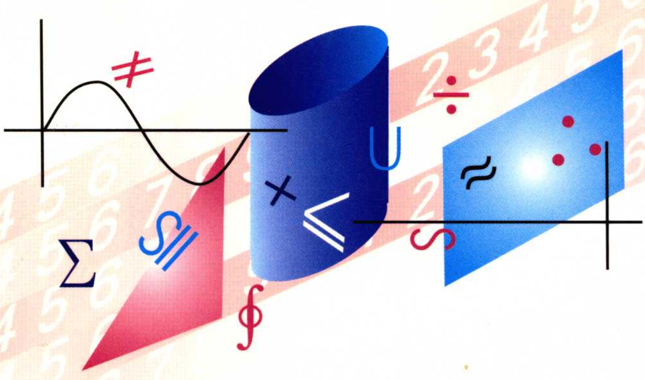
化工技工学校教材

数学

太原化工技工学校　王红平　编



化学工业出版社

化工技工学校教材

数学

太原化工技工学校　王红平　编

化学工业出版社

·北　京·

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

数学/王红平编．—北京：化学工业出版社，1998.11 化工技工学校教材
ISBN 7-5025-2338-3

Ⅰ．数…　Ⅱ．王…　Ⅲ．数学-化工技工学校-教材　Ⅳ．01

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 26737 号

化工技工学校教材
数　　学
太原化工技工学校　王红平　编
责任编辑：张建茹
责任校对：蒋　宇
封面设计：蒋艳君
*
化学工业出版社出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）
新华书店北京发行所经销
北京市密云云浩印制厂印刷
北京市密云云浩印制厂装订
*
开本 850×1168 毫米 1/32　印张 12　字数 330 千字
1999 年 2 月第 1 版　　1999 年 2 月北京第 1 次印刷
印　数：1—5000
ISBN 7-5025-2338-3/G・642
定价：16.00 元

目　录

第一章 立体几何

在平面几何中，研究了平面上的点、线及其图形。本章将研究空间中的点、线、面及一些常用的空间几何体(柱、锥、台、球)。

第一节 平 面

一、平面的概念

和平面几何一样，常见的桌面、黑板面、平静的水面都是平面的直观形象。立体几何研究的平面是无限延展的。

空间中的平面，通常用平行四边形来表示。如图 1-1(a)表示水平位置的平面；图 1-1(b)表示竖直位置的平面；图 1-1(c)表示斜立位置的平面。

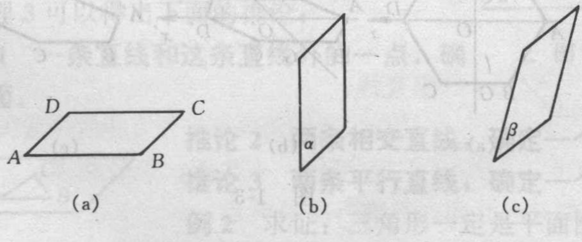


图 1-1

画水平位置的平面时，通常将平行四边形的锐角画成 45°，长、短边长之比为 2∶1。

通常用字母 α、β、γ、……或平行四边形顶点的字母表示平面。如图 1-1(a)中的平面 $ABCD$；图 1-1(b)中的平面 α。

画相交平面时，要画出交线，平面被遮住部分的线段画成虚线或不画。如图 1-2(a)、(b)所示。

平面图形在空间中水平位置直观图的画法，采用“斜二测画法”。

例 1 画水平位置的正六边形的直观图。

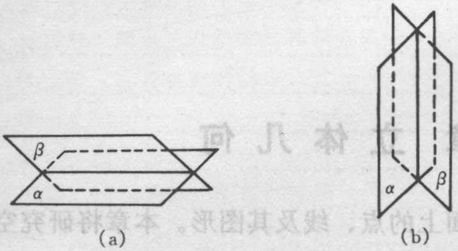


图 1-2

画法：(1) 在已知正六边形 $ABCDEF$ 中，取对角线 AD 所在直线为 x 轴，取对称轴 GH 为 y 轴，如图 1-3(a)。

(2) 画对应的 x' 轴、y' 轴，使$\angle x'O'y'=45°$，以点 O' 为中点，在 x' 轴上截取 $A'D'=AD$；在 y' 轴上截取 $G'H'=\dfrac{1}{2}GH$。分别以点 H'、点 G' 为中点画 $F'E'\,/\!/\,x'$ 轴，$B'C'\,/\!/\,x'$ 轴，并使 $F'E'=FE$、$B'C'=BC$，如图 1-3(b)。

(3) 连结 $A'B'$、$C'D'$、$D'E'$、$F'A'$，所得六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 就是正六边形 $ABCDEF$ 的水平位置直观图，如图 1-3(c)。

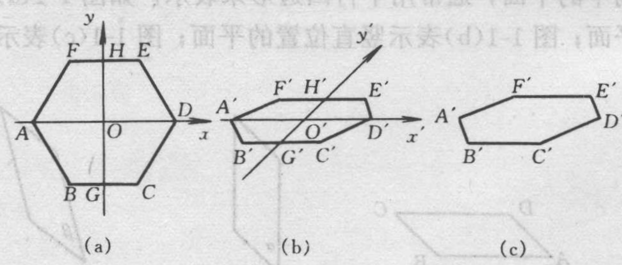


图 1-3

斜二测画法的规则是：

(1) 在已知图形中选取互相垂直的 x 轴和 y 轴。

(2) 画对应的 x' 轴和 y' 轴，使$\angle x'O'y'=45°$(或 135°)。它们确定的平面就是直观图所在的水平平面。

(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中画成平行于 x' 轴且与原长度相等的线段；已知图形中平行于 y 轴的线段，在直观图中画成平行于 y' 轴且长度为原长度一半的线段。

二、平面的基本性质

在生产和生活实践中，人们通过长期的观察和摸索，总结出平面

的一些性质。我们将这些性质作为立体几何的推理基础，称之为公理。

公理 1　如果一条直线上有两个点在一个平面内，那么这条直线上所有的点(即整条直线)**都在这个平面内**(图 1-4)。

如：要将一根木条固定在墙上，只需要钉上两枚钉子；木工师傅用角尺的一条直角边在刨过的木板面上来回移动，观察板面与直角边是否密合来确定板面是否平整等等，都是公理 1 的实际应用。

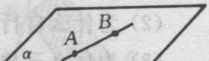


图　1-4

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么这两个平面相交于通过这个公共点的一条直线(图 1-5)。

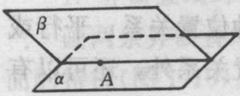


图　1-5

如：教室内相邻的墙面，在墙角处交于一个点，它们就交于过这个点的一条直线。

公理 3　经过不在同一条直线上的任意三点，能确定且只能确定一个平面(图 1-6)。

如：照像机和测量水平仪使用三角架就是公理 3 的应用。

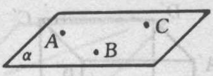


图　1-6

由公理 3 可以得出下面的推论：

推论 1　一条直线和这条直线外的一点，确定一个平面。

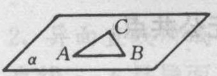


图　1-7

推论 2　两条相交直线，确定一个平面。

推论 3　两条平行直线，确定一个平面。

例 2　求证：三角形一定是平面图形。

证明　如图 1-7

∵　三个点 A、B、C 不在同一条直线上，由公理 3，A、B、C 三个点确定一个平面 α

又由公理 1，边 AB、BC、CA 都在平面 α 内

∴　$\triangle ABC$ 在平面 α 内

即　$\triangle ABC$ 是平面图形。

练　习

1. 作图

(1) 画两个相交平面；

(2) 画交于同一条直线的三个平面。

2. 回答

(1) 木工在把圆木锯成板时，为什么要先在圆木的两侧弹出两条平行线？

(2) 为什么自行车后轮旁只安装一只脚撑？

(3) 为什么三角形具有稳定性？

(4) 经过同一条直线的平面有多少个？

第二节　空间两条直线的位置关系

一、位置关系

在同一个平面内，两条不重合的直线只有两种位置关系：平行或相交。但在空间两条不重合的直线除上述两种位置关系外，还可以有既不平行也不相交的情形。

如图 1-8 所示，正方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 中棱 AB 与 CC' 所在直线的位置关系既不平行也不相交。显然这两条直线不共面。

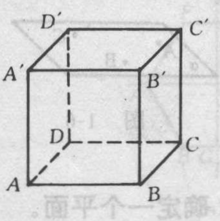


图　1-8

我们称不同在任何一个平面内的两条直线为**异面直线**。

因此，空间两条不重合直线的位置关系有三种：

(1) **平行——共面，无公共点；**

(2) **相交——共面，只有一个公共点；**

(3) **异面——不同在任何一个平面内，无公共点。**

本章所讨论的两条直线或两个平面均指不重合的直线或平面。

二、平行公理

平面内三条直线的平行公理对于空间三条直线也适用。

公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行。

例 1　证明四个顶点不共面的四边形(称作空间四边形)各边中点共面。

已知　如图 1-9。空间四边形 $ABCD$ 各边中点分别为 E、F、G、H。

求证　点 E、F、G、H 共面

证明　连结 BD、EH、FG

∵　EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线

∴　$EH \parallel BD$

同理　$FG \parallel BD$

∴　$EH \parallel FG$，EH 与 FG 确定平面 $EFGH$

所以，点 E、H、F、G 都在平面 $EFGH$ 内

即　点 E、F、G、H 共面。

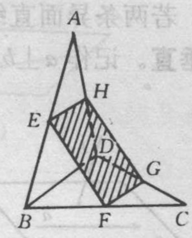


图　1-9

三、异面直线

1. 异面直线的画法

画两条异面直线时，要以辅助平面作衬托，以显示两条直线不共面的特征(图 1-10)。

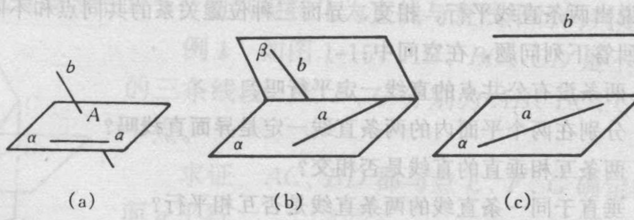


图　1-10

2. 异面直线所成的角

直线 a、b 是异面直线，经过空间任意一点 O，分别引直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$。直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫**异面直线 a 和 b 所成的角**(图 1-11)。

为了简便，点 O 常取在两条异面直线中的一条上。如图 1-12，异面直线 a 和 b，过 b 上点 O 作直线 $a' \parallel a$，a' 和 b 所成锐角 θ 就是异面直线 a 和 b 所成的角。

例 2　在图 1-8 所示的正方体中，判断棱 AB 与 $B'C'$ 所在直线的位置关系，并求它们所成的角。

解　AB 与 $B'C'$ 是异面直线。

∵　$BC \parallel B'C'$ 且点 B 在 AB 上，AB 和 BC 成 $90°$ 角

∴ AB 和 $B'C'$ 所成的角是 90°

若两条异面直线 a 和 b 所成的角为直角，则称这**两条异面直线互相垂直**。记作 $a\perp b$。

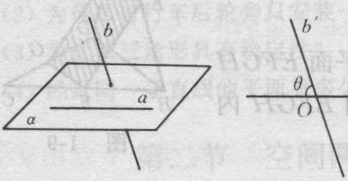


图 1-11

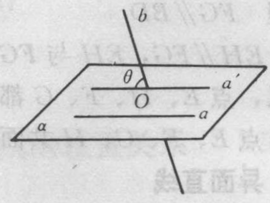


图 1-12

练 习

1. 说出两条直线平行、相交、异面三种位置关系的共同点和不同点。

2. 回答下列问题，在空间中：

(1) 两条没有公共点的直线一定平行吗？

(2) 分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线吗？

(3) 两条互相垂直的直线是否相交？

(4) 垂直于同一条直线的两条直线是否互相平行？

3. 分别在两个相交平面内各画一条直线，使它们

(1) 平行；(2) 相交；(3) 异面。

第三节 空间直线和平面的位置关系

一、位置关系

空间一条直线与一个平面的位置关系，依公共点的个数区分，有三种：

(1) **平行——直线与平面无公共点；**

(2) **相交——直线与平面只有一个公共点；**

(3) **直线在平面内——直线与平面有无数个公共点。**

如图 1-13 所示。

直线和平面平行或相交都称作**直线在平面外**。

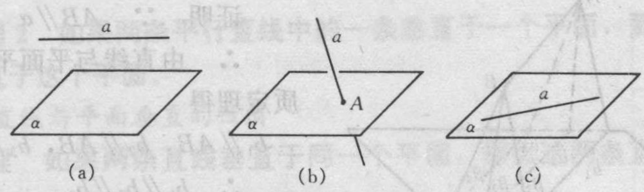


图 1-13

二、直线与平面平行

直线 l 与平面 α 平行，记作 $l /\!/ \alpha$。

1. 直线与平面平行的判定

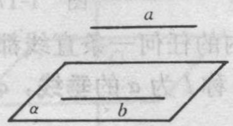


图 1-14

定理　如果平面外一条直线和这个平面内一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行（图 1-14）。

该定理把直线与平面平行的判定转化为直线与直线平行的判定。

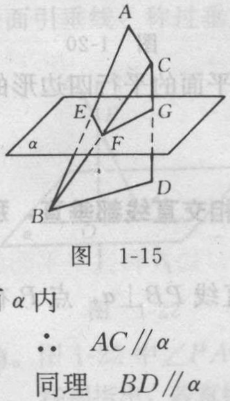


图 1-15

例 1　如图 1-15，AB、BC、CD 是不共面的三条线段，E、F、G 分别为 AB、BC、CD 的中点。

求证　AC、BD 都与点 E、F、G 确定的平面 α 平行。

证明　连结 EF、FG

∵　在$\triangle ABC$ 中，$EF /\!/ AC$，而 EF 在平面 α 内

∴　$AC /\!/ \alpha$

同理　$BD /\!/ \alpha$

2. 直线与平面平行的性质

定理　如果一条直线 l 和一个平面 α 平行，并且过直线 l 的平面 β 和平面 α 相交，那么 l 与 α 和 β 的交线 b 平行（图 1-16）。

例 2　如图 1-17，直线 $AB /\!/$ 平面 α，经过 AB 的平面 β_1、β_2、β_3 分别与 α 交于直线 b_1、b_2、b_3。

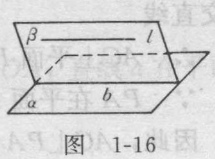


图 1-16

求证　$b_1 /\!/ b_2 /\!/ b_3$

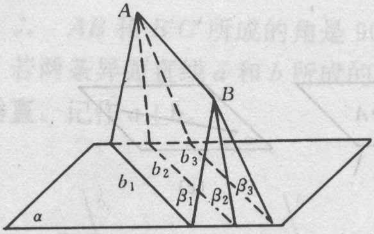


图 1-17

证明 $\because$ $AB /\!/ \alpha$

$\therefore$ 由直线与平面平行的性质定理得

$b_1 /\!/ AB$，$b_2 /\!/ AB$，$b_3 /\!/ AB$

$\therefore$ $b_1 /\!/ b_2 /\!/ b_3$

三、直线和平面垂直

如果一条直线 l 和一个平面 α 内的任何一条直线都垂直，则称**直线 l 和平面 α 互相垂直**。记作 $l \perp \alpha$。称 l 为 α 的**垂线**，α 为 l 的**垂面**，l 与 α 的交点 O 为**垂足**(图 1-18)。

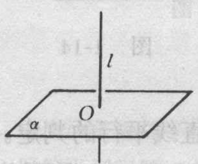


图 1-18

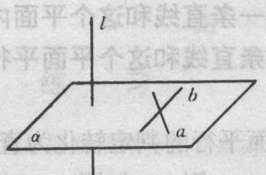


图 1-19

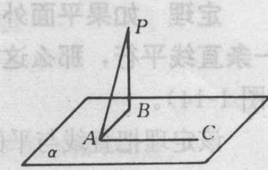


图 1-20

画直线与平面垂直时，一般要将直线与表示平面的平行四边形的长边画成垂直(图 1-18)。

1. 直线与平面垂直的判定

定理 1 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面(图 1-19)。

例 3 如图 1-20，平面 α 内 $\angle BAC=90°$，直线 $PB \perp \alpha$，点 P 在 α 外。

求证 $AC \perp PA$

证明 $\because$ $PB \perp \alpha$，AC 在 α 内

$\therefore$ $PB \perp AC$

$\because$ $\angle BAC=90°$ 即 $AC \perp AB$，而 AB 与 PB 是平面 PAB 内两条相交直线

$\therefore$ $AC \perp$ 平面 PAB

$\because$ PA 在平面 PAB 内

因此，$AC \perp PA$

定理 2　如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面。

2. 直线与平面垂直的性质

定理　如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线互相平行。

若直线 l 和平面 α 平行，过 l 上任一点 P 向平面 α 引垂线，点 P 与垂足 O 间的垂线段 PO 的长叫**直线 l 与平面 α 的距离**，也叫**点 P 到平面 α 的距离**，如图 1-21。

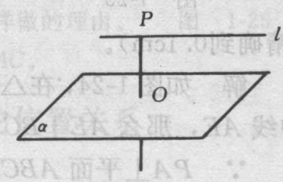


图　1-21

四、三垂线定理

1. 射影

一条直线与一个平面相交，但不垂直，称这条直线为这个平面的一条**斜线**。称斜线与平面的交点为**斜足**。从斜线上异于斜足的一点向平面引垂线，称过垂足与斜足的直线为**斜线在这个平面上的射影**。

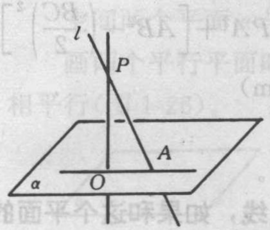


图　1-22

如图 1-22，直线 l 是平面 α 的斜线，点 A 是斜足。直线 $PO\perp\alpha$，点 O 是垂足。直线 AO 是 l 在 α 上的射影。也称点 O 是点 P 在 α 上的射影。

2. 直线与平面所成的角

平面的一条斜线和它在平面内的射影所成的锐角，叫做**这条斜线和这个平面所成的角**。图 1-22 中 $\angle PAO$ 就是斜线 l 与平面 α 所成的角。

特别指出，若直线与平面垂直，就说直线与平面**所成的角是直角**；若直线与平面平行或直线在平面内，就说直线与平面**所成的角是 0°的角**。

3. 三垂线定理

三垂线定理　在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。

如图 1-23，斜线 l 在平面 α 上的射影是直线 OA，直线 a 在平面 α 内。

若 $OA\perp a$，∵ $PO\perp\alpha$

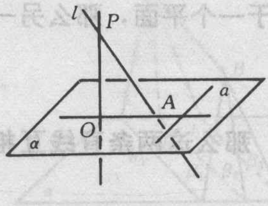


图 1-23

$\therefore$ $PO \perp a$

从而 $a\perp$ 平面 PAO

$\therefore$ $a \perp PA$ 即 $a\perp l$

例 4 已知等腰三角形 ABC 中，腰 $AB=5\text{cm}$，底边 $BC=6\text{cm}$，直线 $PA\perp$ 平面 ABC，且 $PA=8\text{cm}$。求点 P 到 BC 边的距离(精确到0.1cm)。

解 如图 1-24，在$\triangle ABC$ 中作 BC 边上的中线 AE，那么 $AE\perp BC$

$\because$ $PA\perp$ 平面 ABC

$\therefore$ PE 是平面 ABC 的斜线，AE 是 PE 在平面 ABC 上的射影

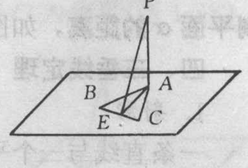


图 1-24

由三垂线定理得：$PE\perp BC$，即 PE 是点 P 到 BC 边的距离

在 $Rt\triangle PAE$ 中，$PE=\sqrt{PA^2+AE^2}=\sqrt{PA^2+\left[AB^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2\right]}$

$$=\sqrt{64+16}\approx 8.9(\text{cm})$$

答：点 P 到 BC 边的距离约为 8.9cm。

可以证明三垂线定理的逆定理也是成立的。

三垂线定理的逆定理 在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直。

练 习

1. 回答

(1) 若一条直线与一个平面有两个公共点，这条直线和这个平面是什么位置关系?

(2) 一条直线和一个平面平行，它和这个平面内的所有直线都平行吗?

(3) 平行于同一个平面的两条直线是否一定平行?

(4) 如果两条平行直线中的一条平行于一个平面，另一条是否也一定平行于这个平面?

(5) 已知一条直线垂直于一个平面内的两条直线，这条直线是否一定垂直于

这个平面？

(6) 已知一条直线垂直于一个平面内的无数条直线，这条直线是否一定垂直于这个平面？

2. 证明正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中

(1) $A'B' \parallel$ 平面 $ABCD$；(2) $BB' \perp$ 平面 $ABCD$

3. 如图 1-25，测量人员在检测灯杆 PO 是否与地面垂直时，需要站在两个方向 AO、BO 上测量。试述这样做的理由。

图 1-25

4. 证明正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$BD' \perp AC$。

第四节　空间两个平面的位置关系

一、位置关系

空间不重合的两个平面，有两种位置关系：

(1) **平行——无公共点**；

(2) **相交——有一条公共直线(即交线)**。

二、平面与平面平行

空间两个平面 α 与 β 平行，记作 $\alpha \parallel \beta$。

画两个平行平面时，应使表示平面的两个平行四边形的对应边互相平行(图 1-26)。

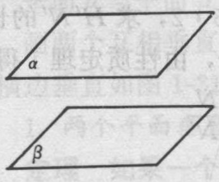


图 1-26

1. 两个平面平行的判定

定理 1　如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行。

该定理把两个平面平行的判定，转化为直线与平面平行的判定。

例 1　已知 AB、CD、EF 是夹在平面 α 与平面 β 间不共面的三条线段，且 $AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD \mathrel{\underline{\parallel}} EF$。

求证　$\alpha \parallel \beta$

证明　如图 1-27，连结 AC、CE、BD、DF

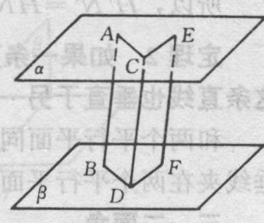


图 1-27

$\because$　$AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD$