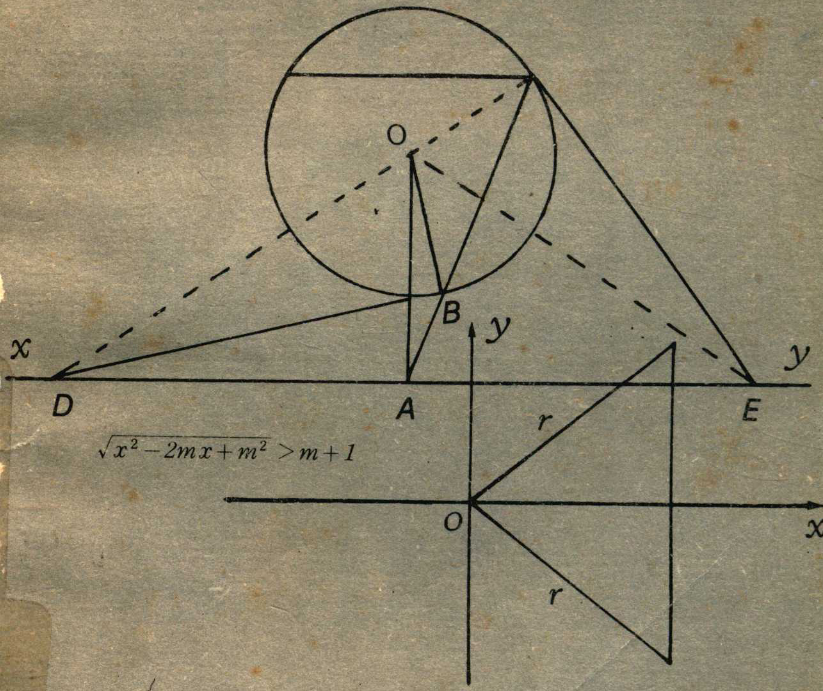
高中

数学精编

代数

第二册



浙江教育出版社

高中数学精编

代数

第二册

谢玉兰 丁宗武 许纪传
钱孝华 江焕棣 陶敏之

浙江教育出版社

高中数学精编
代　数
第二册
谢玉兰　丁宗武　许纪传
钱孝华　江焕棣　陶敏之
*
浙江教育出版社出版
（杭州武林路125号）
浙江萧山印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
*
开本787×1092　1/32　印张7.25　字数164000
1986年3月第二版
1987年2月第4次印刷
印数：231601—631600
统一书号：7346·169
定　价：　0.90元

说　明

1981年，我们曾编过《高中数学教材补充题》(共四册)，主要帮助高中学生正确理解数学概念，提高运算和逻辑思维能力，并为教师在备课时挑选例题和补充习题提供一点方便。出版以后印行四次，较受读者欢迎。这回吸取了广大读者的意见，并依据全日制六年制高中数学教材，对原书经过一番认真的筛选和修改，编为《高中数学题精编》。

在编写过程中，本着加强基础知识，训练基本技能的精神，选编习题力求新颖、灵活、多样，重视知识连贯和综合运用。与原书比较，在形式上，增加了选择题和填充题等类型题目；在每节习题前增加了〔分析与要点〕，在这部分里，我们并不求全，重在把教材内容的本质与精华提炼出来，并渗入编者自己学习的体会，以期对教与学都能稍有裨益。亦望以此与同志们共同探讨。

全书按教材内容的顺序分册分段编写，教师和学生可按教学进度与课本同步使用。其中A组属于基本题，B组略有提高或带有一定的综合，C组难度较大，可供学有余力的同学练习。读者可根据实际情况灵活选用，不必强求一律。

一九八五年四月

目　录

第一章　反三角函数和简单三角方程

一、反三角函数

［分析与要点］

1　三角函数是周期函数，在相差周期整数倍的点上，函数值皆相同．因此，对同一函数值，其原象有无穷多个，不是一一映象．从这个意义上讲，三角函数是不存在反函数的．

但是，三角函数在某一范围内——函数的单调区间内，却是一一映射，可讨论其反函数。于是，我们通过缩小、限制三角函数定义域的办法，来建立反三角函数．

三角函数单调区间的确定，还具有一定的任意性．为此，需要作一个统一规定：

$$y=\sin x,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\quad y=\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\pi;$$

$$y=\operatorname{tg}x,\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2};\quad y=\operatorname{ctg}x,\ 0<x<\pi.$$

在上述规定的单调区间里考虑三角函数的反函数，就得到了反三角函数的概念。例如，

正弦函数　$y=\sin x,\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2};$

（x 为自变量）

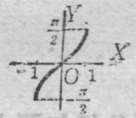
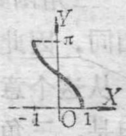
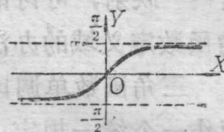
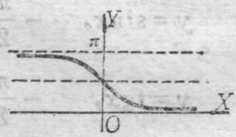
反正弦函数　$x=\arcsin y,\ -1\leqslant y\leqslant 1;$

↓改变记号（y 为自变量）

反正弦函数　$y=\arcsin x,\ -1\leqslant x\leqslant 1.$

（x为自变量）

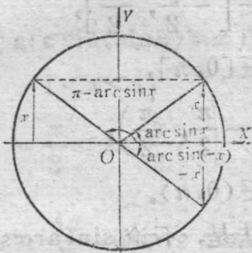
2　反三角函数的定义域、值域和图象。

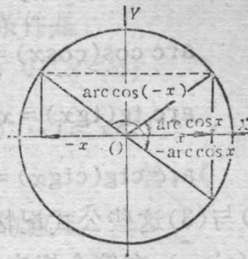
名　　称	定义域	值　　域	图　　　象
$y=\mathrm{arc\ sin}x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$	
$y=\mathrm{arc\ cos}x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$	
$y=\mathrm{arc\ tg}x$	$-\infty<x<+\infty$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$	
$y=\mathrm{arc\ ctg}x$	$-\infty<x<+\infty$	$0<y<\pi$	

要特别注意，反正弦、反正切的函数值域是对称区间$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$、$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$；反余弦、反余切的函数值域是非负数集$[0,\pi]$、$(0,\pi)$。

3　相对地讲，人们对于逆过程，或者说反过程的认识，常常是不适应的，这是由于原来过程的印象太深，起了负迁移作用，阻碍人们去认识与其相反的东西。针对如上心理活动，我们应该加强反三角函数的形象教学，加强“逆形象”。除了上面的反

三角函数图象外，利用三角函数线和单位圆，常常是有效的。





例如，在第一象限里（严格地说是 0°～90°），正弦线的大小为x，所对的角的弧度数就是 arc sin$x$。这样在形象上就很容易接受

$$\operatorname{arc}\sin(-x)=-\operatorname{arcsin}x。$$

如果正弦线在第二象限里（严格地说是 90°～180°），其大小数量是x，那么相应的角就是$\pi-\operatorname{arc}\sin x$，而不是 arc sin$x$。因为反正弦的值域是$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，不能大于$\frac{\pi}{2}$。

同样，利用余弦线，我们可以清楚地看到关系式：

$$\operatorname{arc}\cos x+\operatorname{arc}\cos(-x)=\pi。$$

在教学中，要施行这样的训练：把反函数的函数值看作象限角的弧度数，或者说，把反三角函数值当作象限角。

4 由反三角函数的图象及三角函数线的图象，来认识、记忆以下关系式：

(1) $\operatorname{arcsin}(-x)=-\operatorname{arc}\sin x, \operatorname{arccos}(-x)=\pi-\operatorname{arc}\cos x$,

$\operatorname{acrtg}(-x)=-\operatorname{arc}\operatorname{tg}x, \operatorname{arc}\operatorname{ctg}(-x)=\pi-\operatorname{arc}\operatorname{ctg}x$;

(2) 当x在反三角函数定义域内取值时，总有以下恒等式：

$\sin(\operatorname{arcsin}x)=x$, $\cos(\operatorname{arccos}x)=x$, $x\in[-1,1]$,

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{acrctg}x)=x$, $x\in(-\infty, +\infty)$;

(3) 当 x 在反三角函数的值域里取值时，总有以下恒等式：

$$\arcsin(\sin x)=x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arccos(\cos x)=x,\ x\in[0,\pi],$$

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}x)=x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg}x)=x,\ x\in(0,\pi)。$$

(2)与(3)这些公式记忆的方法是，不论 $\sin(\arcsin x)$还是 $\arcsin(\sin x)$，在符合规定时总等于 x .映射再逆映射，好似“去了再回来”，必然回到原来(起点)之值 x。但是，要仔细检查是否符合规定：对 x 先取反三角函数值，只要使反三角函数有意义，那么再取三角函数值，总等于 x；对 x 先取三角函数值，此时要小心，应该检验此 x值在何范围才能使再取反三角函数后回到 x。在做练习时，先取反三角函数，再取三角函数产生的错误机会小；而先取三角函数再取反三角函数，产生的错误机会大。在教学中注意到这点是有好处的。其中的道理在于：反三角函数是一一映射，而三角函数非一一映射。

(A)

一、选择题(1～18)

1. 等式 $\sin(\arcsin x)=x$ 成立的条件是

(A) $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$；(B) $2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$；

(C) $-\infty<x<+\infty$；(D) $-1\leqslant x\leqslant 1$。

答：(　)

2. 等式 $\cos(\arccos x)=x$ 成立的条件是

(A) $0\leqslant x\leqslant\pi$；　(B) $2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi\ (k\in Z)$；

(C) $-1\leqslant x\leqslant 1$; (D) $-\infty<x<+\infty$。

答：(　　)

3. 等式 $\arcsin(\sin x)=x$ 成立的条件是

(A) $-1<x<1$; (B) $0<x<\pi$;

(C) $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$; (D) $-1\leqslant x\leqslant 1$。

答：(　　)

4. 设 $\theta=\frac{4\pi}{3}$，则 $\arccos(\cos\theta)$ 的值是

(A) $-\frac{2\pi}{3}$; (B) $\frac{2\pi}{3}$; (C) $\frac{4\pi}{3}$; (D) $\frac{\pi}{3}$。

答：(　　)

5. $\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}\right)$的值等于

(A) $\frac{4\pi}{5}$; (B) $\frac{\pi}{5}$; (C) $-\frac{\pi}{5}$; (D) $-\frac{4\pi}{5}$。

答：(　　)

6. 函数 $y=\cos(\arccos x)$， $x\in[-1,1]$的图象是

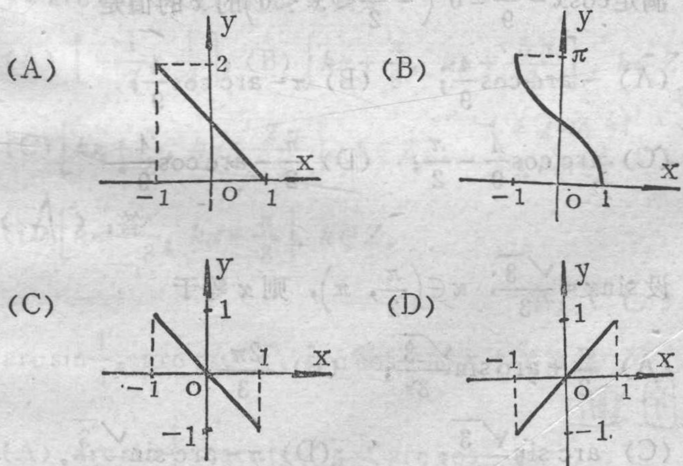


图 1

答：( )

7. 函数 $y=\cos x$ 与 $y=\arccos x$ 都是

(A) 减函数； (B) 偶函数；

(C) 周期函数； (D) 非周期函数。

答：( )

8. 等式 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$ 成立的条件是

(A) $x\in R$； (B) $x\geqslant 0$； (C) $-1<x<1$；

(D) $-1\leqslant x\leqslant 1$。 答：( )

9. $y=\frac{1}{3}\arccos(-x^2)$ 的最小值是

(A) $\frac{\pi}{3}$； (B) 0； (C) $\frac{\pi}{6}$； (D) 不存在。

答：(D)

10. 函数 $y=\cos(\arcsin x)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的图象是

(A) 圆； (B) 直线； (C) 余弦曲线； (D) 半圆。

答：( )

11. 满足 $\cos x-\frac{4}{9}=0$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<0\right)$ 的 x 的值是

(A) $-\arccos\frac{4}{9}$； (B) $\pi-\arccos\frac{4}{9}$；

(C) $\arccos\frac{4}{9}-\frac{\pi}{2}$； (D) $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{9}$。

答：(A)

12. 设 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，则 x 等于

(A) $\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$； (B) $\frac{2\pi}{3}$；

(C) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$； (D) $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$。

答：(　　)

13. arc cos(cos8)属于区间
$=8-2\pi \doteq 1.72$

(A) (7,9); (B) (−9,−7); (C) (−2,−1); (D) (1,2).

答：(D)

14. arc sin(sin10)等于

(A) 10; (B) $10-3\pi$; (C) $3\pi-10$; (D) 以上都不是.

$\sin 10=\sin(3\pi-10)$

答：(C)

15. 当$\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{2}$时，arc sin(sin$x$)等于

$1\frac{1}{2}$　$2\frac{1}{2}$　$\sin x=\sin(x-2\pi)$

(A) $-x+2\pi$; (B) $x-2\pi$; (C) x; (D) 以上都不是.

答：(B)

16. arc cos$x$<arc cos($-x$)的充要条件是
$=\pi-\arccos x$　　$\arccos x<\frac{\pi}{2}$

(A) $-1<x<0$;　　(B) $0\leqslant x\leqslant 1$;

(C) $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$;　　(D) $0<x\leqslant 1$.

答：(D)

17. $y=\arcsin(2\cos x)$的定义域是

(A) $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$; (B) $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$, $k\in Z$;

(C) $\left[k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$, $k\in Z$;

$-1\leqslant 2\cos x\leqslant 1$
$-\frac{1}{2}\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{2}$

(D) $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},\ k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$, $k\in Z$.

答：(C)

18. $\arcsin\frac{1}{4}$, arc tg$\sqrt{5}$, $\arccos\frac{4}{5}$的大小关系是

画图.

(A) $\arcsin\frac{1}{4}<\mathrm{arc\,tg}\sqrt{5}<\arccos\frac{4}{5}$;

~~令 $\arcsin\frac{1}{4}=\alpha$~~

~~$\sin\alpha=\frac{1}{4}$　∴ $\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$~~

~~则 $\arccos\frac{\sqrt{15}}{4}=\alpha$~~

(B) $\arccos\frac{4}{5}<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{5}<\arcsin\frac{1}{4}$；

(C) $\arccos\frac{4}{5}<\arcsin\frac{1}{4}<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{5}$；

(D) $\arcsin\frac{1}{4}<\arccos\frac{4}{5}<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{5}$.

答：（D）

二、填空题(19～33)

19. (1) $\arcsin(\quad)=-\frac{\pi}{2}$; (2) $\pi-\arccos(\quad)=\frac{\pi}{2}$;

(3) $\operatorname{arc\,tg}(\quad)+\pi=\frac{3\pi}{4}$; (4) $\sin[\arcsin(\quad)]=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(5) $\sin[\arccos(\quad)]=\frac{\sqrt{2}}{2}$; (6) $\arcsin[\sin(\quad)]=\frac{\pi}{3}$;

(7) $\cos[\arcsin(\quad)]=\frac{\sqrt{3}}{2}$; (8) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)=(\quad)$;

(9) $\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}-\frac{\pi}{3}\right)=(\quad)$; (10) $\operatorname{arc\,ctg}[\operatorname{tg}(\quad)]=\frac{2\pi}{3}$.

20. 用区间表示下列各式中 α 的取值范围：

(1) 若 $\alpha=\arcsin x, x\in[-1,0]$, 则 $\alpha\in$____;

(2) 若 $\alpha=\arccos x, x\in[-1,0]$, 则 $\alpha\in$____;

(3) 若 $\alpha=\operatorname{arc\,tg}x, x\in[-1,1]$, 则 $\alpha\in$____;

(4) 若 $\alpha=\operatorname{arc\,ctg}x, x\in[-1,\sqrt{3}]$, 则 $\alpha\in$____;

(5) 若 $\alpha=2\pi-2\arccos x, |x|\leqslant1$, 则 $\alpha\in$____.

21. 用不等号“>”或“<”填空：

(1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$____ $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$;

(2) $\operatorname{arc\,tg}(-2)$____$\operatorname{arc\,tg}(-1.5)$;

(3) $\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$____$\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\right)$;

(4) $\operatorname{arc\,ctg}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$____$\operatorname{arc\,ctg}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$;

(5) $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)-\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$____0;

(6) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}-\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$____0.

22. (1) 函数 $y=\sin 3x$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right)$上的反函数是________，定义域是________，值域是________；

(2) 函数 $y=2\cos\frac{x}{3}$在 $x\in[0,\ 3\pi]$上的反函数是________，定义域是________，值域是________。

23. (1) 函数 $y=4\operatorname{tg}3x$ 在$x\in\left(-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right)$上的反函数是________，定义域是________，值域是________；

(2) 函数 $y=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$在 $x\in(0,3\pi)$上的反函数是________，定义域是________，值域是________。

24. (1) 函数 $y=\arccos 2x$ 的反函数是________，定义域是________，值域是________；

(2) 函数 $y=3+5\arcsin x$ 的反函数是________，定义域是________，值域是________；

(3) 函数 $y=-1+3\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$的反函数是________，定义域是________，值域是________；

(4) 函数 $y=2\mathrm{arc\,ctg}\frac{x}{3}$的反函数是________. 定义域是________，值域是________.

25. 函数 $y=\lg\mathrm{arc\,cos}\sqrt{2^x-1}$ 的值域是________.

26. (1) $\mathrm{arc\,sin}\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)=$________;

(2) $\mathrm{arc\,sin}\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)=$________;

(3) $\mathrm{arc\,tg}\left(\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{5}\right)=$________;

(4) $\mathrm{arc\,cos}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right)\right]=$________;

(5) $\mathrm{arc\,tg}(\mathrm{tg}\sqrt{3})=$________;

(6) $\mathrm{arc\,ctg}\left[\mathrm{ctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]=$________.

27. (1) $\sin\left[\mathrm{arc\,cos}\left(-\frac{12}{13}\right)\right]=$________;

(2) $\cos\left(\mathrm{arc\,sin}\frac{4}{5}\right)=$________;

(3) $\mathrm{tg}\left(\mathrm{arc\,sin}\frac{15}{17}\right)=$________;

(4) $\mathrm{tg}\left[\mathrm{arc\,cos}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]=$________;

(5) $\mathrm{ctg}\left\{\mathrm{arc\,cos}\left[\sin\left(\mathrm{arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right]\right\}=$________;

(6) $\sin\left(\mathrm{arc\,cos}\frac{b}{a}\right)=$________ $(a>b>0)$.

28. 函数 $y=2\mathrm{arc\,sin}(1-3x)$ 的最大值是________，最小值是________.

29. (1) $\arc\sin\frac{2\sqrt{2}}{3}+\arc\cos\frac{2\sqrt{2}}{3}=$ ________;

(2) $\arc tg\frac{7\pi}{3}+\arc ctg\frac{7\pi}{3}=$ ________.

30. 用反三角函数表示下列各式中的 x:

(1) $\sin x=\frac{1}{3}$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 则 $x=$ ________;

(2) $\cos x=-\frac{3}{4}$, $x\in[\pi, 2\pi]$, 则 $x=$ ________;

(3) $\sin 3x=-\frac{1}{5}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, 则 $x=$ ________;

(4) $tg2x=5$, $x\in[0,\pi]$, 则 $x=$ ________;

(5) $\sin x=\frac{1}{a^2+1}$, $x\in\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, 则 $x=$ ________;

(6) $\cos x=\frac{1}{b^2+1}$, $x\in[-\pi, 0]$, 则 $x=$ ________;

(7) $tgx=\frac{b}{a}$ $(a>0, b>0)$, $x\in[-\pi, 0]$, 则 $x=$ ____;

(8) $\cos x=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, $x\in[0,\pi]$, 则 $x=$ ________.

31. $y=f(x)=\sin x$在$\left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$上的反函数 $f^{-1}(x)=$ ________, 其定义域是________, 值域是________.

32. 函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}-\arc\cos\frac{1}{2x-3}$的定义域是 ______, 值域是 ________.

33. $\arc\sin a=\arc\sec$________$=\arc ctg$________ $=\arc\csc$________$(0<a<1)$。

三、基本技能训练题(34~44)

34. 下列各式是否有意义：

(1) $\arcsin 3$；　(2) $\arcsin 30°$；

(3) $\arccos\frac{\pi}{6}$；　(4) $\arcsin\frac{\pi}{3}$；

(5) $\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$；　(6) $\arccos\frac{a^2}{a^2+1}$；

(7) $\arcsin(\sqrt{2}-1)^2$；　(8) $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{\pi}$；

(9) $\arcsin(\cos x)$；　(10) $\arcsin(\sec x)$。

35. 判断下列各式结论是否正确，并说明理由：

(1) $\because \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = 120°$；

(2) $\sin(\arcsin\sqrt{3}) = \sqrt{3}$；

(3) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$；

(4) $\arcsin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$；

(5) $|\arcsin x| \leqslant 1$；

(6) $\sin\left(\arccos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$；

(7) $\sin(\arcsin x) = x$；

(8) $\arcsin(\sin x) = x$；

(9) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$；

(10) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 5) = 5$；

(11) $\because \arccos(-x) = \pi - \arccos x$，

$\therefore \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$，