最难的是考试 最快的是捷径

KUAIJIEJING XILIEJIAOFU

快捷径

KUAIJIEJING

高中考试快捷径

数学

北方妇女儿童出版社

最难的是考试　最快的是捷径

KUAIJIEJING
XILIEJIAOFU

快捷径

KUAIJIEJING

高中考试快捷径

数学

丛书主编：陈伟国
本册主编：王思俭

北方妇女儿童出版社

丛书主编 陈伟国
本册主编 王思俭
作　　者 王思俭

高中考试快捷径·数学

策　　划 思创图书工作室
主　　编 王思俭
责任编辑 姜　宁
出 版 者 北方妇女儿童出版社
发 行 者 北方妇女儿童出版社文教图书发展中心
地　　址 长春市人民大街 124 号出版大厦 11 层
电　　话 0431－5678573
印　　刷 长春市南关文教印刷厂
开　　本 1/32 850×1168（毫米）
印　　张 19

2002 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN7－5385－2005－8/G·1218
定价：20.00 元

目　　录

专题一　函　　数

专题二　三角变换

专题三　不 等 式

专题四　数列·数列的极限·数学归纳法

专题五　复　　数

专题六　排列组合、二项式定理

专题七　直线与平面

专题八　多面体与旋转体

专题九　直线与圆锥曲线

专题十　数学思想的运用

专题一

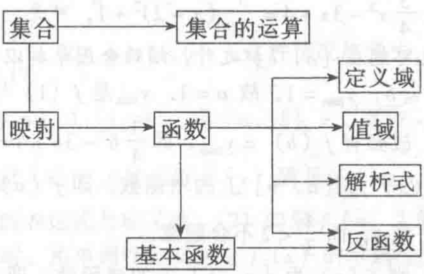
函　数

主题1　函数的解析式、定义域和值域

主题提示　心中有考纲　眼中有目标

函数的基本概念（定义、映射的定义、解析式、定义域和值域）是函数的基本问题，是研究函数的基础，在高考试题中经常以选择题、填空题的形式出现，有时也在解答题某大题第（1）小题出现．每年都出现，且分值为5分左右．所以复习函数，首先应弄清函数的三个要素．

知识梳理　把握脉络　一目了然



重点聚焦　分清主次　事半功倍

映射：设 A、B 两个集合及对应关系 f，对于 A 中任何一个元素在 B 中都有惟一的元素与之对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射，记作：$f: A \longrightarrow B$．

函数：设 A、B 两个非空的数集，集合 A 到集合 B 的映射为 f，且象集 C 中的每一个元素在集合 A 中都有原象．那么，这个映射叫做函数，A 是函数的定义域，

象集 C 是函数的值域，$C\subseteq B$，$x\in A$，$y\in C$，记作：$y=f(x)$，即为函数的解析式.

反函数：由函数 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，若对 y 在值域 C 中的每一个值，x 有且只有一定义域 A 中的值与之对应，再将 x，y 对换得到 $y=f^{-1}(x)$，叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，反函数的定义域是原函数的值域，反函数的值域是原函数的定义域.

求反函数的定义域，既要考虑函数有意义，又要考虑问题的实际意义，应特别注意复合函数定义域的求法.

值域的求法通常有以下几种：①配方法；②反函数法；③判别式法；④单调法；⑤基本不等式法；⑥换元法；⑦数形结合法；⑧弦函数有界性法；⑨分离变量观察法等等. 此点在高考中常常被考查，是一个重点.

抓眼新题 新题新解　不睹不快

【例 1】 设二次函数 $y=\frac{3}{4}x^2-3x+4$ 的定义域和值域都为 $[a, b]$，$(a<b)$，试求 a、b 的值.

【思路分析】 $y=\frac{3}{4}x^2-3x+4=\frac{3}{4}(x-2)^2+1$，可见，其对称轴 $x=2$，它可能在 $[a, b]$ 内，也可能在 $[a, b]$ 之外，须结合图象加以讨论.

【解】 ①若 $a\leqslant 2\leqslant b$，$y_{\min}=1$，故 $a=1$. $y_{\max}$是 $f(1)$ 与 $f(b)$ 中较大的，但 $f(1)=\frac{7}{4}<2\leqslant b$，故必有 $f(b)=y_{\max}$，即$\frac{3}{4}b^2-3b+4=b$.　$\therefore b=4$.

②若 $2<a<b$，$f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的增函数，即 $f(a)=a$，$f(b)=b$，但 $f(x)=x$ 的解为$\frac{4}{3}$或 4，而$\frac{4}{3}<2$ 不合题意.

③当 $0<a<b\leqslant 2$，则 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的减函数，即 $f(a)=b$，$f(b)=a$，联立解得 $a=b=\frac{4}{3}$，不合题意，故 $a=1$，$b=4$.

【解题回顾】 (1) 对于给定定义域的二次函数，应考虑其对称轴是否在定义域内，然后进行讨论，同时应结合图象，做到直观便捷.

(2) 联想：若函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}$在区间 $[a, b]$ 上的最小值为 $2a$，最大值为 $2b$，求 $[a, b]$　　(2000 年全国高中数学竞赛题)

【解】 $f(x)$ 的对称轴为 $x=0$，

①当 $a\leqslant 0\leqslant b$ 时，$[f(x)]_{\max}=\frac{13}{2}=2b$. $\therefore b=\frac{13}{4}$.

$f(x)$ 的最小值是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 中较小的一个. 因为 $f(b)=f\left(\frac{13}{4}\right)=-\frac{169}{32}+\frac{13}{2}=\frac{13\times(16-13)}{32}=\frac{39}{32}>0$, 故必有 $f(a)=2a=[f(x)]_{\min}$

$\therefore -\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2a\quad \therefore a^2+4a-13=0,\ a=\frac{-4\pm2\sqrt{17}}{2}=-2\pm\sqrt{17}$

$\because \sqrt{17}-2>0\quad \therefore a=\sqrt{17}-2$ 舍去. $a=-2-\sqrt{17}$ 合题意.

②当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是减函数　$\therefore [f(x)]_{\max}=f(a)$,

$[f(x)]_{\min}=f(b)$, $\therefore\begin{cases}-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2b,\\ -\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}=2a,\end{cases}$ 两式相减得: $\frac{1}{2}(a^2-b^2)=2(a-b)$

$\because a\neq b\quad \therefore a+b=4.\quad \therefore -\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2(4-a)\quad \therefore a^2-4a+3=0\quad \therefore a=1$, $a=4$. 当 $a=1$ 时, $b=3$, 当 $a=4$ 时, $b=0$ 舍.

③当 $b<0$ 时, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增函数, $\therefore [f(x)]_{\max}=f(b)$,

$[f(x)]_{\min}=f(a)\quad \therefore\begin{cases}-\frac{1}{2}a^2+\frac{13}{2}=2a,\\ -\frac{1}{2}b^2+\frac{13}{2}=2b,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+4a-13=0,\\ b^2+4b-13=0.\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a=-2\pm\sqrt{17}\\ b=-2\pm\sqrt{17}\end{cases}$ 又 $\because a<b<0\quad \therefore$ 这种情况均舍去.

综上所述: $[a,b]=[1,3]$, 或 $[a,b]=\left[\sqrt{17}-2,\frac{13}{4}\right]$

【例 2】 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(\log_2 x)=x+\frac{a}{x}$, a 为常数. (1) 求函数 $f(x)$ 的表达式及定义域; (2) 如果 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值; (3) 当 $f(x)$ 为偶函数时, 用单调性定义讨论 $f(x)$ 的单调性.

【思路分析】 定义域、值域与对应法则是函数概念中的三个要素, 定义域是三要素的灵魂, 它们是研究函数各种问题的基石. 熟练地掌握各种形式的定义域的求法, 是为研究更深刻的问题作充分而必须的准备.

【解】 (1) 设 $\log_2 x=t$, $\therefore x=2^t$, $\therefore f(t)=2^t+\frac{a}{2^t}$,

$\therefore f(x)=2^x+\frac{a}{2^x}$. $(x\in R)$

(2) $\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(x)=f(-x)$,

即　$2^{-x}+\frac{a}{2^{-x}}=2^x+\frac{a}{2^x}$, 即 $2^x-2^{-x}-a\cdot2^x+a\cdot2^{-x}=0$,

$\therefore (2^x-2^{-x})(1-a)=0.$

$\because 2^x-2^{-x}$不能恒为0，$\therefore a=1.$

(3) 当 $a=1$ 时，$f(x)=2^x+\frac{1}{2^x}$，设 $0<x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=(2^{x_1}+\frac{1}{2^{x_1}})-(2^{x_2}+\frac{1}{2^{x_2}})=(2^{x_1}-2^{x_2})+\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}=(2^{x_1}-2^{x_2})\left(\frac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}}\right)$，

$\because 2^{x_1}-2^{x_2}<0$，$2^{x_1+x_2}>0$，$2^{x_1+x_2}-1>0$，

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

$\because f(x)$ 为偶函数，$\therefore f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是减函数.

【解题回顾】 (1) 欲求定义域的函数 $f(x)$，其解析式未直接给出，因此首先应求 $f(x)$ 的函数解析式. 与此同时，确定变量 t 的范围即为所求函数 $f(x)$ 的定义域. 由 $f[g(x)]$ 的解析式求 $f(x)$ 解析式的问题，通常所用的解法有换元法、配凑法、参数法等等，上述解答中用了换元法.

(2) 联想：已知 $f(\log_a x)=\frac{a(x^2-1)}{x(a^2-1)}$，$(a>1)$

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 的表达式；

(Ⅱ) 讨论 $f(x)$ 的单调性（要求证明）；

(Ⅲ) 证明：对于大于1的自然数 n，有 $f(n)>n$ 恒成立.（1999年辽宁省高考模拟试题）

提示 用换元法求 $f(x)$ 的表达式 $f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})$；再用单调性定义或指数函数单调性性质证明 $f(x)$ 是增函数；最后用数学归纳法证明 $f(n)>n$.

【例3】 如图1-1-1，设点 $P(1,0)$，关于直线 $y=kx$ 的对称点是 Q，直线 OQ 的斜率记为 $f(k)$.

(1) 写出以 k 为自变量的函数 $f(k)$ 的表达式，并指出此函数的定义域；

(2) 判定 $f(k)$ 的奇偶性；

(3) 当 $k\in(1,+\infty)$ 时，判定 $f(k)$ 的增减性.

【思路分析】 设 $k=\text{tg}\theta$，由于 P 与 Q 关于________对称，故 OP 与 OQ 的倾斜角关系为____________故 $f(k)=\text{tg}2\theta=$ ________ $=$ ________. 由函数奇偶性定义及单调性的判定方法可以解决本题.

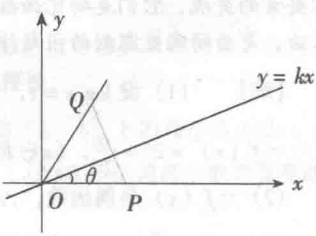


图1-1-1

【解】　(1) 设 $k=\text{tg}\theta$，则 $f(k)=\text{tg}2\theta=\dfrac{2\text{tg}\theta}{1-\text{tg}^2\theta}=\dfrac{2k}{1-k^2}$，所以定义域为 $\{k\mid k\in R$，且 $k\neq\pm1\}$.

(2) $f(-k)=\dfrac{-2k}{1-(-k)^2}=-\dfrac{2k}{1-k^2}=-f(k)$，又由 (1) 知 $f(k)$ 的定义域关于原点对称，∴函数 $f(k)$ 是奇函数；

(3) 设 k_1，$k_2\in(1,+\infty)$，且 $k_1<k_2$，则 $f(k_1)-f(k_2)=\dfrac{2(k_1-k_2)(1+k_1k_2)}{(1-k_1^2)(1-k_2^2)}<0$.

∴$f(k)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数.

【解题回顾】　(1) 对于由实际问题或其它数学问题引出的函数，求定义域时，必须考虑它的实际意义；判断函数的奇偶性必须考虑函数定义域的对称性；证明单调性一定"回到定义去".

(2) 联想①. 已知△ABC 为正三角形，$AB=2$，P、Q 依次为 AB、AC 上的点，且线段 PQ 将△ABC 分为面积相等的两部分，如图 1-1-2. 设 $AP=x$，$AQ=t$，$PQ=y$，求：

(Ⅰ) t 与 x 的函数关系式；

(Ⅱ) y 与 x 的函数关系式；

(Ⅲ) y 的最大值与最小值.

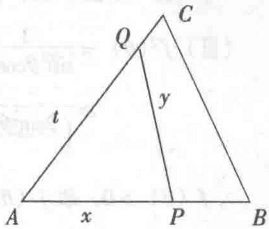


图 1-1-2

提示　∵$S_{\triangle ABC}=$______，∴$\dfrac{1}{2}\cdot(\quad)\cdot\sin60°=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，故 $t=$______，且 $x\in$______.

又由______定理得：$y^2=x^2+t^2-2xt\cos60°=$______，∴$y=$______. $x\in$______.

$y^2=(x-\dfrac{2}{x})^2+2$，又 $1\leqslant x\leqslant2$，∴_____$\leqslant-\dfrac{2}{x}\leqslant$______，即______$\leqslant x-\dfrac{2}{x}\leqslant$______，

∴$(x-\dfrac{2}{x})^2\leqslant$______，即 $y^2\in$______，故______$\leqslant y\leqslant$______.

所以 $y_{\max}=\sqrt{3}$，$y_{\min}=\sqrt{2}$.

联想②. 已知 $ABCD$ 是一张长方形的纸片，$AB=2$，$AD=4$，在 BC 边上有一动点 P，把纸片的左下角折起，使 A 点与 P 点重合，且折痕线段 MN 的端点 M 在 AB 边上，N 在 AD 边上，如图 1-1-3.

(Ⅰ) 设∠$PAB=\theta$，用 θ 表示线段 MN 的长 $f(\theta)$；

（Ⅱ）求 $f(\theta)$ 的定义域；

（Ⅲ）当 θ 为何值时，$f(\theta)$ 有最小值，并求这个最小值.

【分析】　由题意知，A 与 P 关于 MN 对称，且 $\angle MNA=\theta$ 可通过实际操作，找出 θ 的范围，是解题关键，注意基本不等式的应用.

【解】　（Ⅰ）内对称性知，$AP\perp MN$ 于 E. $\because AB=2$，

故 $AP=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$AM=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$BP=\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta}$.

$\because \dfrac{MN}{AP}=\dfrac{AM}{BP}$，$MN=$____$=$______$=\dfrac{1}{\cos^2\theta\sin\theta}$

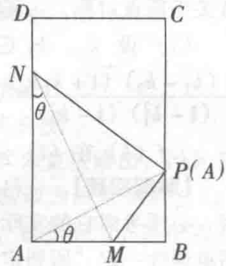


图 1－1－3

（Ⅱ）当 $AN=4$ 时，θ 最小，$AN=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=4$，$\theta_{最小}=\dfrac{\pi}{12}$，当 $AM=2$ 时，θ 最大，$AM=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=2$，$\theta_{最大}=\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore f(\theta)$ 的定义域为 $[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{4}]$.

（Ⅲ）$$f^2(\theta)=\frac{1}{\sin^2\theta\cos^4\theta}=\frac{2}{(2\sin^2\theta)\cdot(\cos^2\theta)(\cos^2\theta)}$$

$$\geqslant\frac{2}{\left(\dfrac{2\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta}{3}\right)^3}=\frac{27}{4}$$

$\because f(\theta)>0$，故 $f(\theta)\geqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

故当 $2\sin^2\theta=\cos^2\theta$，即 $\theta=\text{artg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $f(\theta)$ 最小值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

【例 4】　设 $a>0$ 且 $a\neq1$，函数 $f(x)=\log_a\dfrac{x-3}{x+3}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域并判断 $f(x)$ 在定义域内的单调性；

(2) 若 $m\leqslant x<n$ 时总有 $1+\log_a(n-1)<f(x)\leqslant1+\log_a(m-1)$，求 m 与 a 的取值范围.

【思路分析】　由对数函数意义建立 $\dfrac{x-3}{x+3}>0$，这样求出定义域，并利用单调性定义证明它是单调增.

第 (2) 题，由函数值大小关系确定 a 的范围，根据值域情形. 建立两个等式：

$$\begin{cases}1+\log_a(n-1)=\log_a\dfrac{n-3}{n+3}\\[2ex]1+\log_a(m-1)=\log_a\dfrac{m-3}{m+3}\end{cases}$$

化为 $\begin{cases}an^2+(2a-1)n+3(1-a)=0\\am^2+(2a-1)m+3(1-a)=0\end{cases}$

等价转化为：m，a 是方程 $at^2+(2a-1)t+3(1-a)=0$ 在 $(3,+\infty)$ 内的两个解．由充要条件：$\begin{cases}\triangle=(2a-1)^2-12a(1-a)>0\\ -\dfrac{2a-1}{2}>3\\ 9a+3(2a-1)+3(1-a)>0\end{cases}$ 这样就解出 a 的取值范围．

【解】　(1) 由 $\dfrac{x-3}{x+3}>0$，得 $x>3$ 或 $x<-3$，

$\therefore f(x)$ 定义域为 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$．

$\because \dfrac{x-3}{x+3}=1-\dfrac{6}{x+3}$，它分别在 $(-\infty,-3)$ 和 $(3,+\infty)$ 上都是增函数，

$\therefore$ 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 和 $(3,+\infty)$ 上都是增函数，当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 和 $(3,+\infty)$ 上都是减函数．

(2) $\because m<n$，$\therefore m-1<n-1$，

又 $1+\log_a(n-1)<1+\log_a(m-1)$，$\therefore 0<a<1$．

又由 (1) 知 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$．

$\because n>1$，$\therefore$ 必有 $m>3$．且 $n>m$．

由 (1) 得 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $[m,n)$ 上是减函数．

$\therefore$ 有 $\begin{cases}1+\log_a(n-1)=\log_a\dfrac{n-3}{n+3},\\ 1+\log_a(m-1)=\log_a\dfrac{m-3}{m+3}.\end{cases}$

即 $\begin{cases}an^2+(2a-1)n+3(1-a)=0,\\ am^2+(2a-1)m+3(1-a)=0,\end{cases}$ 其中 $n>m>3$．

所以方程 $ax^2+(2a-1)x+3(1-a)=0$ 在 $(3,+\infty)$ 内有两相异实根，

其充要条件为 $\begin{cases}\triangle=(2a-1)^2-12a(1-a)>0,\\ -\dfrac{2a-1}{2a}>3,\\ 9a+3(2a-1)+3(1-a)>0.\end{cases}$

解得 $0<a<\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$．

【解题回顾】　(1) 本题是函数的综合性问题，主要涉及了函数的定义域、对数函数的单调性、根据定义域和值域确定 m 的取值范围．运用了分类讨论方法研究单调性，利用等价转化思想构造一元二次方程．

(2) 联想：1999 年江苏省会考数学试题：设函数 $f(x)=\log_a\dfrac{x-2a}{x+2a}$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$，若函数的定义域为 $[s,t]$，则函数 $f(x)$ 的值域为 $[\log_a(t-a),\log_a$

$(s-a)]$，求实数 a 的取值范围.

【思路分析】 函数 $f(x)$ 的真数部分是我们熟悉的函数，题中限定的定义域与函数 $f(x)$ 的"自然定义域"有什么关系呢？又 $s<t$，而 $\log_a(t-a)<\log_a(s-a)$，这说明 $0<a<1$，那么 $f(x)$ 是否具有单调性呢？挖掘隐含信息，思路就渐渐展开了.

函数的定义域为：

$$\begin{cases}\dfrac{x-2a}{x+2a}>0\\ s-a>0\\ s\leqslant x\leqslant t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2a\text{ 或 }x<-2a\\ a<s\leqslant x\leqslant t.\end{cases}$$

$\because$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[s,t]$，$\therefore [s,t]\subset(2a,+\infty)$，从而 $2a<s\leqslant x\leqslant t\ (a>0)$.

又 $t>s$，而 $\log_a(t-a)<\log_a(s-a)$，这说明 $0<a<1$.

$\dfrac{x-2a}{x+2a}=1-\dfrac{4a}{x+2a}$，则 $g(x)=1-\dfrac{4a}{x+2a}$ 在 $[s,t]$ 上是增函数，从而 $f(x)$ 在 $[s,t]$ 上是减函数，故 $f(x)$ 的值域是 $[f(t),f(s)]$. 据已知条件知

$$\begin{cases}\log_a\dfrac{t-2a}{t+2a}=\log_a(t-a)\\ \log_a\dfrac{s-2a}{s+2a}=\log_a(s+a).\end{cases}$$

故 s，t 是方程 $\dfrac{x-2a}{x+2a}=x-a$ 的两根，且两根均大于 $2a$，

将方程整理为 $x^2+(a-1)x+2a-2a^2=0$，由二次方程根的分布充要条件得：

$$\begin{cases}-\dfrac{a-1}{2}>2a\\ \triangle=(a-1)^2-4(2a-2a^2)>0\\ (2a)^2+(a-1)\cdot 2a+2a-2a^2>0\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}a<\dfrac{1}{5}\\ a>1\text{ 或 }a<\dfrac{1}{9}\\ a>0\text{ 或 }a<0.\end{cases}$$ 又 $0<a<1$，故 $0<a<\dfrac{1}{9}$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $0<a<\dfrac{1}{9}$.

【例 5】 a、$b\in R$，$A=\{(x,y)\mid x=n,\ y=na+b,\ n\in Z\}$，$B=\{(x,y)\mid x=m,\ y=3m^2+15,\ m\in Z\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$，是否存在 a、b，使① $A\cap B\neq\Phi$，② $(a,b)\in C$ 同时成立.

【思路分析】 不少同学被整数解所迷惑，觉得不好下手. 此时，我们不妨放

宽要求：先考虑有实解，然后再观察它能否是整数.

由$\begin{cases} y = ax + b \\ y = 3x^2 + 15 \end{cases}$得到 $3x^2 - ax + 15 - b = 0$，要有实解，须$\triangle = a^2 - 12(15 - b) \geqslant 0$，又 $a^2 + b^2 \leqslant 144$. 故 $12(15 - b) \leqslant a^2 \leqslant 144 - b^2$，$(b-6)^2 \leqslant 0$，$b = 6$，代入上式，知 $108 \leqslant a^2 \leqslant 108$，$a^2 = 108$，但此时 $x = \frac{a}{3} \notin Z$，所求 a、b 不存在.

【解】　设 $p(n, na + b) \in A \cap B$，则应有 $na + b = 3n^2 + 15$，把这看作是关于 (a, b) 的二元一次方程，此直线上的点至少有一点满足 $a^2 + b^2 \leqslant 144$，即由点到原点距离 $\leqslant 12$，至少需此直线到原点距离 $d = \frac{3n^2 + 15}{\sqrt{1 + n^2}} \leqslant 12$，$(n^2 - 3)^2 \leqslant 0$，从而 $n = \pm\sqrt{3}$，但它不是整数，故答案是否定的.

【解题回顾】　(1) 在这个解法里，使用了下列技巧：①更换主元. 把 (m, n) 的二次方程变为关于 (a, b) 的一次方程，简化了问题；②把直线上存在到定点距离 $\leqslant 12$ 转化为定点到直线的距离 $\leqslant 12$，解法虽然简单，但没有深厚的数学功底是难以灵活运用的.

(2) 例 4 与例 5 都是属于探索型问题，这种题型的解法都是假定存在情况，然后进行推理计算，看与事实、已知是否相违背.

【例 6】　若 $x^2 + y^2 - xy = 1$，则 $u = x^2 - y^2$ 的取值范围是（　　）

A. $[-1, 1]$　　　　B. $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

C. $\left[0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$　　　　D. $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$

【思路分析】　本题看似很难入手，但只要仔细观察本题特点，则可有多种途径入手.

解法一　已知的式子可使我们想起余弦定理：$1^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60°$，故可作一个一边长为 1，对角为 60° 的三角形（含退化情况，如图 1-1-4 所示）.

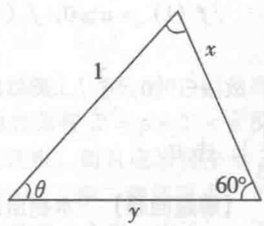


图 1-1-4

由正弦定理：$\frac{x}{\sin\theta} = \frac{y}{\sin(120° - \theta)} = \frac{1}{\sin 60°}$ $\left(\theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]\right)$，于是　$x^2 - y^2 = \frac{4}{3}\left[\sin^2\theta - \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)\right]$ $= \frac{2}{3}\left[1 - \cos 2\theta - 1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\theta\right)\right] = \frac{4}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\sin\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$，$\theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$，故 $2\theta - \frac{2\pi}{3}$

$\in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$，$u\in [-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]$，选 B.

解法二 把已知式写为 $(x-\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2=1$，故可令 $\begin{cases} x-\frac{y}{2}=\cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta. \end{cases}$ 从而 $x=\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$，于是 $u=(\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta)^2-\frac{4}{3}\sin^2\theta=\cos2\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin2\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(2\theta+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}})\in\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$，选 B.

解法三 此外，本题是选择题，选择支的左端各不相同，当 $x=0$，$y=1$ 时，$u=-1$，淘汰掉 C、D 两项，令

$$\begin{cases} x^2-y^2=-\frac{2}{\sqrt{3}} & ① \\ x^2-xy+y^2=1 & ② \end{cases}$$

①$\times\frac{\sqrt{3}}{2}$+②，可得，

$\frac{\sqrt{3}+2}{2}x^2-xy+\frac{2-\sqrt{3}}{2}$. $y^2=0$，$\frac{x}{y}=2-\sqrt{3}$. 代入①，知 $y^2=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$，从而 $x^2=\frac{2-\sqrt{3}}{3}$，说明 $u=-\frac{2}{\sqrt{3}}$可实现，淘汰 A，故选 B.

解法四 当 $u\geqslant0$ 时，因 $u=x^2-y^2$，故可设 $x=\sqrt{u}\sec\theta$，$y=\sqrt{u}\operatorname{tg}\theta$，代入已知，$u(\sec^2\theta+\operatorname{tg}^2\theta-\sec\theta\cdot\operatorname{tg}\theta)=1$，化为弦，$(u+1)\sin^2\theta-u\sin\theta+u-1=0$，关于 t 的二次方程 $(u+1)t^2-ut+u-1=0$ 在 $(-1, 1)$ 有解.

$\because f(1)=u\geqslant0$，$f(-1)=3u\geqslant0$，故只须 $\begin{cases} \triangle=u^2-4(u^2-1)\geqslant0 \\ -1\leqslant\frac{u}{2(u+1)}\leqslant1 \end{cases}$ 又 $u\geqslant0$，故 $u\in[0, \frac{2}{\sqrt{3}}]$. 类似的，当 $u<0$ 时，可得 $u\in[-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0)$，故 $u\in[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]$，选 B.

【解题回顾】 本题给出了四种不同的解法，解法一是注重了 $x^2+y^2-xy=1$ 的式子特征与余弦定理相似，于是构造三角形，利用正弦定理，等价转化为三角函数的最值问题；解法二是利用配方法，将 x^2-xy+y^2 配成两个完全平方式，由此联想到正、余弦的平方和是1，这种巧妙引入三角函数的方法，在今后的解题中值得注意总结；解法三，利用解选择题的方法，运用特殊与一般的思维方法进行求

解；解法四，对要求的式子 $u=x^2-y^2$ 进行联想与双曲线方程相同，于是利用双曲线方程的参数方程形式进行求解．比较而言，方法二较为简便而符合实际情况，可视为通法．

【例 7】 已知 $4^x+4^y=2^{x+1}+2^{y+1}$，试求 $p=2^x+2^y$ 的取值范围．

【思路分析】 本题是条件最值问题，可以通过变换与换元转化为各种形式的问题求解．无论哪种思路和方法，都有丰富的内涵，必须依据题目的隐含条件，适时给予限制，否则就会得出错误结论．若配方转化为解析几何中有关最值问题，消元则转化为关于 2^y 或 2^x 的一元二次方程解的讨论问题，也可以利用基本不等式，数形结合等方法求解．

【解】

解法一 由已知 $(2^x-1)^2+(2^y-1)^2=2$，令

$$\begin{cases}2^x-1=\sqrt{2}\cos\theta\\2^y-1=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$$

于是 $p=2+\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)=2+2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\in[0,4]$．这个答案显然是错的，因 2^x、2^y 均正，和不可能为 0，错在何处？$\sqrt{2}\cos\theta>-1$ 且 $\sqrt{2}\sin\theta>-1$，故应限制 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)$，从而 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\in(0,1]$，$p\in(2,4]$．

解法二 以 $2^x=p-2^y>0$ 代入已知，可得 $2\cdot2^{2y}-2p\cdot2^y+p^2-2p=0$，故方程 $2t^2-2pt+p^2-2p=0$ 应有正根．若为两正根，则

$$\begin{cases}\triangle=4p^2-8(p^2-2p)\geqslant0\\p^2-2p>0\\p>0\end{cases}$$

解得 $p\in(2,4]$；若为一正根一零根．

$$\begin{cases}p^2-2p=0\\p>0\end{cases}$$

解得 $p=2$；若为一正根一负根，$p^2-2p<0$，$p\in(0,2)$．综上，$p\in(0,4]$，当然，现在我们知道，它错了．错误是怎样造成的？在于隐含条件 $2^y=p-2^x<p$ 没有用上，也就是说，我们上面关于 t 的二次方程不仅要有正根，而且应当是小于 p 的正根，上述第一种情况中，两正根之和为 p，当然都小于 p，第二种情况中，正根为 $2=p$，不合，第三种情况中，两根之和为 p，因有一负根，正根必大于 p，不合，故 $p\in(2,4]$．

解法三 由已知 $(2^x-1)^2+(2^y-1)^2=2$，故

$p=(2^x-1)+(2^y-1)+2\in[-\sqrt{2[(2^x-1)^2+(2^y-1)^2]}+2,$

$\sqrt{2[(2^x-1)^2+(2^y-1)^2]+2}=[0,4]$

当然又错了．要 $p\leqslant\sqrt{2[(2^x-1)^2+(2^y-1)^2]+2}$，须 $2^x-1=2^y-1>0$ 即 $2^x=2^y>1$，代入已知 $x=y=1$，可以办到，但要 $p\geqslant-\sqrt{2[(2^x-1)^2+(2^y-1)^2]+2}$，须 $2^x-1=2^y-1<0$，却办不到．事实上，若 2^x-1 与 2^y-1 均非正，就只能在 $(-1,0]$ 中，$(2^x-1)^2+(2y-1)^2<2$，与已知不符．故 2^x-1 与 2^y-1 除均正外，只可能一个非负，一个非正，不妨设 $2^x\geqslant1\geqslant2^y$，则 $2^y-1\in(-1,0]$，$2^x-1\in[1,\sqrt{2}]$，故

$$(2^y-1)+(2^y-1)\in(0,\sqrt{2}]$$

从而 $2^x+2^y\in(2,2+\sqrt{2}]$．故 $p\in(2,4]$．

解法四 由已知，$(2^x+2^y)^2-2(2^x+2^y)=2\cdot2^x\cdot2^y\leqslant\frac{1}{2}(2^x+2^y)^2$，故

$$p^2-2p\leqslant\frac{p^2}{2},p\in[0,4]$$

另一方面 $(2^x+2^y)^2-2(2^x+2^y)=2^{x+y+1}>0$，故 $p>2$ 或 $p<0$．综而言之，$p\in(2,4]$．

解法五 由已知，$(2^x-1)^2+(2^y-1)^2=2$，令 $u=2^x$，$v=2^y$ $(u,v>0)$，则 (u,v) 之轨迹为以 $(1,1)$ 为圆心，$\sqrt{2}$为半径的圆在第一象限的圆弧．函数 $u+v=p$ 与之有交点，在 v 轴上截距$p\in(2,4]$，如图 1-1-5 所示．

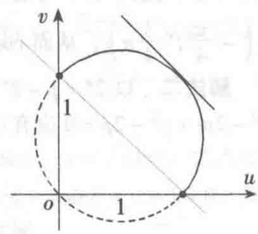


图 1-1-5

解法六 在解法四中，(u,v) 在所示圆弧上，又 $p=u+v\xlongequal{由已知}\frac{1}{2}(u^2+v^2)$，即 p 的取值范围是圆弧上点到原点距离平方的一半．故 $p\in\left(\frac{1}{2}\times2^2,\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2\right]=(2,4]$．

【解题回顾】 (1) 从本题的诸多解法中，我们可以看出，对相关各部分知识产生联想是多么重要．联想是打开我们解题思路的金钥匙，于是我们在平时的学习、解题过程中，要善于观察已知式子的结构特征、要求的式子的结构特征，从中得出相关的信息，从而也就寻找出解题的突破口．

(2) 从六种解法中，我们可以看出解法一和解法五是常见的解法，是通性通法．

(3) 本题的解法中体现了数形结合、等价转化等数学思想及配方法、换元法等数学方法．