1.4　在6阶行列式中,$a_{21}a_{33}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$, $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 这两项应带有什么符号?

1.5 定出四阶行列式中所有带负号且包含 a_{23} 的项.

1.6 若 $D_n = |a_{ij}| = a$,则 $D = |-a_{ij}| =$ ______.

1.7 已知 $f(x) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & x & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -x & 0 & 0 \\ 3 & 2 & x & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$,

则 x^5 的系数为______.

1.8 若 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n,则此行列式为______.

1.9 设 $a_{65}a_{k5}a_{33}a_{l4}a_{46}a_{21}$ 是 6 阶行列式 $|a_{ij}|$ 的一项,则______.

(A) $k=5, l=1$,取正号;

(B) $k=5, l=1$,取负号;

(C) $k=1, l=5$,取负号;

(D) $k=1, l=5$,取正号.

1.10 设 a,b,c 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根,求

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

1.11 计算行列式 $\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.12 用行列式定义计算

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数,并说明理由.

1.13 证明:(＊) $\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$

$$= \sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}(a_{1j}(t)) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}(a_{2j}(t)) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}(a_{nj}(t)) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

【参考答案】

1.4 负号;正号

1.5 $-a_{23}a_{11}a_{32}a_{44}$, $-a_{23}a_{12}a_{34}a_{41}$, $-a_{23}a_{14}a_{31}a_{42}$

1.6 $(-1)^n a$

1.7 6

1.8 0 因为该行列式中非零元素的个数小于 n,所以行列式等于 0。

1.9 d

1.10 0

1.11 $(-1)^n n!$

1.12 2, -1

1.13 **证明**:欲证的等式左边为一个由 n 阶行列式定义的函数关于自变量 t 求导数,等式的右边为 n 个行列式之和. 根据行列式的定义以及导数的运算性质,我们有

证法一:用行列式的归纳定义及数学归纳法.

$n=1$ 时,$\frac{d}{dt}|a_{11}(t)| = \frac{d}{dt}(a_{11}(t)) = |a'_{11}(t)|$,故结论成立.

假设对 $n-1$ 阶行列式,等式成立,即

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1,n-1}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2,n-1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1}(t) & a_{n-1,2}(t) & \cdots & a_{n-1,n-1}(t) \end{vmatrix}$$