数学学习丛书

高中数学综合指导(B)

华东师范大学数学系 编

·数学学习丛书·

高中数学综合指导(B)

华东师范大学数学系　编

华东师范大学出版社

高中数学综合指导（B册）

华东师范大学数学系　　编

华东师范大学出版社出版发行
（上海中山北路3663号）

新华书店上海发行所经销　华东师范大学印刷厂印刷
开本：787×1092　1/32　　印张：13　字数：300千字
1989年7月第1版　　1990年11月第5次印刷
印数：65,001－87,000本

ISBN7－5617－0506－9/G·239　定价：3.90元

出版说明

为了大面积提高数学教育质量，为中学生提供优秀的课外读物，我们主编了这套《数学学习丛书》。在编写中注意体现：对学生从总体上加以导引，发展知识间的横向联系；避免题海，难易适中，由低到高，着重素质培养。

作为全国重点师范大学的数学系，我们竭诚为普教事业服务，为广大中学师生服务。这套丛书由我系领导和教授主持，由黄丽萍、宋国栋副教授和邹一心副编审具体负责，延请上海市的中学高级教师进行编写。尽管我们主观上坚持保证质量，力求完美，但肯定会有不足之处，敬请广大读者指正，以使本丛书质量不断提高。

本册是高中数学综合指导（B）。由邹一心、宋国栋和黄丽萍审定。

华东师范大学数学系

目 录

代数篇

三角篇

解析几何篇

立体几何篇

专题复习篇

代 数 篇

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

【复习导引】

1．理解集合、子集、真子集、交集、并集、空集、全集、补集等基本概念；掌握表示集合的列举法和描述法；了解元素与集合之间的从属关系、集合之间的包含关系和相等关系．

2．用映射解释函数的定义是对初中阶段函数概念的再认识，复习幂函数、指数函数和对数函数，要结合函数图象加深对函数的定义域、值域等有关概念的理解，并掌握有关性质，如奇偶性、单调性等．要会求反函数，掌握互为反函数的函数图象之间的关系．

3．在解对数方程过程中，未知数的取值范围可能扩大或缩小，因此可能产生增根或失根，为此必须验根，做到增舍失补．

【解题指导】

集合和映射

例1 N为自然数集、Z为整数集、Q为有理数集、$\overline{Q}$ 为无理数集、R为实数集、D为纯虚数集、E为虚数集、C为复数

集，求：

(1) $\mathbf{N}\cup\mathbf{Z}$；(2) $\mathbf{N}\cap\mathbf{Z}$；(3) $\mathbf{Q}\cap\overline{\mathbf{Q}}$；(4) $\mathbf{Q}\cup\overline{\mathbf{Q}}$；

(5) $\mathbf{R}\cup\mathbf{E}$；(6) $\mathbf{D}\cap\mathbf{E}$；(7) $\mathbf{R}\cup\mathbf{C}$；(8) $\mathbf{R}\cap\mathbf{E}$。

【解】 (1) $\mathbf{N}\cup\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$；(2) $\mathbf{N}\cap\mathbf{Z}=\mathbf{N}$；(3) $\mathbf{Q}\cap\overline{\mathbf{Q}}=\varnothing$；(4) $\mathbf{Q}\cup\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$；(5) $\mathbf{R}\cup\mathbf{E}=\mathbf{C}$；(6) $\mathbf{D}\cap\mathbf{E}=\mathbf{D}$；(7) $\mathbf{R}\cup\mathbf{C}=\mathbf{C}$；(8) $\mathbf{R}\cap\mathbf{E}=\varnothing$。

例2 已知$A=\{(x,\ y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 1\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$，$C=\{(x,\ y)\,|\,|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1\}$，$A$、$B$、$C$之间的包含关系是……………………………………（ ）

(A) $C\subset A\subset B$；　　(B) $C\subset B\subset A$；

(C) $A\subset B\subset C$；　　(D) $B\subset A\subset C$。

【解】 由图1—1看出选C。

【说明】 当集合关系比较复杂时，借助图形有助于解题。

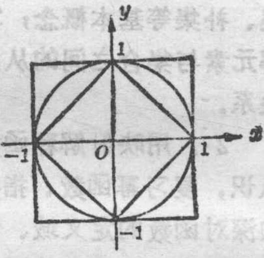

图1—1

例3 (1) $A=\{\alpha|\,\alpha$是三角形的内角$\}$，$B=\{y|\,y\in\mathbf{R}\}$，

f：$\alpha\to y=\operatorname{tg}\alpha$；

(2) $A=\{m\,|\,m\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y\,|\,y=0,\ 1\}$，

$$f:\ m\to y=\begin{cases}0,\ 当m=2n时\\1,\ 当m=2n+1时\end{cases}\quad m,\ n\in\mathbf{Z}；$$

(3) $A=\{x\,|\,0<x<1\}$，$B=\{y\,|\,0<y<1\}$，

f：$x\to y=x^2$；

(4) $A=\{x\,|\,0\leqslant x<1\}$，$B=\{\alpha\,|\,0^\circ\leqslant\alpha<180^\circ\}$，

f：$x\to\alpha$，$\sin\alpha=x$。

其中为映射的……………………………………（ ）

(A) 只有(1)、(2)、(3)；(B) 只有(2)、(3)；

(C) 只有(2)、(3)、(4)；(D) 只有(2)。

【解】 容易看出对应(3)是映射，所以D是错误的，其余三个选择支中都有(2)、(3)，因此只要看(1)、(4)是否是映射，显然对应(1)中$\mathrm{tg}90^\circ$是不存在的，对应(4)中一个原象有两个象，所以(1)、(4)都不是映射，应选B。

练习

1．选择题：

(1) 设I是全集，A、B是非空集合，且$A\subset B\subset I$，则下列集合中空集是……………………………………………（　）

(A) $A\cap B$；(B) $\overline{A}\cup B$；(C) $A\cap\overline{B}$；(D) $\overline{A}\cap\overline{B}$.

(2) 设S、T是两个非空集合，且$S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令$X=S\cap T$，那么$S\cup X$等于………………………………（　）

(A) X；(B) T；(C) $\varnothing$；(D) S。

(3) 设$I=\{$三角形$\}$，$A=\{$直角三角形$\}$，$B=\{$等腰三角形$\}$，$C=\{$正三角形$\}$，$D=\{$斜三角形$\}$，则关系式

① $A\cup D=I$；② $A\cap D=\varnothing$；③ $C\cup B\cup D=\overline{A}$；④ $C\subset B\subset D$中不正确的…………………………（　　）

(A) 只有③；　　　　(B) 只有③、④；

(C) 只有②、③、④；　　(D) 全部不正确。

(4) 在下列对应中，从A到B的一一映射是…（　　）

(A) $A=\mathbf{R}^+$，$B=\mathbf{R}^+$，对应法则：求常用对数；

(B) $A=\mathbf{R}^+$，$B=\mathbf{R}$，对应法则：求平方根；

(C) $A=\mathbf{R}$，$B=\overline{\mathbf{R}^-}$，对应法则：求平方值；

(D) $A=\mathbf{R}^-$，$B=\mathbf{R}^+$，对应法则：求绝对值。

(5) 设f：$A\to B$是从集合A到集合B的映射，则下列命题为真命题的是……………………………………………（　　）

(A) A中的每一个元素在B中必有象；

(B) B中的每一元素在A中必有原象；

(C) B中的每一个元素在A中的原象唯一；

(D) A中的不同元素的象必定不同。

2. 已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_2(x^2+x-4)=1\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，且$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，试求$a$的值。

3. 设$A=\{x|\log_{\frac{1}{3}}|x-\frac{\pi}{3}|\geqslant\log_{\frac{1}{3}}\frac{2\pi}{3},\ x\in\mathbf{R}\}$.

$B=\{x|\cos x\geqslant0,\ x\in\mathbf{R}\}$，试求$D=A\cap B$（最后结果以区间形式给出），并在数轴上标出集合$D$。

4. 集合$A=\{(x,\ y)|x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x,\ y)|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ a>0,\ b>0\}$，若 $A\cap B$ 是单元素集合，求

(1) a与b的关系；(2) ab的最小值。

函数与反函数

例4 在下列各式中，哪几个表示y是x的函数？

(1) $y=x-(x-3)$；　　(2) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$；

(3) $y=\begin{cases}x-1 & (x<0),\\ x+1 & (x\geqslant0);\end{cases}$　　(4) $y=\begin{cases}0 & (x\text{为有理数}),\\ 1 & (x\text{为实数});\end{cases}$

(5) $y=\sqrt{\sin x}$。

【答案】(1)、(3)、(5)表示y是x的函数。

例5 求函数$y=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{1-\lg\sin x}$的定义域。

【解】 $\begin{cases}16-x^2\geqslant0\\ 1-\lg\sin x\neq0\\ \sin x>0\end{cases}\Longrightarrow x\in(-4,\ -\pi)\cup(0,\ \pi)$。

例6 函数 $f(x)=\log_a(x-ka)$，$g(x)=\log_a\sqrt{x^2-a^2}$

(1) 试用k、a表示$f(\ )$ $g(x)$的定义域的公共部分；

(2) 如果方程 $\log_a(x-ka)=\log_a\sqrt{x^2-a^2}$有解，求$k$的取值范围.

【解】(1)

$$\text{由}\begin{cases} a>0,\ \text{且}a\neq1 \\ x-ka>0 \\ x^2-a^2>0\ , \end{cases} \quad \text{解得}\begin{cases} x>ka \\ x>a\text{或}x<-a. \end{cases}$$

当$k\geqslant1$时，$x>ka$；当$k<-1$时，$ka<x<-a$或$x>a$；

当$-1\leqslant k<1$时，$x>a$.

(2) $\because$ $\log_a(x-ka)=\log_a\sqrt{x^2-a^2}$，$\therefore$ $(x-ka)^2=x^2-a^2$. $\because a>0$，解得$x=\dfrac{(k^2+1)a}{2k}$，要使原方程有解，必须$k\neq0$，还须满足下列不等式组：

$$\begin{cases} x^2-a^2=\left[\dfrac{(k^2-1)a}{2k}\right]^2>0, \\ x-ka=\dfrac{(1-k^2)a}{2k}>0. \end{cases}$$

解得$k<-1$或$0<k<1$.

【说明】 不能忽视对数函数中真数必须大于零的条件. 还要注意对参数k的讨论.

例7 如图1—2所示，在边长为4的正方形$ABCD$的边上有一点P，沿着折线$BCDA$，由点B（起点）向点A（终点）移动，设点P移动的路程为x，$\triangle ABP$的面积为 $y=f(x)$.

(1) 求y的函数解析式；

(2) 作出函数的图象；

(3) 如果存在反函数，试求之；如果不存在反函数， 则说

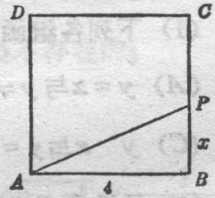

图1—2

明理由。

【解】 (1) 当点P在边BC上，即$0\leqslant x<4$时，

$$y\ \ \frac{1}{2}\cdot 4\cdot x=2x;$$

当点P在边CD上即 $4\leqslant x<8$ 时，$y=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$；

当点P在边 DA 上即 $8\leqslant x\leqslant 12$ 时，$y=\frac{1}{2}\times 4\times(12-x)=24-2x$，则所求的函数关系式为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x<4;\\ 8, & 4\leqslant x<8;\\ 24-2x, & 8\leqslant x\leqslant 12.\end{cases}$$

(2) 略。

(3) $\because$ $f(x)$不是一一映射，$\therefore$ 不存在逆映射，故 $y=f(x)$不存在反函数。

【说明】 (1) 用解析式表示一个函数时，一定要注明函数的定义域，用分段解析式表示函数时，更应标出各段中自变量的取值范围。实际问题的函数定义域要考虑到实际意义；(2) 要注意反函数存在的条件。

练习

5. 选择题：

(1) 下列各组函数中是同一函数的是…………（　　）

(A) $y=x$与$y=\frac{x^2}{x}$；　　(B) $y=x$与$y=(\sqrt{x})^2$；

(C) $y\ \ x$与$y=\sqrt{x^2}$；　　(D) $y=|x|$与$y=\sqrt{x^2}$。

(2) 函数$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2-x-1}$的定义域是………（　　）

(A) $-1\leqslant x<1$; (B) $-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$;

(C) $-1<x<1$ 且 $x\neq-\frac{1}{2}$; (D) $-1\leqslant x<1$ 且 $x\neq-\frac{1}{2}$。

(3) 函数 $y=\sqrt{x-1}+2(x\geqslant 1)$ 的反函数是……( )

(A) $y=(x-2)^2+1$; (B) $y=(x-2)^2+1\ (x\in R)$;

(C) $y=(x-2)^2+1\quad(x\geqslant 2)$;

(D) $y=(x-2)^2+1\quad(x>1)$。

(4) 函数 $f(x)=\frac{x+a}{bx+c}$(a, b, c为常数), $x\neq-\frac{1}{2}$ 的的函数是 $f^{-1}(x)=\frac{-x+5}{2x-1}\ (x\neq\frac{1}{2})$, 则$a$、$b$、$c$的值是( )

(A) $a=5$, $b=2$, $c=-1$; (B) $a=2$, $b=1$, $c=5$;

(C) $a=5$, $b=2$, $c=1$; (D) $a=1$, $b=2$, $c=5$。

(5) 下列所给的各对函数中, 互为反函数的是( )

(A) $y=\log_2 x$与 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$;

(B) $y=\log_2 x$与$y=2^{-x}$;

(C) $y=\log_2 x$ 与 $y=2^x$; (D) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 与 $y=2^x$。

(6) 下列说法正确的是……………………………( )

(A) 函数 $y=2-5^{|x|}$ 的反函数是 $y=\log_5(2-x)$ $(x<2)$;

(B) 函数 $y=2-5^{|x|}$ 的反函数是 $y=\pm\log_5(2-x)$ $(x<2)$;

(C) 函数 $y=2-5^{|x|}$的反函数是不存在的;

(D) 以上三种说法都不正确。

6. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{1-4x^2}$; (2) $y=\sqrt{9-x^2}+\frac{1}{\sqrt{|x|-2}}$;

(3) $y=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$; (4) $y=\log_{(2x-2)}\sqrt{3x-1}$.

7. 画出下列各函数的图象：

(1) $y=|x|$; (2) $y=\sqrt{x^2}-1$;

(3) $x=\sqrt{-y}$; (4) $y=x^2-2|x|$.

8. 求下列函数的反函数：

(1) $f(x)=x^2+2 \quad (x\leqslant 0)$;

(2) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4} \quad (x<-2)$;

(3) $y=\begin{cases}-x & (x\geqslant -1)\\ x^2 & (x<-1).\end{cases}$

函数的性质

例8 已知奇函数$f(x)$在定义域$(-1,1)$内单调递减，当m取何值时，$f(1-m)+f(1-m^2)<0$成立。

【解】 $\because$ 定义域为$-1<x<1$,

$$\therefore \begin{cases}-1<1-m<1\\ -1<1-m^2<1\end{cases}\Longrightarrow 0<m<\sqrt{2}.$$

又 $\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(1-m)=-f(m-1)$,

$\therefore f(1-m^2)<-f(1-m)=f(m-1)$.

$\because f(x)$是减函数，$\therefore 1-m^2>m-1\Rightarrow -2<m<1$, $\therefore 0<m<1$.

例9 若$0<a<1$时，有 $f(\log_a x)=\dfrac{a(x^2-1)}{x(a^2-1)} \quad (x>0)$，求证函数$y=f(x) \quad (x\in\mathbf{R})$是增函数。

【证】 令$y=\log_a x$，得$x=a^y$，依题意可得

$$f(y)=\frac{a(a^{2y}-1)}{a^y(a^2-1)}=\frac{a}{a^2-1}(a^y-a^{-y}),$$

$$\therefore f(x_2)-f(x_1)=\frac{a}{a^2-1}[a^{x_2}-a^{x_1})+(a^{-x_1}-a^{-x_2})],$$

对任意x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，有$(-x_2)<(-x_1)$；

$\because$ $0<a<1$，$\therefore$ $a^{x_1}>a^{x_2}$，$a^{-x_2}>a^{-x_1}$， 即

$(a^{x_2}-a^{x_1})+(a^{-x_1}-a^{-x_2})<0$，又$\because$ $\dfrac{a}{a^2-1}<0$，

故 $f(x_2)-f(x_1)>0$ 即 $f(x_2)>f(x_1)$。

$\therefore$ $f(x)$是增函数（$x\in\mathbf{R}$）。

练习

9．选择题：

(1) 函数 $y=-\sqrt{x^2}$ 在区间$(-\infty,\ \infty)$内是…（　　）

(A)增函数；(B)减函数；(C)不增不减；(D)有增有减。

(2) 函数 $y=\begin{cases}-\dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 是………………（　　）

(A) 奇函数；　　(B) 偶函数；

(C) 既是奇函数，又是偶函数；

(D) 既不是奇函数，又不是偶函数。

(3) 在区间$(-\infty,\ 0)$上为增函数的是 ………（　　）

(A) $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$；(B) $y=\dfrac{x}{1-x}$；

(C) $y=-(x+1)^2$；　(D) $y=1+x^2$。

(4) 已知$y=f(x)$是定义在R上的奇函数，当$x<0$时，$f(x)=xe^{-x}$，则当$x>0$时，$f(x)$的解析式是 ……（　　）

(A) $f(x)=-xe^{x}$ $(x>0)$；(B) $f(x)=xe^{x}$ $(x>0)$；

(C) $f(x)=-xe^{-x}(x>0)$；(D) $f(x)=xe^{-x}$ $(x>0)$。

10 判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{1-x^2}$；

(2) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$；

(3) $f(x)=\begin{cases} e^x-1 & (x\geqslant 0) \\ 1-e^{-x} & (x<0)\end{cases}$； (4) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}$.

11．证明函数$f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x})$ $(a>1)$在$x\in\mathbf{R}$上为增函数。

12．若$f(x)$在它的定义域内是增函数，试在$f(x)>0$和$f(x)<0$两种情况下，讨论下列函数的增减性：

(1) $y=2-f(x)$； (2) $y=-f(x)$；

(3) $y=\dfrac{1}{f(x)}$； (4) $y=[f(x)]^2$。

13．设$f(x)$是定义在$(0, +\infty)$上的增函数，且$f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$，若$f(3)=1$，解不等式 $f(x)-f\left(\dfrac{1}{x-5}\right)\geqslant 2$。

幂函数

例10 (1) 幂函数的图象都过点(1, 1)和点(0, 0)；

(2) 幂函数的图象不可能在第四象限；

(3) 幂函数 $y=x^n$，当$n>0$时，函数值随x的增大而增大；

(4) 幂函数$y=x^n$，当$n<0$时，在第一象限内，函数值随x值的增大而减小。

上述命题中正确的是……………………………………（ ）

(A) (1)和(4)； (B) (2)和(4)；

(C) (2)和(3)； (D) 都正确。

【解】 幂函数$y=x^n$，当$n<0$时，图象不经过点(0,0)，所以(1)是错误的；又当$n>0$时，函数值随x值的增大而增大的性质仅在第一象限内是成立的，其它象限内不一定如此。