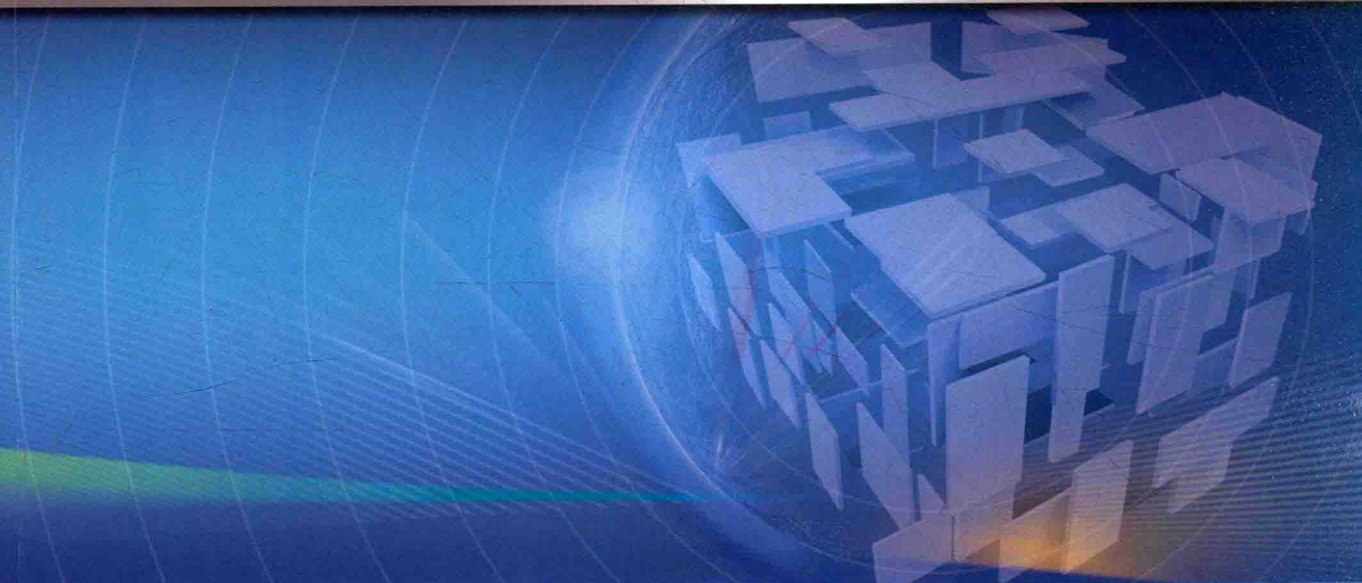
高等数学学习指南

主　编　张兴永

副主编　杨宏晨　王彩侠　逢世友　王萃琦　吴宗翔



Gaodeng Shuxue Xuexi Zhinan

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

高等数学学习指南

主　编　张兴永
副主编　杨宏晨　王彩侠　逄世友
　　　　王萃琦　吴宗翔

中国矿业大学出版社

内 容 简 介

本书是根据高等数学课程教学大纲基本要求编写的学习辅导书，全书有十二章内容，每一章由内容提要、基本问题解答、典型例题解析以及练习题与解答组成，对精选的基本问题、典型例题都做了详尽的分析和解答。

本书可作为学生学习《高等数学》和备考研究生的参考书，也可作为教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指南 / 张兴永主编. —徐州：中国矿业大学出版社，2015.9

ISBN 978-7-5646-2849-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第225374号

书　　名 高等数学学习指南
主　　编 张兴永
责任编辑 潘俊成
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线 (0516)83885307　83884995
出版服务 (0516)83885767　83884920
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本 787×1092　1/16　**印张** 26　**字数** 666 千字
版次印次 2015 年 9 月第 1 版　2015 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 30.00 元

前　言

高等数学是高等工科院校大学生重要的基础理论课程，也是研究生入学数学考试必考的主要基础课程之一。为了提高高等数学的教学质量与水平，我们根据高等数学教学大纲的基本要求，通过总结多年的教学经验及长期搜集和积累的教学资料，编写了《高等数学学习指南》。其目的在于能及时解惑答疑，同步辅导，全面提高大学生的数学素养。

本书共十二章内容，每章包括以下四个方面：

1. **内容提要：**简明扼要地对本章内容作了归纳总结，对教材内容作了进一步剖析、讲解，并作了适当的深化和扩充。

2. **基本问题解答：**针对读者在学习过程中不易理解和难掌握的一些概念、方法，选编了若干问题予以分析、解答，以帮助读者释疑解难，并加深对教学内容的理解。

3. **典型例题解析：**每一章列举了大量的典型例题，并予以分析解答。例题紧扣本章内容，由浅入深，并归纳总结解题方法，开拓解题思路。

4. **练习题与解答：**每一章最后给出一些习题及解答，包括选择题、填空题、证明题和计算题，学生通过这些练习，对本章内容的掌握更加牢固。

本书第一、八章由吴宗翔执笔编写，第二、九章由王彩侠执笔编写，第三、十章由张兴永执笔编写，第四、十二章由杨宏晨执笔编写，第五、十一章由逄世友执笔编写，第六、七章由王萃琦执笔编写。在编写过程中经过编者集体多次讨论修改，全书由张兴永统稿。

本书编写过程中，中国矿业大学理学院数学系的广大教师提出了许多宝贵意见，特别是得到了担任高等数学课程教学的教师的积极支持，他们还提出了不少改进建议，在此我们表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，难免存在不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2015年8月

目 录

第一章　函数与极限

一、内 容 提 要

1. 函数

y是x的函数，记为$y=f(x)$，$x\in D$，x称为自变量，y称为因变量，D为定义域，f为对应规律，相应y的取值范围称为函数的值域.

这里要注意：函数的定义域D和对应规律f是构成函数的两要素.

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性；(2) 函数的单调性；(3) 函数的奇偶性；(4) 函数的周期性.

3. 反函数

已知y是x的函数$y=f(x)$，若将y当作自自变量而将x当作因变量，由此确定的函数$x=\varphi(y)$称为原函数$y=f(x)$的反函数，相应地把原来的函数$y=f(x)$称为直接函数，函数$y=f(x)$的反函数也可记作$y=\varphi(x)$.

4. 复合函数

设函数$y=f(u)$的定义域为D_1，函数$u=g(x)$的定义域为D_2及值域为W_2，且$W_2\subset D_1$，则对任一$x\in D_2$有确定y与之对应，称函数$y=f(g(x))$为函数$y=f(u)$及$u=g(x)$的复合函数，u称为中间变量.

5. 初等函数

由常数和基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数）经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

6. 非初等函数

分段函数（符号函数，取整函数等）.

7. 数列的极限（ε—N语言）

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$，称常数$a$是数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于$a$，记为$x_n\to a(n\to\infty)$. 如果数列没有极限，就说数列是发散的.

8. 数列子列的收敛性

若$\{x_n\}$收敛于a，则它的任一子列$\{x_{n_k}\}$都收敛于a.

9. 函数的极限(ε一语言)

表达式(记号)	任意给定	存在	当…时	恒有
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$\|x\|>X$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$

10. 函数极限的性质

(1) 函数极限的唯一性;

(2) 函数极限的局部有界性;

(3) 函数极限的局部保号性;

(4) 函数极限与数列极限的关系:

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$存在,对于任意数列$\{x_n\}$,$x_n\neq x_0$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,则

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

11. 无穷小与无穷大的关系

无穷小与无穷大互为倒数,即

若$\lim f(x)=0$,则$\lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty(f(x)\neq 0)$;若$\lim g(x)=\infty$,则$\lim\dfrac{1}{g(x)}=0$.

12. 无穷小的性质(在同一变化过程中)

(1) 有限个无穷小的和仍是无穷小;

(2) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小;

(3) 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小;

(4) 常数与无穷小的乘积是无穷小;

(5) 有限个无穷小的乘积也是无穷小;

(6) 函数、极限和无穷小三者的关系

$$\lim f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

其中$\lim\alpha(x)=0$.

13. 极限的运算法则

定理1 (极限的四则运算法则)设$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

推论1 如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,则$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$.

推论2 如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

推论3 设$f(x)\geqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则$A\geqslant B$.

定理2 (复合函数的极限法则)设$y=f[\varphi(x)]$是由函数$y=f(u)$与函数$u=\varphi(x)$复合而成,$f[\varphi(x)]$在点x_0的某去心邻域内有定义,若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,$\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$,且存在$\delta_1>$

0，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 时，有 $\varphi(x)\neq a$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u\to a} f(u) = A.$$

14. 极限存在准则

准则Ⅰ(夹逼准则)　如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足下列条件：

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$；

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

准则Ⅰ′　设 $g(x)$，$f(x)$，$h(x)$ 满足条件

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

(2) $\lim g(x)=a$，$\lim h(x)=a$；

则 $\lim f(x)$ 存在，且 $\lim f(x)=a$.

准则Ⅱ(单调有界极限存在准则)　单调有界数列必有极限.

15. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；一般地 $\lim\limits_{u(x)\to 0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$；一般地 $\lim\limits_{u(x)\to 0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=\mathrm{e}$.

16. 无穷小的比较

设 α，β 是同一过程中的两个无穷小，且 $\alpha\neq 0$.

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}0 & \text{称 } \beta \text{ 是比 } \alpha \text{ 高阶的无穷小，记作 } \beta=o(\alpha)\text{；}\\ \infty & \text{称 } \beta \text{ 是比 } \alpha \text{ 低阶的无穷小；}\\ C(C\neq 0) & \text{就说 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是同阶的无穷小；}\\ 1 & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是等价的无穷小，记作 } \beta\sim\alpha.\end{cases}$$

定理(等价无穷小的替代定理)

设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

常用等价无穷小(当 $x\to 0$ 时)：

$$\begin{aligned}
&\sin x\sim x, && \arcsin x\sim x,\\
&\tan x\sim x, && \arctan x\sim x,\\
&\ln(1+x)\sim x, && \mathrm{e}^x-1\sim x,\\
&a^x-1\sim x\ln a, && 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\\
&(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x, && \sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

利用等价无穷小的替代定理是求极限的重要方法，因此不但要记住以上各组等价无穷小，而且要记住它们的一般形式.

如

$$\ln[1+f(x)]\sim f(x)\quad (f(x)\to 0).$$

这里要注意，在用无穷小等价代替中，一般情况下，整个分子，整个分母，或分子、分母的

乘积的因子可以用等价无穷小代替,不要对加、减中的某一项用等价无穷小代替.

17. 函数的连续性

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 即有

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$

$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\Longleftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0)=f(x_0^+)$(左、右连续).

注 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

18. 连续函数的运算及其初等函数的连续性

定理 1 (连续函数的四则运算) 若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 处连续,则

$$f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x),\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$$

在点 x_0 处也连续.

定理 2 单调的连续函数必有单调的连续反函数.

定理 3 (连续函数的复合极限运算) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,函数 $f(u)$ 在点 a 连续,则有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

定理 4 (连续函数的复合函数的连续性)

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续,且 $\varphi(x_0)=u_0$,而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

定理 5 基本初等函数在定义域内是连续的.

定理 6 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

19. 函数的间断点及其分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点(可去间断点和跳跃间断点)}\\ \text{第二类间断点(无穷间断点和振荡间断点等)}\end{cases}$$

20. 闭区间上连续函数的性质

(1) **最大值和最小值定理** 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

(2) **有界性定理** 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

(3) **零点定理** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$),那么在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点,即至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$,使 $f(\xi)=0$,也就是方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根.

(4) **介值定理** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

那么,对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

推论 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,那么介于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上最大值 M

和最小值 m 之间的任意数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=C$.

二、基本问题解答

【问题 1.1】 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 定义中的 $N=N(\varepsilon)$ 是不是 ε 的函数？

答 这里 $N=N(\varepsilon)$ 仅表示 N 与 ε 有关，并不表示 N 是 ε 的函数. 因为对于给定的 ε，如果存在一个满足条件的 N，就必然有无数多个满足条件的 N，不存在 N 与 ε 之间的对应规律，$N=N(\varepsilon)$ 不是 ε 的函数.

【问题 1.2】 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$ 对吗？

答 不一定. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=a$.

当 $a\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}=\dfrac{a}{a}=1$，结论成立；

当 $a=0$ 时，结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$ 不一定成立.

例如，数列 $x_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n[2+(-1)^{n+1}]}{(n+1)[2+(-1)^n]}$$

不存在；

又如，数列 $x_n=\dfrac{1}{a^n}(a>1)$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\neq 1.$$

注 以上各例表明，当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 不一定存在；既使存在，也未必都等于 1.

【问题 1.3】 设 $x_1=1$，$x_{n+1}=1+2x_n(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 有人求解如下：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，对等式 $x_{n+1}=1+2x_n$ 两边求极限，得 $a=1+2a$，于是 $a=-1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-1$，对吗？

答 不对.

因为 $x_1=1,x_2=1+2\times1=3,x_3=1+2\times3=7,x_4=1+2\times7=15,\cdots$，易知数列 $\{x_n\}$ 单调增加，且 $x_{n+1}>x_n>1$，显然不可能有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-1$.

利用递推公式表达的数列求极限，其步骤为：

① 确定数列 $\{x_n\}$ 收敛；

② 假设数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限.

事实上：
$$\begin{aligned}x_n&=1+2x_{n-1}=1+2(1+2x_{n-2})=1+2+2^2x_{n-2}\\&=1+2+2^2(1+2x_{n-3})\\&=1+2+2^2+2^3x_{n-3}\\&=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\end{aligned}$$

易知$\{x_n\}$无界，故$\{x_n\}$发散，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$，把发散数列当做收敛数列，结果自然会发生错误.

【问题 1.4】 数列$\{x_n\}$与数列$\{|x_n|\}$的收敛性是否相同？

答 不一定.

当数列$\{x_n\}$收敛时，则数列$\{|x_n|\}$收敛，而且当$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$时，有$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$；

事实上：$\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，必然有$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon$.

而数列$\{|x_n|\}$收敛时，数列$\{x_n\}$可能收敛，也可能发散.

例如，$x_n=(-1)^n$，数列$\{|x_n|\}$收敛，而数列$\{x_n\}$发散.

【问题 1.5】 证明数列发散有何方法？

答 证明数列发散的常用方法有两种：

(1) 找出数列$\{x_n\}$的一个发散的子列；

(2) 找出数列$\{x_n\}$的两个具有不同极限的子列，即

$$\lim_{k\to\infty} x_{p_k}=a,\lim_{k\to\infty} x_{q_k}=b,\text{且 } a\neq b.$$

例如，讨论数列$x_n=\sin\dfrac{n\pi}{4}$的收敛性.

解 因为$x_{4k}=\sin\dfrac{4k\pi}{4}=0$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k}=0$，而

$$x_{8k+2}=\sin\frac{(8k+2)\pi}{4}=1,\lim_{k\to\infty}x_{8k+2}=1,$$

且有$\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k}\neq\lim\limits_{k\to\infty} x_{8k+2}$，所以数列$x_n=\sin\dfrac{n\pi}{4}$发散.

又如，讨论数列

$$x_n=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{n}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\\ n, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\end{cases}$$

的收敛性.

因为$x_{2k}=2k\to\infty\ (k\to\infty)$，所以数列发散.

【问题 1.6】 数列极限与函数极限之间有何关系？

答 可考虑两种情形：

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$与$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$之间的关系；

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$之间的关系，其中$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$.

定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A(\infty)$的充分必要条件是：对任何以$x_0$为极限的数列$\{x_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A(\infty).$$

(证明略)

注 此定理的必要条件为判别$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在(或不是$\infty$)提供了一种有效方法.

例如，极限$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，因为

取$x'_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0(n\to\infty)$时，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$，

而取 $x''_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}\to 0\ (n\to\infty)$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x''_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$，

所以极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

又如，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在，因为

取 $x'_n=2n\pi\to\infty(n\to\infty)$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2n\pi=1$，

而取 $x''_n=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\to\infty(n\to\infty)$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x''_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=0$，

所以极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在.

【问题 1.7】 无穷大与无界有何区别？

答 对于数列$\{x_n\}$而言，若数列$\{x_n\}$为无穷大，则其任何子列都是无穷大；若数列$\{x_n\}$无界，则存在一个子列是无穷大. 因此**"无穷大必无界，无界未必是无穷大"**.

对于函数 $y=f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 是指 $\forall M>0$，$\exists\delta>0$；$\forall x\in U(x_0,\delta)$，必有 $|f(x)|>M$；而函数 $f(x)$无界是指：$\forall M>0$，总有一个(并非所有的)点$x^*\in U(x_0,\delta)$，使

$$|f(x^*)|>M.$$

例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$无界，但当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)$不是无穷大.

取 $x_n=\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}\in(0,1]$，$f(x_n)=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\to\infty\quad(n\to\infty)$，

但是取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0(n\to\infty)$时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}2n\pi\sin 2n\pi=0$，

所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上无界. 当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)$不是无穷大.

【问题 1.8】 (1) 当数列$\{a_n\}$收敛，数列$\{b_n\}$发散时，数列$\{a_nb_n\}$收敛性如何？

(2) 当数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$都发散时，数列$\{a_nb_n\}$收敛性如何？

答 (1) 数列$\{a_nb_n\}$收敛性不肯定.

例如，$a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=n$，$a_nb_n=1$，则数列$\{a_nb_n\}$收敛；

又如，$a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=(-1)^n n$，$a_nb_n=(-1)^n$，则数列$\{a_nb_n\}$发散.

(2) 数列$\{a_nb_n\}$收敛性不肯定.

例如，$a_n=b_n=(-1)^n$，而 $a_nb_n=1$，则数列$\{a_nb_n\}$收敛；

又如，$a_n=(-1)^n$，$b_n=1+(-1)^n$，而 $a_nb_n=(-1)^n+1$，则数列$\{a_nb_n\}$发散.

【问题 1.9】 为什么不说初等函数在其定义域内连续，而说初等函数在其定义区间内连续？

答 例如，$f(x)=\sqrt{\sin x-1}$为初等函数，但仅在孤立点 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$有定义，不存在定义区间，根本就不讨论函数 $f(x)$的连续性问题. 所以不能说初等函数在其定义域内连续，而说初等函数在其定义区间内连续.

又如，$f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$ 也为初等函数，但仅在孤立点 $x=1,-1$ 有定义，不存在讨论函数 $f(x)$ 的连续性问题.

【问题 1.10】 怎样求幂指函数 $y=[u(x)]^{v(x)}$ 的极限？

答 一般地可利用恒等式：

$[u(x)]^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$，则有 $\lim[u(x)]^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim v(x)\ln u(x)}$.

如果 $\lim u(x)=A>0$，$\lim v(x)=B$，则有

$$\lim[u(x)]^{v(x)}=\lim u(x)^{\lim v(x)}=A^B.$$

特别，当 $\lim u(x)=1$，$\lim v(x)=\infty$，则 $\lim[u(x)]^{v(x)}$ 为 1^∞ 型的未定式. 此时可化为

$$\begin{aligned}\lim[u(x)]^{v(x)}&=\lim[1+(u(x)-1)]^{v(x)}\\&=\lim \mathrm{e}^{v(x)\ln[1+(u(x)-1)]}=\mathrm{e}^{\lim v(x)\cdot[u(x)-1]}\end{aligned}$$

（利用 $\ln u(x)=\ln[1+(u(x)-1)]\sim u(x)-1$）.

【问题 1.11】 有人说：如果 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，那么

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

对吗？

答：这样的结论是不一定成立的. 例如

设
$$f(u)=\begin{cases}2, & 当\ u\neq 0,\\ 0, & 当\ u=0,\end{cases}\qquad \varphi(x)=\begin{cases}0, & 当\ x\neq 0,\\ 1, & 当\ x=0.\end{cases}$$

则
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & 当\ x\neq 0,\\ 2, & 当\ x=0.\end{cases}$$

因 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0=u_0$，而 $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=2$，但 $\lim\limits_{x\to 0}f[\varphi(x)]=0$，故

$$\lim_{x\to 0}f[\varphi(x)]\neq\lim_{u\to 0}f(u).$$

本问题不满足复合函数极限运算定理的条件.

三、典型例题解析

1. 关于复合函数运算

【例 1.1】 假设 $f(2x+1)=\dfrac{1}{1-x}$，求：

(1) $f[f(x)]$，　　　　(2) $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

解 先求 $f(x)$ 的表达式

方法一 令 $t=2x+1$，则 $x=\dfrac{t-1}{2}$，代入原式得到

$$f(t)=\frac{1}{1-\dfrac{t-1}{2}}=\frac{2}{3-t}，即\ f(x)=\frac{2}{3-x}\quad(x\neq 3).$$

方法二 将函数表示成为中间变量的表达方式，有

$$f(2x+1)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-\dfrac{2x+1}{2}+\dfrac{1}{2}}=\frac{1}{\dfrac{3}{2}-\dfrac{2x+1}{2}}=\frac{2}{3-(2x+1)},$$

由此可得

$$f(x)=\frac{2}{3-x}\quad(x\neq 3).$$

(1) $f[f(x)]=\dfrac{2}{3-f(x)}=\dfrac{2}{3-\dfrac{2}{3-x}}=\dfrac{2(3-x)}{7-3x}.$

(2) $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=\dfrac{2}{3-\dfrac{1}{f(x)}}=\dfrac{2}{3-\dfrac{3-x}{2}}=\dfrac{4}{3+x}\quad(x\neq\pm 3).$

【例 1.2】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1.\end{cases}$

由 $|g(x)|\leqslant 1$，得

$$|x|\geqslant\sqrt{3},$$

而由 $|g(x)|>1$，得

$$|x|<\sqrt{3},$$

所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |x|\geqslant\sqrt{3},\\ 0, & |x|<\sqrt{3}.\end{cases}$$

而

$$g[f(x)]=\begin{cases}4-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 2,\\ 0, & |f(x)|>2,\end{cases}$$

因为

$$|f(x)|\leqslant 2, x\in R,$$

所以

$$g[f(x)]=4-f^2(x)=\begin{cases}4-1, & |x|\leqslant 1,\\ 4-0, & |x|>1.\end{cases}$$

即

$$g[f(x)]=\begin{cases}3, & |x|\leqslant 1,\\ 4, & |x|>1.\end{cases}$$

2. 用定义证明极限

【例 1.3】 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2+n+9}=\dfrac{1}{2}.$

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{n^2+n}{2n^2+n+9}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，因为

$$\left|\frac{n^2+n}{2n^2+n+9}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n-9}{2(2n^2+n+9)}\right|$$
$$\leqslant\frac{|n+9|}{2(2n^2+n+9)}<\frac{2n}{4n^2}<\frac{1}{n}\quad(n>9),$$

只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，因此 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right],9\right\}$，当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{n^2+n}{2n^2+n+9}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+n+9}=\frac{1}{2}.$$

【例 1.4】 证明 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}=1$.

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}-1\right|<\varepsilon$，因为

$$\left|\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}-1\right|=\left|\frac{x^2(x-2)}{(x+2)(x-2)}-1\right|$$
$$=\left|\frac{x^2-x-2}{x+2}\right|=\frac{|x+1|}{|x+2|}|x-2|.$$

由于 $x\to2$，不妨设 $|x-2|<1$，即 $1<x<3$，从而 $|x+1|<4$，$|x+2|>3$，则

$$\left|\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}-1\right|=\frac{|x+1|}{|x+2|}|x-2|<\frac{4}{3}|x-2|,$$

因此只要 $\frac{4}{3}|x-2|<\varepsilon$ 即可，

即有 $|x-2|<\frac{3\varepsilon}{4}$，取 $\delta=\min\left\{1,\frac{3\varepsilon}{4}\right\}$，所以当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}-1\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}=1.$$

3. 求极限方法

(1) 利用极限的运算法则求极限

【例 1.5】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{1+b+b^2+\cdots+b^{2n-1}}$，其中 $|a|<1$，$|b|<1$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{1+b+b^2+\cdots+b^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-a^n}{1-a}}{\frac{1-b^{2n}}{1-b}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1-a}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-b^{2n}}{1-b}}=\frac{1-b}{1-a}.$$

【例 1.6】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

解 $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

【例 1.7】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

解　因为

$$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

所以

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

【例 1.8】　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$=0$.(无穷小与有界函数之积为无穷小).

【例 1.9】　设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$,其中 $a^2+c^2\neq0$,则必有__________.

A. $b=4d$　　B. $b=-4d$　　C. $a=4c$　　D. $a=-4c$

解　由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{a\tan x}{x}+\dfrac{b(1-\cos x)}{x}}{\dfrac{c\ln(1-2x)}{x}+\dfrac{d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}{x}}$,

又

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1,\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-2x}{x}=-2,\lim_{x\to0}\frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=0,$$

则

$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\frac{a}{-2c}=2,$$

从而 $a=-4c$,应选 D.

注　本题主要考查极限的四则运算法则,本题的关键是确定分子和分母中最低阶无穷小的阶数,由于 $x\to0$ 时,有

$$\tan x\sim x,\ln(1-2x)\sim-2x,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,1-\mathrm{e}^{-x^2}\sim x^2,$$

则分子和分母的最低阶无穷小项分别是 $a\tan x$ 和 $c\ln(1-2x)$,它们都是 x 的一阶无穷小,则分子分母同除以 x 后,问题很快得到解决.

(2) 利用函数连续性求极限