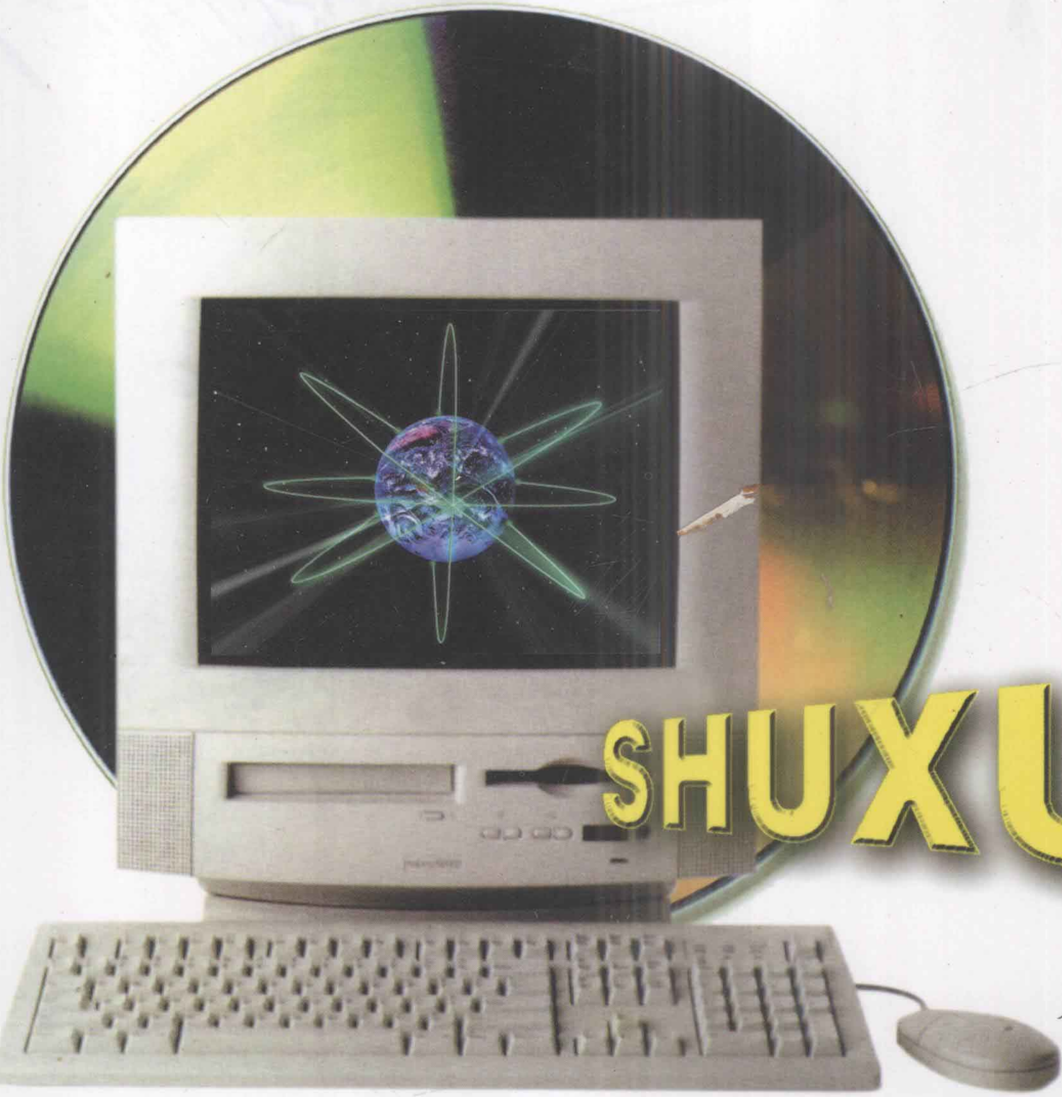
全日制普通高级中学教科书（试验修订本·必修）

数学

第二册（上）

人民教育出版社中学数学室 编著



SHUXUE

人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书（试验修订本·必修）

数　　学

第二册（上）

人民教育出版社中学数学室　编著

人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书（试验修订本·必修）

数　学

第二册（上）

人民教育出版社中学数学室　编著

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版

（网　址：http://www.pep.com.cn）

广 东 教 材 出 版 中 心 重 印

广 东 省 新 华 书 店 发 行

揭阳市雅音图印刷有限公司印刷

*

开本：890毫米×1194毫米　1/16　印张：8.75　字数：130 000

2000年12月第2版　2002年5月第1次印刷

印数：000,001—383,300（2002秋）

ISBN 7-107-14437-5/G·7527（课）　定价 8.65元

说　明

《全日制普通高级中学教科书（试验修订本）·数学》是根据教育部2000年颁布的《全日制普通高级中学课程计划（试验修订稿）》和《全日制普通高级中学数学教学大纲（试验修订版）》的规定，遵照1999年全国教育工作会议的精神，在两省一市进行试验的《全日制普通高级中学教科书（试验本）·数学》的基础上进行修订的. 此次修订的指导思想是：遵循“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”的战略思想，贯彻教育必须为社会主义现代化建设服务，必须与生产劳动相结合，培养德、智、体、美全面发展的社会主义事业的建设者和接班人的方针，以全面推进素质教育为宗旨，全面提高普通高中教育质量.

普通高中教育，是与九年义务教育相衔接的高一层次的基础教育. 高中教材的编写，旨在进一步提高学生的思想道德品质、文化科学知识、审美情趣和身体心理素质，培养学生的创新精神、实践能力、终身学习的能力和适应社会生活的能力，促进学生的全面发展，为高一级学校和社会输送素质良好的合格的毕业生.

《全日制普通高级中学教科书（试验修订本）·数学》（以下简称《数学》）包括三册，其中第一册、第二册是必修课本，分别在高一、高二学习，每周4课时；第三册是选修课本，在高三学习，它又分为选修Ⅰ和选修Ⅱ两种，每周分别为2课时和4课时.

这套书的第二册又分为上、下两个分册，分别供高二上、下两个学期使用. 本书是《数学》第二册（上），内容包括不等式、直线和圆的方程、圆锥曲线方程三章.

全套书在体例上有下列特点：

1. 每章均配有章头图和引言，作为全章内容的导入，初步了解学习这一章的必要性.

2. 书中习题共分三类：练习、习题、复习参考题.

练习　以复习相应小节的教学内容为主，供课堂练习用.

习题　每小节后一般配有习题，供课内、外作业选用，少数标有*号的题在难度上略有提高，仅供学有余力的学生选用.

复习参考题　每章最后配有复习参考题，分A、B两组，A组题是属于基本要求范围的，供复习全章使用；B组题带有一定的灵活性，难度上略有提高，仅供学有余力的学生选用.

3. 每章在内容后面均安排有小结与复习，包括内容提要、学习要求和需要注意的问题、参考例题三部分，供复习全章时参考.

4. 每章附有一至两篇不作教学要求的阅读材料，供学生课外阅读，借以扩大知识面、激发学习兴趣、培养应用数学的意识.

本套书由人民教育出版社中学数学室编写，其中《数学》第二册（上）原试验本由田载今、薛彬主持编写，参加编写的有：颜其鹏、俞求是、李慧君等，责任编辑为蔡上鹤、康合太、李海东，审稿为方明一.

《数学》第二册（上）原试验本在编写过程中蒙孔令颐、吴之季、刘玉翘、陈　捷、朱长盛、戴佳珉等同志提出宝贵意见，在此表示衷心感谢. 参加本次修订的有：颜其鹏、俞求是、李慧君，责任编辑为蔡上鹤、李海东，审稿为方明一.

本册教材经教育部中小学教材审定委员会审读，尚待审查。

人民教育出版社中学数学室

2000年7月

目 录

第六章 不等式

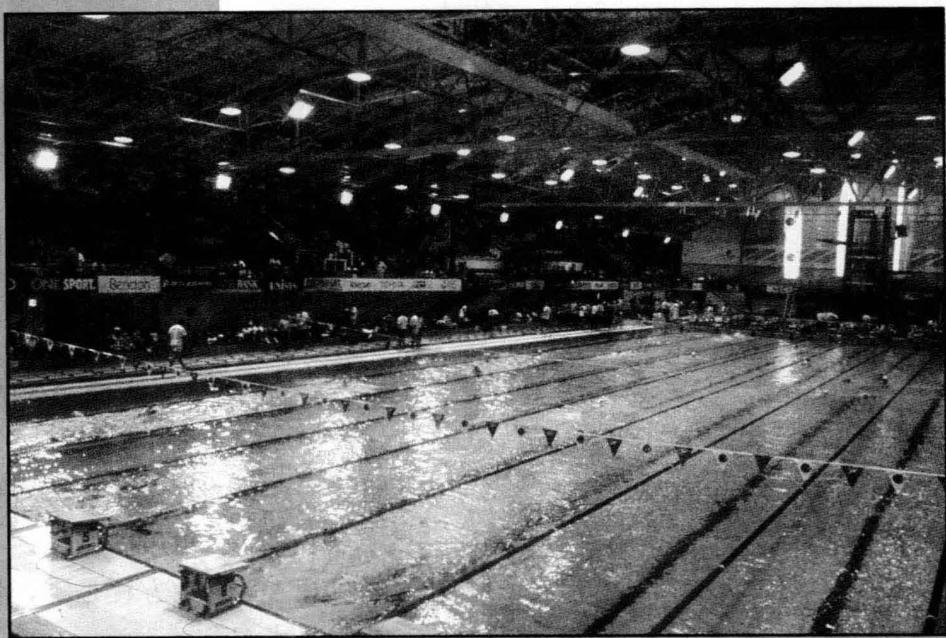
第七章 直线和圆的方程

第八章 圆锥曲线方程

本书部分常用符号

$\Rightarrow$ 或$\Leftarrow$	$p\Rightarrow q$ 或 $q\Leftarrow p$	由条件 p 可推出结论 q，p 是 q 的充分条件，q 成立只需 p 成立；q 是 p 的必要条件，p 成立必须 q 成立
$\Leftrightarrow$	$p\Leftrightarrow q$	$p(q)$是 $q(p)$的充分必要条件，$p(q)$成立当且仅当$q(p)$成立，$p(q)$等价于 $q(p)$
k_l，k'_{AB}		直线 l 的斜率 k，直线 AB 的斜率 k'
AB 或 $\|AB\|$		线段 AB 的长度
C：$f(x, y)=0$		曲线 C，其方程是 $f(x, y)=0$，方程是$f(x, y)=0$的曲线 C
C：$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t) \end{cases}$ （t 为参数）①		曲线 C，其参数方程是①，参数方程是①的曲线 C
$(\pm a, 0)$		$(a, 0)$、$(-a, 0)$ 两点
$(0, \pm b)$		$(0, b)$、$(0, -b)$ 两点

第六章 不等式



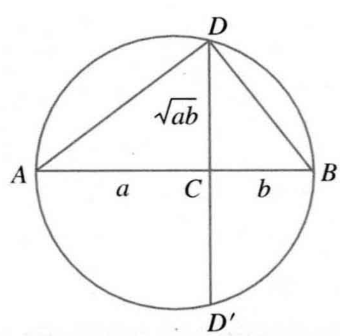
6.1 不等式的性质

6.2 算术平均数与几何平均数

6.3 不等式的证明

6.4 不等式的解法举例

6.5 含有绝对值的不等式



看下面的问题：

某工厂要建造一个长方体无盖贮水池，其容积为 4 800 m^3，深为 3 m，如果池底每 1 m^2 的造价为 150 元，池壁每 1 m^2 的造价为 120 元，问怎样设计水池能使总造价最低，最低总造价是多少元？

设水池底面一边的长度为 x m，则另一边的长度为 $\frac{4\,800}{3x}$m. 又设水池总造价为 l 元. 根据题意，得

$$l = 150 \times \frac{4\,800}{3} + 120\left(2 \times 3x + 2 \times 3 \times \frac{4\,800}{3x}\right)$$
$$= 240\,000 + 720\left(x + \frac{1\,600}{x}\right).$$

这是一个求函数最小值的问题，学习了本章里不等式的有关定理后，就很容易解决这个问题.

不等式是数学的重要内容，是研究数量的大小关系的必备知识，是我们进一步学习数学和其他学科的基础和工具.

在前面已学过了一元一次不等式、一元二次不等式和含有绝对值不等式的解法，本章我们将进一步学习不等式的性质、不等式的证明和某些简单不等式的解法.

6.1 不等式的性质

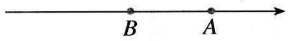


图 6-1

我们知道，实数与数轴上的点是一一对应的. 在数轴上不同的两点中，右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大. 例如，在图 6-1 中，点 A 表示实数 a，点 B 表示实数 b，点 A 在点 B 右边，那么 $a>b$.

我们再看图 6-1，$a>b$ 表示 a 减去 b 所得的差是一个大于 0 的数即正数. 一般地：

如果 $a>b$，那么 $a-b$ 是正数；逆命题也正确.

类似地，如果 $a<b$，那么 $a-b$ 是负数；如果 $a=b$，那么 $a-b$ 等于 0. 它们的逆命题都正确.

这就是说：

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0;$$
$$a=b \Leftrightarrow a-b=0;$$
$$a<b \Leftrightarrow a-b<0.$$

由此可见，要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了.

例 1 比较 $(a+3)(a-5)$ 与 $(a+2)(a-4)$ 的大小.

解：$(a+3)(a-5)-(a+2)(a-4)$

$=(a^2-2a-15)-(a^2-2a-8)$

$=-7<0$，

$\therefore\ (a+3)(a-5)<(a+2)(a-4)$.

想一想：在例 2 中，如果没有 $x\neq 0$ 这个条件，那么两式的大小关系如何?

例 2 已知 $x\neq 0$，比较 $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1 的大小.

解：$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)$

$=x^4+2x^2+1-x^4-x^2-1$

$=x^2$.

由 $x\neq 0$，得 $x^2>0$，从而

$$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1.$$

练　习

1. 比较$(x+5)(x+7)$与$(x+6)^2$的大小.
2. 如果$x>0$，比较$(\sqrt{x}-1)^2$与$(\sqrt{x}+1)^2$的大小.
3. 已知$a\neq 0$，比较$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$与$(a^2+a+1)(a^2-a+1)$的大小.

利用比较实数大小的方法，可以推出下列不等式的性质.

定理 1　**如果$a>b$，那么$b<a$；如果$b<a$，那么$a>b$.**

证明：∵　$a>b$，

∴　$a-b>0$.

由正数的相反数是负数，得

$$-(a-b)<0,$$

即　$b-a<0$，

∴　$b<a$.

（定理 1 的后半部分请同学们自证.）

定理 1 说明，把不等式的左边和右边交换，所得不等式与原不等式异向❶.

❶ 在两个不等式中，如果每一个的左边都大于（或小于）右边，这两个不等式就是同向不等式，例如$a^2+2>a+1$，$3a^2+5>2a$是同向不等式；如果一个不等式的左边大于（或小于）右边，而另一个不等式的左边小于（或大于）右边，这两个不等式就是异向不等式，例如$a^2+3>2a$，$a^2<a+5$是异向不等式.

定理 2　**如果$a>b$，且$b>c$，那么$a>c$.**

证明：∵　$a>b$，$b>c$，

∴　$a-b>0$，$b-c>0$.

根据两个正数的和仍是正数，得

$$(a-b)+(b-c)>0,$$

即　$a-c>0$，

∴　$a>c$.

根据定理 1，定理 2 还可以表示为：

如果$c<b$，且$b<a$，那么$c<a$.

定理 3　**如果$a>b$，那么$a+c>b+c$.**

证明：∵　$(a+c)-(b+c)$

$=a-b>0$，

∴　$a+c>b+c$.

定理 3 说明，不等式的两边都加上同一个实数，所得不等式与原不等式同向.

想一想：如果$a<b$，是否有$a+c<b+c$?

利用定理 3 可以得出：

如果 $a+b>c$，那么 $a>c-b$.

也就是说，**不等式中任何一项改变符号后，可以把它从一边移到另一边.**

推论　**如果 $a>b$，且 $c>d$，那么 $a+c>b+d$.**

证明：∵ $\qquad a>b$，

∴ $\qquad a+c>b+c$. ①

∵ $\qquad c>d$，

∴ $\qquad b+c>b+d$. ②

由①、②得 $\qquad a+c>b+d$.

很明显，这一推论可以推广到任意有限个同向不等式两边分别相加. 这就是说，两个或者更多个同向不等式两边分别相加，所得不等式与原不等式同向.

定理 4　**如果 $a>b$，且 $c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b$，且 $c<0$，那么 $ac<bc$.**

证明：$ac-bc=(a-b)c$.

∵ $\qquad a>b$，

∴ $\qquad a-b>0$.

根据同号相乘得正，异号相乘得负，得

当 $c>0$ 时，$(a-b)c>0$，即

$$ac>bc;$$

当 $c<0$ 时，$(a-b)c<0$，即

$$ac<bc.$$

由定理 4，又可以得到：

推论 1　**如果 $a>b>0$，且 $c>d>0$，那么**

$$ac>bd.$$

同学们可以仿照定理 3 的推论证明定理 4 的推论 1.

很明显，这一推论可以推广到任意有限个两边都是正数的同向不等式两边分别相乘. 这就是说，两个或者更多个两边都是正数的同向不等式两边分别相乘，所得不等式与原不等式同向. 由此，我们还可以得到：

推论 2　**如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n$（$n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$）.**

定理 5　**如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$）.**

我们用反证法来证明.

证明：假定 $\sqrt[n]{a}$ 不大于 $\sqrt[n]{b}$，这有两种情况：或者 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，或者 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$.

由推论 2 和定理 1，当$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$时，有 $a<b$；

当$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$时，有 $a=b$.

这些都同已知条件 $a>b>0$ 矛盾.

所以$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

利用以上不等式的性质及其推论，就可以证明一些不等式.

例 3　已知 $a>b$，$c<d$，求证 $a-c>b-d$.

证明：由 $a>b$ 知 $a-b>0$，由 $c<d$ 知 $d-c>0$.

$\because$
$$(a-c)-(b-d)$$
$$=(a-b)+(d-c)>0,$$
$\therefore$
$$a-c>b-d.$$

例 4　已知 $a>b>0$，$c<0$，求证$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$.

证明：$\because$　　$a>b>0$，

两边同乘以正数$\frac{1}{ab}$，得
$$\frac{1}{b}>\frac{1}{a},$$
即
$$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$$
又
$$c<0,$$
$\therefore$
$$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}.$$

练　习

1. 判断下列各命题的真假，并说明理由：

(1) 如果 $a>b$，那么 $a-c>b-c$；

(2) 如果 $a>b$，那么$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；

(3) 如果 $ac<bc$，那么 $a<b$；

(4) 如果 $ac^2>bc^2$，那么 $a>b$.

2. 回答下列问题：

(1) 如果 $a>b$，$c<d$，能否断定 $a+c$ 与 $b+d$ 谁大谁小？举例说明；

(2) 如果 $a>b$，$c>d$，能否断定 $a-2c$ 与 $b-2d$ 谁大谁小？举例说明；

(3) 如果 $a>b$，$c>d$，是否可以推出 $ac>bd$？举例说明；

(4) 如果 $a>b$，$c<d$，且 $c\neq 0$，$d\neq 0$，是否可以推出 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$？举例说明.

3. 求证：

(1) 如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a-d>b-c$；

(2) 如果 $a>b$，$ab>0$，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(3) 如果 $a>b>0$，$c<d<0$，那么 $ac<bd$；

(4) 如果 $a>b$，那么 $c-2a<c-2b$.

习　题　6.1

1. 比较 $(2a+1)(a-3)$ 与 $(a-6)(2a+7)+45$ 的大小.

2. 比较 $(x+1)\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)$ 与 $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$ 的大小.

3. 设 $x\geqslant 1$，比较 x^3 与 x^2-x+1 的大小.

4. 用“>”、“<”号填空：

(1) 如果 $a>b$，那么 $-a$ ____ $-b$；

(2) 如果 $a<b<0$，那么 $\frac{1}{a}$ ____ $\frac{1}{b}$；

(3) 如果 $a>b>c>0$，那么 $\frac{c}{a}$ ____ $\frac{c}{b}$；

(4) 如果 $0<a<b<1$，$n\in\mathbf{N}^*$，那么 $\frac{1}{a^n}$ ____ $\frac{1}{b^n}$ ____ 1.

5. 求证：

(1) 如果 $a>b$，$e>f$，$c>0$，那么

$$f-ac<e-bc;$$

(2) 如果 $a>b>0$，那么 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$；

(3) 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么

$$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

***6.** 如果 $30<x<42$，$16<y<24$，求 $x+y$，$x-2y$ 及 $\frac{x}{y}$ 的取值范围.

6.2 算术平均数与几何平均数

利用不等式的性质，我们可以推导出下列重要的不等式：

如果 $a,b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号）.

证明：$$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2.$$

当 $a\neq b$ 时 $(a-b)^2>0$，当 $a=b$ 时 $(a-b)^2=0$，所以

$$(a-b)^2\geqslant 0,$$

即

$$a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

由上面的结论，我们又可得到：

定理　**如果 a，b 是正数，那么 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号）.**

证明：∵ $$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geqslant 2\sqrt{ab},$$

∴ $$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},$$

即

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\text{❶}.$$

显然，当且仅当 $a=b$ 时，$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$.

这里，我们称 $\frac{a+b}{2}$ 为 a，b 的**算术平均数**，称 $\sqrt{ab}$ 为 a，b 的**几何平均数**. 因而，这一定理又可叙述为：**两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.**

现给出这一定理的一种几何解释（图 6-2).

以 $a+b$ 长的线段为直径作圆，在直径 AB 上取点 C，使 $AC=a$，$CB=b$. 过点 C 作垂直于直径 AB 的弦 DD'，连结 AD、DB，易证 $\mathrm{Rt}\triangle ACD\backsim\mathrm{Rt}\triangle DCB$，那么

$$CD^2=CA\cdot CB,$$

即

$$CD=\sqrt{ab}.$$

这个圆的半径为 $\frac{a+b}{2}$，显然，它大于或等于 CD，即

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

其中当且仅当点 C 与圆心重合，即 $a=b$ 时，等号成立.

❶ 如果把 $\frac{a+b}{2}$ 看作是正数 a、b 的等差中项，$\sqrt{ab}$ 看作是正数 a、b 的等比中项，那么该定理可以叙述为：两个正数的等差中项不小于它们的等比中项.

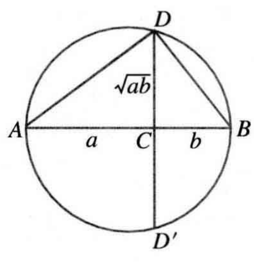


图 6-2

例 1　已知 x，y 都是正数，求证：

(1) 如果积 xy 是定值 P，那么当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$；

(2) 如果和 $x+y$ 是定值 S，那么当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$.

证明：因为 x，y 都是正数，所以

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}.$$

(1) 积 xy 为定值 P 时，有

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{P},$$

$$\therefore\qquad x+y\geqslant 2\sqrt{P}.$$

上式当 $x=y$ 时取"$=$"号，因此，当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$.

(2) 和 $x+y$ 为定值 S 时，有

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{S}{2},$$

$$\therefore\qquad xy\leqslant\frac{1}{4}S^2.$$

上式当 $x=y$ 时取"$=$"号，因此，当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$.

例 2　已知 a，b，c，d 都是正数，求证

$$(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd.$$

证明：由 a，b，c，d 都是正数，得

$$\frac{ab+cd}{2}\geqslant\sqrt{ab\cdot cd}>0,$$

$$\frac{ac+bd}{2}\geqslant\sqrt{ac\cdot bd}>0.$$

$$\therefore\qquad \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{4}\geqslant abcd,$$

即

$$(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd.$$

利用算术平均数与几何平均数的不等式，可以很容易地解决本章开始的引言中提出的问题.

设水池底面一边的长度为 x m，水池的总造价为 l 元. 根据题意，得

$$l = 240\ 000 + 720\left(x + \frac{1\ 600}{x}\right)$$

$$\geqslant 240\ 000 + 720 \times 2\sqrt{x \cdot \frac{1\ 600}{x}}$$

$$= 240\ 000 + 720 \times 2 \times 40 = 297\ 600.$$

当 $x=\frac{1\ 600}{x}$，即 $x=40$ 时，l 有最小值 297 600.

因此，当水池的底面是边长为 40 m 的正方形时，水池的总造价最低，最低总造价是 297 600 元.

练习

1. 已知 a，b，c 都是正数，求证

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc.$$

2. 已知 x，y 都是正数，求证：

(1) $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2$；

(2) $(x+y)(x^2+y^2)(x^3+y^3)\geqslant 8x^3y^3$.

3. 已知 $x\neq 0$，当 x 取什么值时，$x^2+\frac{81}{x^2}$ 的值最小？最小值是多少？

4. 一段长为 L m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园，问这个矩形的长、宽各为多少时，菜园的面积最大，最大面积是多少？

习 题 6.2

1. 求证 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.

2. 已知 a，b 都是正数，且 $a\neq b$，求证

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}.$$

3. 已知 a，b 都是正数，求证

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

4. 已知 $x>0$，求证 $2-3x-\frac{4}{x}$ 的最大值是 $2-4\sqrt{3}$.

5. 已知 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求证 $\tan\theta+\cot\theta$ 的最小值是 2.