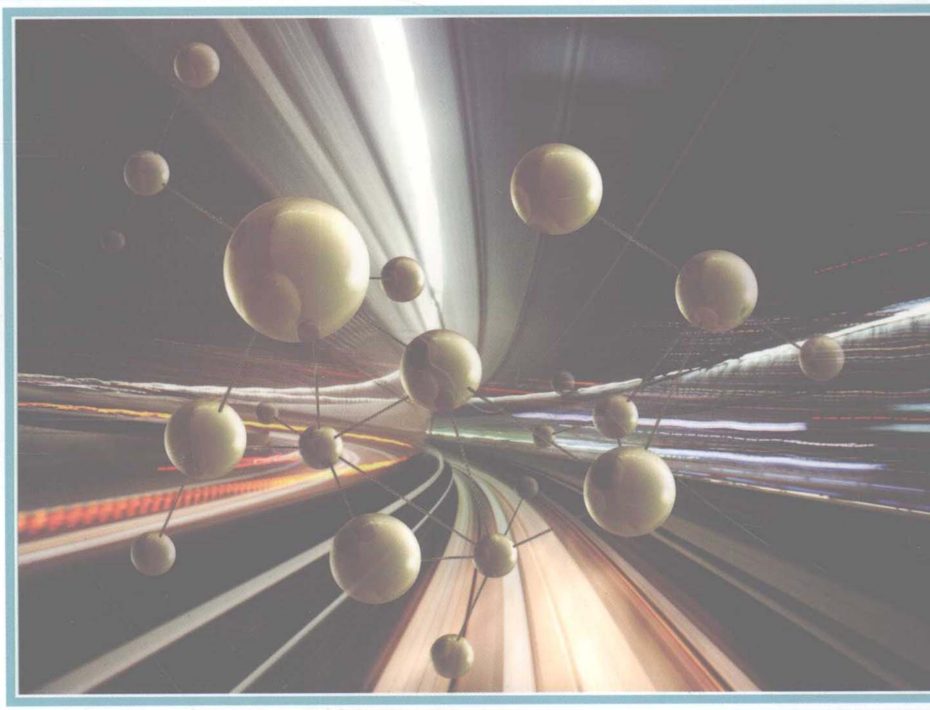
高等教育“十二五”规划教材

Mathematical modeling methods and mathematical models

建模的数学方法与数学模型

赵廷刚 主 编

王素云 魏晋滢 副主编



科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

建模的数学方法与数学模型

赵廷刚　主　编

王素云　魏晋滢　副主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书内容共分九章：第一章是数学模型概论，第二章是初等方法建模，第三章是微分法建模，第四章是差分方法建模，第五章是微分方程定性理论分析建模，第六章是线性规划方法建模，第七章是动态规划方法建模，第八章是层次分析法建模，第九章为图论方法建模。附录中给出了本书大部分图形的MATLAB程序代码，以便更好地对图形验证分析。

本书可作为高等院校本专科生数学建模课程教材、数学建模竞赛培训课程的教材，也可供高校师生和相关科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

建模的数学方法与数学模型/赵廷刚主编. —北京：科学出版社，2011
（高等教育"十二五"规划教材）
ISBN 978-7-03-030840-5

Ⅰ. ①建… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①数学方法—高等职业教育—教材②数学模型—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①01-0②0141.4

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第070646号

策划：姜天鹏 冯 涛
责任编辑：王纯刚 张振华 / 责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011年5月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2011年5月第一次印刷 印张：11 3/4
印数：1—3000 字数：261 000

定价：25.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）
销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62148322

前　　言

著名数学家 G. H. Hardy 曾说过：Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics（美是首要的检验：世界上没有丑数学的永久之所处）. 无疑，数学中蕴含着巨大的美. 如果仅从数学命题的逻辑或者理性思维的角度来体会数学的美，那将会是非常困难的. 因为对数学语言及符号的理解已经是心力耗尽的工作，更何况要细细品味从中体验其美所在. 数学如果不从纯粹的象牙塔中走出来应用到广阔的现实世界，它也许会像甲骨文那样成为历史. 幸运的是，数学已经广泛渗透到社会生活的各个方面，数学技术也已经成为当今科学技术的核心. 数学在现实世界中的广泛应用尽情地彰显了数学的美（狭义的讲，是应用数学的美）. 当然，这种数学向应用的广泛延伸包含着深刻的"泛功利化"思想，它对我国高等数学教育产生了巨大的影响，数学建模课程在高等院校中的广泛开设就是一个例证.

当数学在生产过程、国民经济、生物医学、国防科技等领域的应用取得巨大的成功时，数学建模作为数学向现代技术转化链条上最关键的环节之一被广泛重视. 当然，数学建模也是在这个链条上最富有思想性和创造性的环节之一，因为数学思想和数学方法在这里得到了最丰富的展现. 作为一门课程的数学建模，期望能够解说这一具有艺术性的环节。建模课程的直接目的是要通过介绍若干有代表性的数学模型及成功的应用数学方法，培养学生用数学语言描述及解决实际问题的能力. 当然，从世界观方面看，正确把握数学与现实世界的关系也极其重要. 一方面，数学是人类观察与认识世界的一种独特方法，它为创造性地探索自然和社会的各种问题提供了基础和指导；另一方面，现实世界也为数学提供了原始课题、启示和动力. 然而，数学建模课程中以实际问题为背景的大量的数学模型会诱导读者误解数学是为技术而产生的工具. 事实上，数学更是一种精神，一种彻底的理性精神，它对人类社会的物质生产，道德和文化具有广泛而深远的影响. 从这个意义上，数学必然影响人们世界观的形成.

本书以数学建模方法为主线，包含初等建模方法、微分法、差分法、微分方程稳定性分析方法、线性规划方法、动态规划方法、层次分析法、图论方法等内容. 上述方法均为建模课程中比较经典的方法，限于课时的原因，许多其他的建模方法被略去. 各章内容相互独立，均可单独讲授. 各章所需学时也有较大的灵活性. 整个内容的选择有明显的偏重数学的痕迹，但也带有一些数学游戏的成分.

与通常的数学课程有一些明显的不同，数学建模课程苦于对数量庞大的成功的数学建模例子的取舍. 鉴于作者的知识视野和兴趣爱好，不同的数学建模教材有十分不同的内容. 也就是说，一个标准的数学建模教材几乎是不可能的. 因此，建议使用本书的读者同时参阅其他相关教材. 另外，限于编者的水平，书中难免有不当或者错误之处，衷心期望读者批评指正.

编　者

2011 年 3 月于兰州

目 录

第一章　数学模型概论

1.1　数学模型的基本概念

提起模型，人们首先想到的是航天模型、飞机轮船模型、建筑模型，等等. 那么，什么是模型呢？模型是实物、过程的表示，是人们认识事物的框架. 它可能是对实物的仿造、模拟，也可能是某些基本属性的抽象. 而数学模型则是对所研究对象进行模拟，是用数学思维方法将要解决的问题进行简化、抽象处理，用数学符号、公式、图标等刻画事物本质属性及内在规律. 关于数学模型的具体定义，各种教材有多种提法. 例如，E.A. Bender 给出的定义为：“数学模型是关于部分现实世界和为一种特殊目的而做的抽象、简化的数学结构. ”

从数学模型的这些定义中可以看到，数学模型是联系实际问题与数学的桥梁. 建立一个数学模型，相当于建立一座桥梁，从现实问题出发，途经这座桥梁，可以使问题得到科学化、严密化及精确化的结果. 因此，数学模型是科学研究的重要方法.

从数学模型这些定义中可以看到，数学模型是对部分现实世界的抽象结果. 那么，不同领域如社会、经济、环境、生态、医学、物理等截然不同的问题经过数学抽象，可能会得到类似的数学结构. 从这一点上讲，数学模型不受其研究对象所在领域的限制，或者说，同一个模型可以应用于多个领域，解释不同问题，因此从某种意义上讲，科学技术的本质是数学.

从数学模型这些定义中可以猜测到，如果我们对现实问题所包含的主、次因素采取不同的简化或舍取，那么由问题所抽象出来的数学结构也必然不同，因而对同一问题的解释、预测也就很可能不同. 简言之，同一问题用不同的数学方法建立的数学模型也各不相同. 一个较理想的数学模型，往往要经历反复的修改，不断完善，才能经得起时间和实践的考验. 这里遇到一个非常困难的问题是：如何判断一个数学模型的好坏呢？就像一幅画，如何鉴赏它的艺术性，这两个问题同样困难. 一般而言，一个数学模型是否是一个好的数学模型，关键是看它解决实际问题是否有效. 也就是说，实践是检验数学模型好坏的标准. 一个数学模型如果能较准确地预测、较精确地解决实际问题，这就是一个好的数学模型. 当然，如果从数学的角度看，运用数学知识是否恰当，是否创造性地应用数学知识到实际问题中，也是判断数学模型优劣的标准.

建立一个理想的数学模型，不仅需要必要的数学知识，还必须了解其他领域与之相关的专业知识. 很多伟大的科学家都是建立和应用数学模型的大师. 他们将各个不同学科领域的知识与数学有机结合起来，在不同学科取得了辉煌的成就.

1.2 数学建模课程的特点

数学建模作为一门数学课程，与其他课程相比有着许多不同.

首先，教学目的不同. 其他数学课程，一般以传授某方面专业知识为主要目的，而数学建模这门课，是以培养应用数学的能力，即数学建模能力为其主要目的. 能力和知识不同，但二者又密切相关. 缺乏知识的能力是低能，缺乏能力的知识就不仅仅是低能，而是更大的不幸. 我们国家的应试教育造成的最大弊端就是高分低能，教育改革的目的就是素质教育，就是要改变缺乏能力的知识的不幸. 数学建模以培养能力为目标，这正体现了数学教育中的素质教育.

其次，教学内容不同. 其他数学课程，一般有着明确的研究对象和系统的理论体系. 而数学建模则不同，它的内容来自人类社会的各个领域：政治、经济、军事、环境、医学、科学，等等，所以，数学模型没有完整的理论体系，而仅仅是一些数学在各个方面精彩应用的实际例子. 这些实际例子有时相互关联，有时毫无关系. 正是这些实际例子构成了数学建模的大部分内容. 而数学建模的另外一些内容是由于认为有必要人为加入的.

再次，因为教学目的和内容的不同，从而导致教与学的方式和方法是不同的. 从教师的角度看，为达到教学目的，他必须采取不同的教法. 这项工作正在尝试之中. 事实上，老师可以根据自己不同的需要选择不同的内容（不同的数学模型）以满足教学. 从学生的角度看，一方面由于教学内容的广泛性（数学模型大多数来自于各种不同的领域），给学生的学习带来了一定的困难，它要求学生的知识具有足够的广泛性和良好的结构，并且能够灵活的应用自己所掌握的知识. 但从另一方面讲，事情并不很坏. 因为学生可以根据自己的情况选择学些什么，某一部分掌握的程度对另一部分的学习相互并不影响很多. 我们的目的是培养应用数学的能力和数学建模的能力. 这需要大量的实践，而并非是老师讲一讲，学生听一听想一想而已，更重要的是动手去做，在做的过程中体验问题的深度和难度，体会现实和理论之间的差距. 老师在这里更多的是指导者和参与者，而并非是演讲者.

最后，数学建模作为一门数学课程，与其他课程的不同是学习中出现的问题有所不同. 在数学建模的学习中，经常出现的问题之一是觉得自己的知识不够，不能深刻理解问题的实质. 为解决此问题，我们这本教材在数学模型的选用上做了些工作，选用了那些比较常规的不太专业的模型. 这当然不会解决全部问题（问题的解决需要学生和老师的共同努力）还会造成本书的一个缺陷. 从反面看，有这种问题并非坏事，这会刺激学生的求知欲望. 经常出现的问题之二是“不是做不到，而是想不到”. 出现这种问题的根源是应试教育所造成的应用数学的能力不足，想象力贫乏，创造力匮乏. 我们正是针对这种问题而开设数学建模课的. 希望通过这门课程的学习能改变这种现状.

1.3　建模方法与数学模型的分类

1.3.1　建模方法

数学建模的基本方法可以分成三类：机理分析、数据分析及计算机仿真.

机理分析是根据对客观事物特性的认识，找出反映内部机理的数学规律. 建立数学模型所采用的数学工具有初等数学方法，图解法，比例方法，代数方法，微分方程，组合、优化、线性规划方法，逻辑方法等.

数据分析方法是通过对系统的输入、输出数据测量及统计推断，按一定的准则对现实问题进行拟合，确定出对于数据拟合得最好的公式或曲线，由此得到数学模型. 建立数学模型所采用的实现工具有回归分析法、时间序列分析法等.

计算机仿真是在计算机上模仿各种实际的运行过程，观察系统状态的变化，从而得到对系统的基本性能的估计和认识. 当系统中存在众多随机因素，难以构造机理性的数学模型或用数学分析建模时，可以采用仿真的方法得到系统的动态特性，但不可能得到解析解. 本书所介绍的数学建模方法主要是机理分析与数据分析方法.

1.3.2　数学模型的分类

数学模型的分类具有多样性，基于不同的出发点，数学模型可以有不同的分类方法. 我们介绍下面的几种分类：

1）按变量取值方式可分为：离散模型和连续模型.

2）按变量描述现象的性质可分为：确定性模型和不确定性模型.

3）按变量与时间的关系可分为：静态模型与动态模型.

4）按精确程度可分为：集中参数模型和分布参数模型.

5）按研究方法可分为：初等模型、微分方程模型、运筹模型、图论模型、优化模型和线性代数模型，等等.

6）按实际问题所属学科领域可分为：经济模型、生态模型、人口模型、交通模型、广告模型、社会模型，等等.

7）按人们对所研究问题的内部结构和性能的了解程度可分为：白箱模型、灰箱模型和黑箱模型.

1.4　建立模型的步骤与建模能力

1.4.1　建立模型的一般步骤

一般来说，模型建立要经过六个步骤，即模型准备、模型假设、模型建立、模型求解、

模型验证及模型应用. 它们的关系如图 1.1 所示.

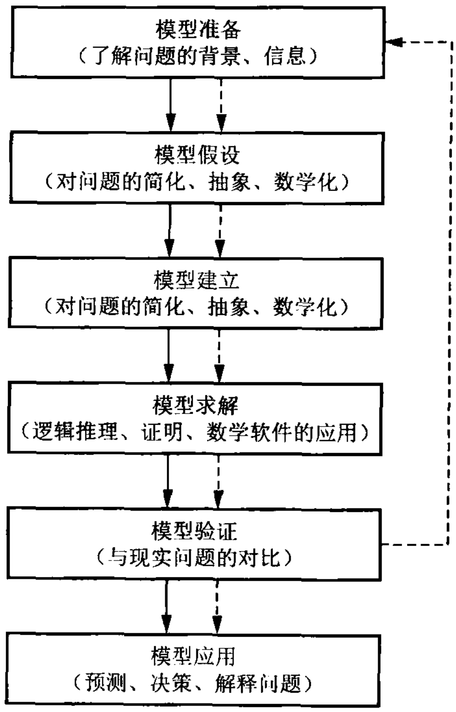


图 1.1

（1）模型准备

在建立模型之前要明确建模目的，尽可能了解问题的实际背景及相关因素，多方面的调查研究，掌握必要的数据和历史资料. 对实体信息的全面了解，将有助于抓住事物的本质. 建立一个合理的数学模型，细致入微的调研工作是必不可少的基础工作.

（2）模型假设

要用一个抽象的数学结构描述一个复杂的实际问题，必须对问题进行简化. 影响问题的因素很多，只有抓住主要因素，忽略次要因素，才能抓住事物的本质，使问题简单化，并进一步使问题数学化.

建模所面临的绝大多数问题都不是纯数学问题，在使问题数学化的过程中，通常需要提出几条恰当的假设，以不同的假设为前提，会得到不同类型的数学模型. 那么，如何提出恰当的假设呢？首先要认真考虑建模的目的，所建模型要从哪个方面揭示实际问题. 恰当的假设与建模的目的密切相关. 再者，无论要建立哪种类型的模型，都要考虑如何选择必要因素作为假设条件. 若建模过程中考虑因素太多，假设条件过于繁杂，所建模型可能会太复杂而无法求解. 若考虑因素太少，假设条件过于简单，又将导致模型太简单、粗糙，不能解释实际问题. 因此太繁或太简的假设，都不能达到建模的目的. 构造模型失败是建模过程中常见的事，建模者无需悲观、失望，建模过程本来就是一个循序渐进的过程. 此时，建模者应该重新考虑问题的背景，分析自己对问题的简化是否合理，修改假设条件，

再次构造模型. 合理假设是建立一个较为理想的模型的关键.

（3）模型建立

在假设的基础上，利用适当的数学工具刻画各变量之间的关系，描述各个对象之间的联系，建立数学模型. 由于数学工具的多样性，在建模过程中若采用不同的数学方法，就会得到不同类型的数学模型. 究竟采用哪种方法建模，取决于假设变量的性质，是随机的还是确定性的，是单变量还是多变量，是离散的还是连续的等. 同时还要考虑精度的要求. 若仅用简单的数学工具就能刻画问题的实质，也能满足精度要求，那么就要避免用复杂的方法建模. 一般来讲，在能达到预期效果的前提下，所用数学工具越简单越好.

（4）模型求解

根据所建模型的类型，利用适当的数学方法求解数学模型. 可用多种方法求解，例如直观的图解，精确的解方程，严密的逻辑推理，计算机的模糊解，数值解等. 由于计算机的广泛应用，计算技术的迅速发展，计算方法的多样性，多种数学软件日趋完善，为模型求解的计算工作带来很大方便. 应用数学软件求解数学模型和分析模型，已经成为当今主流.

（5）模型验证

分析模型求出来的结果，通常要分析变量之间的依赖关系. 根据计算精度的要求，进行误差分析，考虑参数对结果稳定性的影响，进行灵敏度分析等是模型检验中需要做的工作. 我们将所得的结果与实际情况作比较，以验证模型的正确性. 如果用模型计算出来的理论数值与实际数据基本吻合，则模型是成功的，反之，如果理论数值与实际数据相差甚大，则模型是失败的，需要重新考虑分析问题的背景，搜集更多的实际数据与信息，对简化的问题再重新做出假设，重新建模并求解. 这样的修改可能不止一次，反复修改使模型趋于合理，最终得到理想的数学模型.

（6）模型应用

一个较成功的数学模型往往不仅可以解释实际问题，而且还可以预测一些未知现象，并能应用于其他问题. 随着计算机的广泛应用，各学科在各自领域中的研究工作也越来越注重应用模型描述事物的动态，预测其发展趋势，或做出最优决策. 可以这样认为，越来越多的模型的成功应用，对于促进科学技术和生产的发展起着重要的作用.

1.4.2　建模能力

构造数学模型是一种创造性的工作，它不仅要求数学知识，而且需要有一定的能力.

1）在模型准备过程中需要有对实际问题的洞察力. 好的洞察力能够发现实际问题的数学要素，抓住问题的本质.

2）在模型假设中，需要有抽象的分析能力. 将问题的复杂因素分解为次要因素和主要因素，并补充必要的假设条件才能保证所建模型的合理性.

3）建立模型的想象力. 想象是形象思维，具有灵活性和自由性. 根据事物已经存在的明显的特征想象其内在规律或联系，想象其发展趋势，对事物的概况和轮廓可以有初步的描述. 想象力是科学研究的实在因素，是成功建模必不可少的因素. “想象力概括着世界

上的一切，推动着进步，并且是知识的来源.”

4）在建模中，运用数学工具的能力. 要将已知的数学工具灵活而恰当地应用于建立模型.

5）模型求解与模型检验中数学软件的应用能力. 某些模型在理论上很漂亮，但求解很困难，甚至无解析解. 我们通常应用某些数学软件求其数值解，这样不仅省时、省力，而且由于某些软件具有强大的符号计算功能、数值计算功能或图形可视化功能，可以使我们很容易得到计算结果，并且直观、形象地观察到这个结果. 因此了解数学软件的特点，并且用于求解模型，就是利用前人的智慧结晶来解决问题.

1.5 建模常用的数学软件

数学建模过程中尤其是模型求解中要用到相关的数学软件来处理. 这些数学软件为模型的建立和求解提供了有力的支撑. 常用的数学软件有：Mathematica，Maple，MATLAB，Lindo，Lingo，SAS，SPSS 等.

Mathematica 和 Maple 都是将符号计算、数值计算和图形显示等功能结合在一起的数学软件. MATLAB 是集科学计算、图形可视化和扩展编程等功能为一体的数学软件，它是目前最流行的科学和工程计算软件之一. Lindo 是一个专门用于求解线性规划的数学软件包，它在教学、科研和工业界有着广泛的应用. Lingo 是一个用来求解非线性规划的数学软件包. SAS 和 SPSS 都是用于数据处理和统计分析的软件. 本书推荐使用 MATLAB 软件. 当然，了解并熟练应用更多的数学软件对数学建模更好.

为了帮助读者在计算机上进行实际练习，本书在应用中给出了一些问题求解的 MATLAB 程序和 Lindo 程序，附录中还给出了学习 MATLAB 语言的一些基础知识.

阅读材料

另外一些观点

Mathematical modelling is the link between mathematics and the rest of the world. You ask a question. You think a bit, and then you refine the question, phrasing it in precise mathematical terms. Once the question becomes a mathematical question, you use mathematics to find an answer. Then finally (and this is the part that too many people forget), you have to reverse the process, translating the mathematical solution back into a comprehensible, no-nonsense answer to the original question. Some people are fluent in English, and some people are fluent in calculus. We have plenty of each. We need more people who are fluent in both languages and are willing and able to translant. These are the people who will be influential in solving the problems of the future.

The Five-Step Method

Here we outline a general that can be used to solve problems using mathematical modeling. We call it the five-step method, that is:

1. Ask the question.
2. Select the modeling approach.
3. Formulate the model.
4. Solve the model.
5. Answer the question.

第二章　初等方法建模

有些模型的建立采用的数学方法十分简单，我们将这些模型称为初等建模. 用简单的数学方法建模，容易被更多的人理解、接受和采用，也就有更为广泛的应用价值. 所谓图解法，量纲分析方法，比例法，初等代数方法等都是初等方法建模常用的方法. 下面我们介绍初等方法建模中常用的一些数学知识.

2.1　建模的初等方法

2.1.1　函数（function）概念

函数概念是建模中最常用的数学概念之一，它用来表示或刻画两个量或多个量之间的依赖关系. 用数学的术语说，对于某个数集 D 中的任意一个元素 x，都存在一个实数 y 与之对应，这种对应关系被称为（一元）函数，用 $y=f(x)$ 来表示. 在建模中，对函数概念的灵活运用会达到意想不到的结果. 如果变量 y 随着变量 x 的增大而增大，那么反映在函数关系 $y=f(x)$ 中则说明该函数是单调递增的. 反过来，若变量 y 随着变量 x 的增大而减小，那么反映在函数关系 $y=f(x)$ 中则说明该函数是单调递减的. 一个连续函数可以用一条连续的曲线来描述，这条曲线叫做函数的图像（graph）. 定性分析问题时，可以根据函数是否具有某种特性（如单调性、凸凹性等）在坐标系中画一条抽象的曲线来表示两个量之间的关系即函数.

最简单、最常用的函数是直线，它有如下的表示

$$y=kx+b \tag{2.1.1}$$

其中 k 是直线的倾斜程度，叫做斜率. 当 $k>0$ 时，方程（2.1.1）表示的直线是单调递增的，即变量 y 随着变量 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，方程（2.1.1）表示的直线是单调递减的，即变量 y 随着变量 x 的增大而减小. 参数 b 的选取可以使得直线（2.1.1）过某一个预先给定的点. 很多模型都是假定变量 y 和变量 x 有像（2.1.1）式那样的函数关系的.

稍微复杂一点的函数就是二次函数了，即

$$y=ax^2+bx+c \tag{2.1.2}$$

当假设变量 y 和变量 x 有像（2.1.1）式那样的关系后得出的模型并不能较好的刻画现实问题时，人们会求助于比（2.1.1）式稍微复杂一点的函数关系（2.1.2）式. 方程（2.1.2）表示的二次函数在整个实数范围内不具有单调性，所以通常在使用时将自变量 x 限制在某一范围内. 例如，考虑

$$y=cx(1-x)$$

当$0 \leqslant x \leqslant 0.5$时，它是单调递增的函数；当$0.5 \leqslant x \leqslant 1$时，它是单调递减的函数. 其图像见图 2.1.

当然，人们也会求助于其他函数来建立模型，例如

$$y = \frac{k}{x}, \quad y = \mathrm{e}^x$$

数学上称为基本初等函数的有五大类：有理函数、三角函数、反三角函数、指数函数和对数函数，而这五类函数进行有限次和、差、积、商以及复合、取反函数这些运算之后生成的函数称为初等函数. 无论如何，对基本初等函数基本形态的全面了解，非常有助于构建好的模型.

另外几个常用的非初等函数的例子是：

1）符号函数（sign function）的定义为

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

符号函数 sgn 有一个跳跃间断点$x = 0$，其图像如图 2.2 所示.

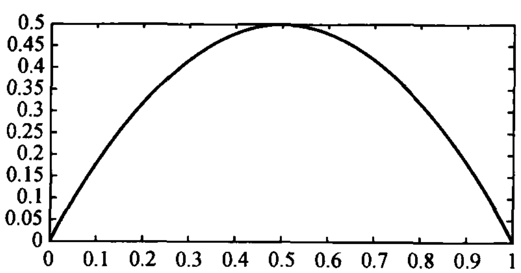


图 2.1

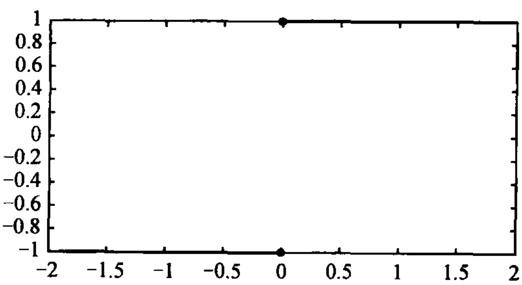


图 2.2

2）Heaviside 阶跃函数（Heaviside step function），又叫单位阶跃函数（unit step function），它在信号处理、控制论等诸多领域都有着非常广泛的应用. 利用符号函数 sgn，定义 Heaviside 阶跃函数如下

$$H(x) = \frac{1 + \mathrm{sgn}(x)}{2} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Heaviside 阶跃函数也被推广为

$$H_a(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ a, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

3）Dirac δ 函数（Dirac delta function），也叫单位脉冲，表示为

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$