高等学校教材

微积分与数学模型

第三版 下册

主 编 贾晓峰

副主编 孙洪波 贾云涛

高等教育出版社

高等学校教材

微积分与数学模型

Weijifen yu Shuxue Moxing

第三版

下册

主　编　贾晓峰
副主编　孙洪波　贾云涛
编　委　何崇南
周海立
郑亚琴

高等教育出版社·北京

内容提要

本书第一版荣获2002年全国普通高等学校优秀教材二等奖。本次修订对多处内容进行了较大改动，其中首先以突出逼近思想为目标改造多处微积分内容表述方式，把逼近作为微积分应用的基础加以强调，并辅以相关训练，进一步强化数学建模的内容。

全书分为上、下两册。下册内容包括空间解析几何与向量代数、微分方程、多元函数微分法及其应用、各种类型的积分及其应用（二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分）、第二类曲线与曲面积分。书后附有科学论文初步知识、参考书目、第三版编后记。

本书可作为高等学校非数学类专业高等数学课程的教材，也可供相关专业师生阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

微积分与数学模型. 下册 / 贾晓峰主编. --3 版. --北京:高等教育出版社,2016.2
ISBN 978-7-04-044558-9

Ⅰ.①微… Ⅱ.①贾… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材②数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.①O172②O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 311898 号

策划编辑 张长虹 责任编辑 贾翠萍 封面设计 姜 磊 版式设计 马敬茹
插图绘制 杜晓丹 责任校对 刘丽娴 责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	24	版　次	1999 年 10 月第 1 版
字　数	430 千字		2016 年 2 月第 3 版
购书热线	010-58581118	印　次	2016 年 2 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	37.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 44558-00

目　　录

第八章　空间解析几何与向量代数

通过对一元函数微积分的学习,我们知道平面解析几何使一元函数有了直观的几何意义.为了学习多元函数微积分,本章介绍空间解析几何的知识.

本章首先建立三维空间中的直角坐标系,引进在科学技术与工程领域中有广泛应用的向量概念,介绍向量的一些基本运算.然后利用向量工具讨论空间的平面和直线,最后介绍空间曲面、空间曲线和二次曲面.

第一节　空间直角坐标系

一、空间点的坐标

要用代数方法研究三维空间中的图形,首先要建立空间中点与有序数组之间的联系.可以依照平面解析几何中的方法,通过建立空间直角坐标系,实现空间中点与有序实数组之间的一一对应.

在空间中,任取一点 O,并规定一单位长度,作以 O 为原点,且两两互相垂直的三条数轴.这三条数轴分别叫做 x **轴**(横轴),y **轴**(纵轴),z **轴**(竖轴),统称**坐标轴**.所形成的 x 轴、y 轴、z 轴正向之间的相互关系符合右手法则,即用右手握住 z 轴,拇指所指方向为 z 轴正向,其余四指转动 $\frac{\pi}{2}$ 角度即为由 x 轴正向到 y 轴正向的转动方向(图 8.1),这样三条坐标轴,按上述规定就形成了一个空间直角(右手)坐标系.点 O 叫做**坐标原点**,三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为**坐标平面**,由 x 轴与 y 轴确定的坐标平面称为 Oxy **面**;由 x 轴与 z 轴确定的坐标平面称为 Ozx **面**;由 y 轴与 z 轴确定的坐标平面称为 Oyz **面**,三个坐标平面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个**卦限**.以 Oxy 平面把空间分为两部分,在含有 z 轴正半轴的半空间(称为上半空间)

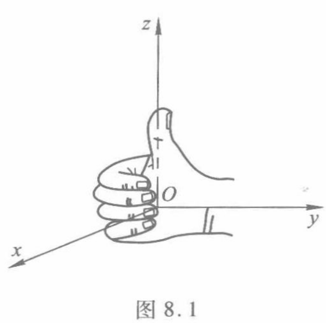


图 8.1

中位于 Oxy 平面第一、二、三、四象限上侧的各空间部分依次称为第一、二、三、四卦限;在含有 z 轴负半轴的半空间(称为下半空间)中,与一、二、三、四卦限关于 Oxy 面相对称的空间部分依次称为第五、六、七、八卦限,这八个卦限用罗马数字Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(图 8.2).

在空间中取定直角坐标系后,按下述方法就可建立空间中点与有序数组之间的一一对应关系.

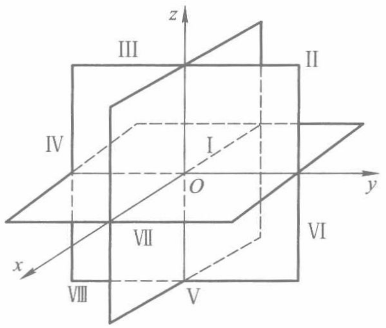


图 8.2

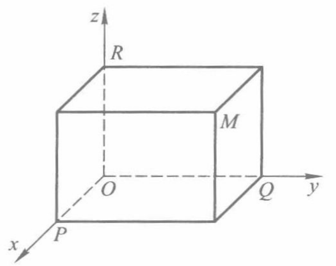


图 8.3

设 M 为空间一已知点,过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面,这三个平面分别与 x 轴、y 轴、z 轴交于点 P、Q、R(图 8.3),这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的交点依次为 x、y、z. 于是空间任意一点 M 就唯一地确定了三元有序数组 x、y、z.

反之,若已知一有序数组 x、y、z,在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取坐标为 z 的点 R,过点 P,Q,R 分别做垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面,这三个两两相互垂直的平面交于空间一点 M,则该有序数组就唯一地确定了空间一点. 这样,就建立了空间点与三元有序数组之间的一一对应关系. 其中三元有序实数组 x、y、z 叫做**点 M 的坐标**,并依次称 x、y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为 x、y、z 的点 M 记为$M(x,y,z)$. 记建立了空间直角坐标系的三维空间为 $\mathbf{R}^3$.

坐标轴上点的坐标至少有两个坐标等于 0;坐标平面上点的坐标至少有一个等于 0. 例如 x 轴上点的坐标 为$(x,0,0)$;Oxy 平面上点的坐标为$(x,y,0)$,原点的坐标为$(0,0,0)$.

一点 $P(x,y,z)$,关于坐标原点 O 的对称点为 $P_1(-x,-y,-z)$;关于 Oxy 平面的对称点为 $P_2(x,y,-z)$,关于 x 轴的对称点为 $P_3(x,-y,-z)$,同样可得出关于其余坐标平面和坐标轴的对称点坐标.

二、空间两点间的距离

我们知道,在平面直角坐标系中,任意两点 $M_1(x_1,y_1)$,$M_2(x_2,y_2)$ 之间的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

由平面上两点间的距离公式,易推测空间两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离 d 为

$$d=|P_1P_2|$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (8.1)$$

我们现在来证明公式(8.1):

过 P_1 作三个平面分别垂直于三条坐标轴,且与 x 轴交于点 $A_1(x_1,0,0)$,与 y 轴交于点 $B_1(0,y_1,0)$,与 z 轴交于点 $C_1(0,0,z_1)$. 仿上,经过 P_2 作三个平面分别垂直于三条坐标轴,与 x 轴、y 轴、z 轴依次交于点 $A_2(x_2,0,0)$、$B_2(0,y_2,0)$、$C_2(0,0,z_2)$,如图 8.4 所示. 这六个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体,它的三个边的边长分别是

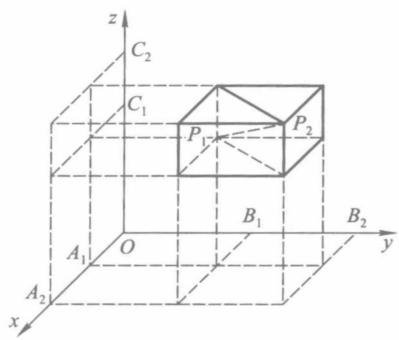


图 8.4

$$|A_1A_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}$$
$$|B_1B_2|=\sqrt{(y_2-y_1)^2}$$
$$|C_1C_2|=\sqrt{(z_2-z_1)^2}$$

两次运用勾股定理,即知

$$|P_1P_2|^2=|A_1A_2|^2+|B_1B_2|^2+|C_1C_2|^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

从而

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别地,点 $P(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例　在 y 轴上找一点 P,使它与点 $P_0(4,2,2)$ 的距离为 $\sqrt{29}$.

解　由于要找的点在 y 轴上,所以设其坐标为 $P(0,y,0)$,由题条件有

$$|P_0P|=\sqrt{29}$$

从而 $\sqrt{4^2+(y-2)^2+2^2}=\sqrt{29}$,即$(y-2)^2=9$,由此解得

$$y_1=-1,\quad y_2=5$$

于是点(0,-1,0)或(0,5,0)即为所求.

习　题　8.1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限:

$A(2,-2,3)$;　$B(3,3,-5)$;　$C(3,-2,-4)$;　$D(-4,-3,2)$.

2. 坐标平面上和坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点的位置:

$A(2,3,0)$;　$B(0,3,2)$　$C(2,0,0)$　$D(0,-2,0)$.

3. 求点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 关于(1)各坐标平面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

4. 过点 $P(a,b,c)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 Oxy 面的平面,问它们上面的点的坐标各有什么特点?

5. 设 P 在 x 轴上,它到点 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍,求点 P 的坐标.

6. 求点 $P(4,-3,5)$ 到原点、各坐标轴和各坐标平面的距离.

7. 证明:顶点为 $A(2,4,3)$,$B(4,1,9)$,$C(10,-1,6)$ 的三角形是直角三角形.

8. 一边长为 a 的立方体放置在 Oyz 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 y 轴和 z 轴上,求立方体各顶点的坐标.

第二节　向量及其加减法·向量与数的乘法

一、向量概念

在力学、物理学以及其他学科中,经常遇到的一些量,如长度、时间、体积、质量、温度和功等,在规定了单位以后,都可以由一个数来完全确定,这种只有大小的量叫做**数量**(标量).另外还有一些比较复杂的量,例如位移、力、速度、力矩和角速度等,它们不仅有大小,而且有方向,这种量叫做**向量**(矢量).

向量有两个特征:大小和方向,因此可用有向线段来表示.有向线段的始点和终点分别叫做向量的始点和终点.有向线段的方向表示向量的方向,有向线段的长度表示向量的大小.向量的大小叫做**向量的模**.以 A 为起点,B 为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$.为简便起见,常用一个黑体字母来表示向量,如$\overrightarrow{AB}$ 可记作 $\boldsymbol{a}$(也记作$\vec{a}$,如图 8.5),向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记做 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$.

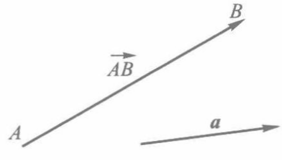


图 8.5

模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于 0 的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$. 零向量的方向可看作任意的. 不是零向量的向量称为**非零向量**. 在直角坐标系中,以原点为始点,另一点 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$,叫做点 M 的**向径**,记为 $\boldsymbol{r}$.

对于向量,解析几何中只考虑其模和方向. 这种不考虑向量的起点,只由模和方向决定的向量,称为**自由向量**(简称为向量). 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 模相等,且方向相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 是**相等的**,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 模相同而方向相反的那个向量,称为 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$,显然有 $-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反时,称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或共线,记作 $\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}$. 显然有 $\mathbf{0}\ /\!/\ \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时 $\boldsymbol{a}\ /\!/\ \boldsymbol{b}$.

二、向量的加减法

在力学中,作用于一个质点的两个力,可以看作是两个向量. 可用平行四边形法则求这两个力的合力. 对于速度、加速度等量的合成也有相同的规律,规定如下:

向量加法:设已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,以任一定点 O 为始点,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 再以 OA, OB 为边作平行四边形 $OACB$,则对角线上的向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

如图 8.6(a)所示,这种用平行四边形的对角线来规定两向量之和的方法叫做**平行四边形法则**.

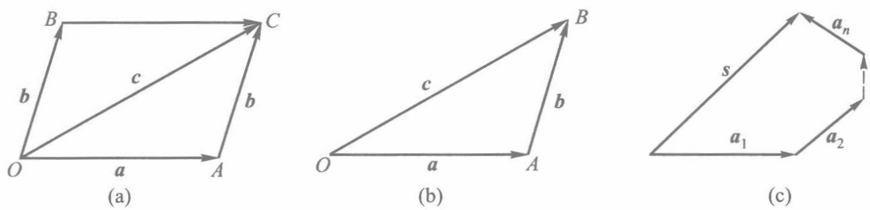
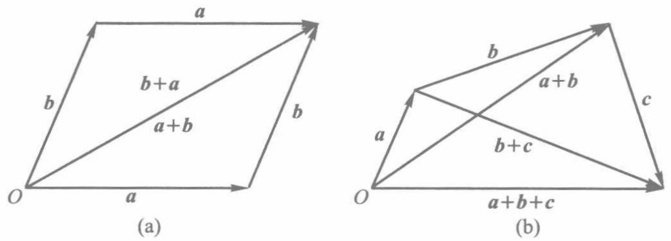


图 8.6

注意图 8.6(a)中 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$,所以向量加法还可以用另一种方法表示:以空间任一点 O 为始点,作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,以 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 为始点,作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之和,如图 8.6(b)所示. 这种确定向量和的方法叫做**三角形法则**. 特别地,当向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 共线时,规定用三角形法则求和. 对于任意向量 $\boldsymbol{a}$ 显然有

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$



(a)　(b)

图 8.7

由向量加法的三角形法则，推广可得任意有限多个向量的求和法则：以空间任一点 O 为始点作向量 $\boldsymbol{a}_1$，以 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点为始点作向量 $\boldsymbol{a}_2$，……，以 $\boldsymbol{a}_{n-1}$ 的终点为始点作向量 $\boldsymbol{a}_n$，最后以 $\boldsymbol{a}_1$ 的始点为始点，$\boldsymbol{a}_n$ 的终点为终点作向量 $\boldsymbol{s}$，则 $\boldsymbol{s}$ 为向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和，记作 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，如图 8.6(c).

向量加法有下列运算规律：

(1) **交换律**：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，

(2) **结合律**：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

按向量加法的三角形法则，由图 8.7(a)和图 8.7(b)可对上述运算规律进行验证.

向量减法：规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的差为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

由向量和的三角形法则易作出其图形(图 8.8).

例 1　用向量方法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证　设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于点 O 且互相平分(图 8.9)，即 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$，由三角形法则：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\\&=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

因此 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，且 $\overrightarrow{AB}\ /\!/\ \overrightarrow{DC}$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

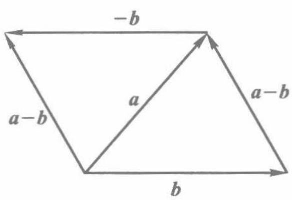


图 8.8

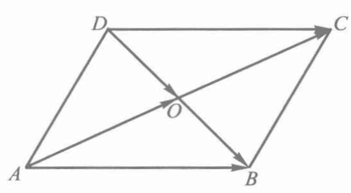


图 8.9

三、数与向量的乘积

定义 8.1　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量,它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$$

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向为:当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.

显然,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\lambda=0$.

特别地,

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

图 8.10

定义 8.1 是建立数轴的理论依据. 我们知道,确定一条数轴,需要给定一个点、一个方向及单位长度. 由于一个单位向量既确定了方向,又确定了单位长度,因此,给定一个点及一个单位向量就可以确定一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox(图 8.10),对于轴上任一点 P,对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$,由于 $\overrightarrow{OP}\parallel\boldsymbol{i}$,所以存在唯一的实数 x,使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$(实数 x 叫做轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值). 这样,向量 $\overrightarrow{OP}$ 就与实数 x 一一对应了,从而

$$\text{点 }P\leftrightarrow\text{ 向量 }\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow\text{ 实数 }x$$

即数轴上的点 P 与实数 x 一一对应. 我们称实数 x 为数轴上点 P 的坐标.

由定义 8.1 知,$\lambda\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量,由此得**向量 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 的充分必要条件是存在实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.** 这是因为,若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,记 $\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=m$,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向时取 $\lambda=m$,则有 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反方向时,取 $\lambda=-m$,亦有 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$. 反之,若 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,则由数与向量乘积定义,$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{b}$ 共线,即 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

数与向量的乘积满足下列运算规律:

(1) **结合律:**　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$,

(2) **分配律:**　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

要证结合律和分配律第一式,只需证明等号两边向量的方向和模相同. 根据数与向量乘积的定义与 λ、μ 的大小、正负分情况即可证明,在此从略. 现证分配律第二式成立:

如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之一是零向量,结论显然成立.

对于 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$、$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$、$\lambda\neq0$,若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,由前文可知存在 m,使得 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$,这样

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\lambda(m\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b})=\lambda(m+1)\boldsymbol{b}=(\lambda m+\lambda)\boldsymbol{b}\\&=\lambda m\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda(m\boldsymbol{b})+\lambda\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

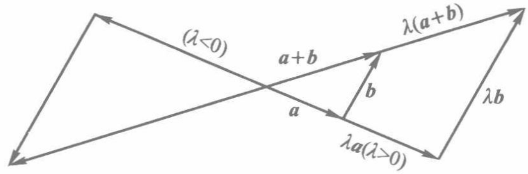


图 8.11

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行(图 8.11)，显然由 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 为边构成的三角形，与以 $\lambda\boldsymbol{a}$、$\lambda\boldsymbol{b}$、$\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 为边构成的三角形相似，从而

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，注意到 $|\boldsymbol{a}|>0$，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，而且

$$\left|\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}=1$$

所以 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记为

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\tag{8.2}$$

即非零向量的单位向量，等于该向量与其模的倒数相乘（或者任一向量总等于它的模与它的单位向量的乘积，即 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$）.

例 2　用向量方法证明：连接三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证　$\triangle ABC$ 如图 8.12 所示，AB、AC 的中点分别为 M、N，则有

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

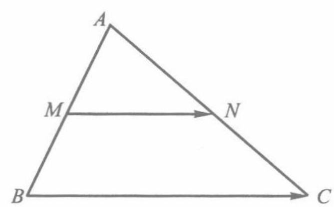


图 8.12

所以 $\overrightarrow{MN}\ /\!/\ \overrightarrow{BC}$，且 $|\overrightarrow{MN}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$.

习　题　8.2

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$. 用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示四个边的向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

2. 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，证明 $\overrightarrow{AB}\ /\!/\ \overrightarrow{BD}$，即 A、B、C 三点共线.

3. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

4. 试证明向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件为存在不同时为零的实数 k_1,k_2，使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

5. 设 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，问实数 α,β 满足什么样的条件才能使 A、B、C 三点共线.（我们假定 A、B 是不同的点，并且 O 点不在 AB 所在直线上.）

第三节　向量的坐标

向量的加法，数与向量的乘法运算虽然可以像多项式加法和数乘多项式那样去演算，但仍需通过几何图形来表示，这对于向量的进一步研究和应用并不方便. 为此我们在空间直角坐标系中引进向量的坐标，把向量用有序数组表示，从而将向量的运算转化为代数的运算.

我们注意到，当 $\boldsymbol{a}$ 为一单位向量时，所有与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量 $\boldsymbol{b}$，都可以唯一地表示成 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 此时这些向量之间的加法，数与向量的乘法运算可以转化为仅对数 λ 的代数运算. 由物理学中力的合成与分解，容易想到把任意向量分解成几个固定的向量之和，即用坐标向量来表示任意向量，或再进一步用有序数组来表示向量的方法. 为此，在空间直角坐标系中，引入单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，令其方向分别与 x 轴，y 轴，z 轴的正方向相同，并称它们为这一坐标系的**基本单位向量**.

我们首先考虑向径的分解. 设向径 $r=\overrightarrow{OM}$，M 点的坐标为 (x,y,z)，过点 M 分别作垂直于 x 轴，y 轴，z 轴的三个平面，分别与 x 轴，y 轴，z 轴交于 P,Q,R 三点（图 8.13）. 由向量加法的三角形法则，易知：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\end{aligned}$$

称 $\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}$ 分别为向径 $\boldsymbol{r}$ 在 x 轴，y 轴，z 轴上的**分向量**. 又 $\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}$ 分别与基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 共线，易见

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$$

因此

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

这样向径就表示为数与基本单位向量乘积之和的形式了，我们称其为向径 $\boldsymbol{r}$ 的一个基本分解，简记为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}\quad\text{或}\quad \boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$$

显然这种**基本分解**是唯一的. 由向量的运算规则容易得到任意向量的这种基本

分解，说明如下：

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 为任意向量，始点 M_1 的坐标是(x_1,y_1,z_1)，终点 M_2 的坐标为(x_2,y_2,z_2)，如图 8.14 所示，则向径

$$\boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_2=\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

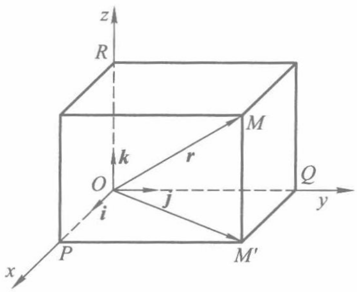


图 8.13

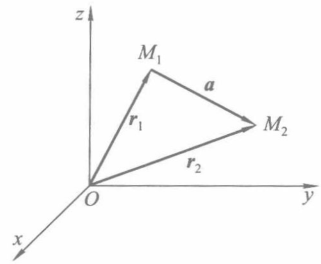


图 8.14

而向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

令 $a_x=x_2-x_1,a_y=y_2-y_1,a_z=z_2-z_1$，则有

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{8.3}$$

当向量 $\boldsymbol{a}$ 分解成上面这种基本单位向量的分解式时，简记为 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，称 $a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$ 分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴，y 轴，z 轴上的**分向量**；a_x,a_y,a_z 分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴，y 轴，z 轴上的坐标，并将$\{a_x,a_y,a_z\}$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 由此可知：始点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 而终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\} \tag{8.4}$$

即**向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标为其终点坐标减去始点坐标**. 特别地，点 $M(x,y,z)$ 的向径为

$$\overrightarrow{OM}=\{x-0,y-0,z-0\}=\{x,y,z\}$$

上式说明向径的坐标与其终点坐标一致. 进一步容易证明，**两向量相等，当且仅当其坐标对应相等**.

又由两点间的距离公式易知向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 的模的坐标表示式为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{8.5}$$

利用向量的坐标和向量的运算规律,可得向量加减法及数与向量的乘法运算如下:

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}$$

亦即

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}\tag{8.6}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}\tag{8.7}$$

由此可见,对向量进行加、减及与数相乘,只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就可以了.

由定义 8.1 知,当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,向量 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$,相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,坐标表示式为

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$$

这也就相当于当向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

例　设有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的始点为 $A(x_1,y_1,z_1,)$,终点为 $B(x_2,y_2,z_2)$,点 $M(x,y,z)$ 在直线 AB 上,并把有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 分成定比 λ ,即

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{MB}\quad(\lambda\neq-1)$$

求点 M 的坐标.

解　$\overrightarrow{AM}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}$,$\overrightarrow{MB}=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$,由已知条件 $\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{MB}$,可得

$$\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}=\lambda\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$$

即

$$x-x_1=\lambda(x_2-x)$$

$$y-y_1=\lambda(y_2-y)$$

$$z-z_1=\lambda(z_2-z)$$

由以上三式分别解出:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$