全国各类
成人高等学校
招生考试丛书

数学
及解题指导

（理工农医类用）

人民教育出版社

全国各类成人高等学校招生考试丛书

数学及解题指导

（理工农医类）

人民教育出版社中学数学室 编

人民教育出版社

(京)新登字 113 号

全国各类成人高等学校招生考试丛书

数学及解题指导

(理工农医类)

人民教育出版社中学数学室 编

*

人民教育出版社 出版发行

四川省出版印刷公司重印

全国新华书店经销

华云电子数据中心照排

成都市峨嵋铸字印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 23.75 字数 528,000

1995 年 3 月第 1 版 1995 年 7 月第 3 次印刷

印数 90,001—191,000

ISBN 7—107—11252—X

G·4271 定价 12.10 元

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。

目　录

第一章　数、式、方程和方程组

【内容提要】

一、数

1. 有关数的基本概念

(1) 实数系表

$$\text{实数}\begin{cases}\left.\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数或循环小数}\\ \left.\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

注意　实数系可以进一步扩展，成为复数系. 参见本书第八章.

(2) 数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴.

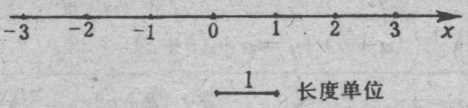


图　1-1

实数集合和数轴上点的集合是一一对应的. 数轴上任一点所对应的数总大于该点左边任一点所对应的数.

(3) 相反数和倒数：只有符号不同的两个数，叫做互为相反数，零的相反数是零. 1 除以某数的商叫做这个数的倒数，零没有倒数.

(4) 绝对值：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零. 即

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\ 0 & (a=0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

从数轴上看，一个数的绝对值就是表示这个数的点离开原点的距离.

2. 实数的运算

(1) 基本运算：实数可进行加、减、乘、除、乘方等运算，对非负实数还可进行开方运算. 实数加、减、乘、除(除数不为零)、乘方的结果仍是实数. 任何实数都可以开奇次方，结果仍是实数，只有非负实数，才能开偶次方，其结果仍是实数.

(2) 运算法则：

加法：同号两数相加，取原来的符号，并把绝对值相加. 异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值. 任何数与零相加等于原数.

减法：减去一个数，等于加上这个数的相反数.

乘法：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘. 零乘以任何数都得零. 任何数乘以 1 都等于原数.

除法：两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除. 零除以任何一个不为零的数等于零. 任何数除以一个不为零的数，等于乘以这个数的倒数. 零不能作除数.

乘方：正数的任何次幂是正数；负数的偶次幂是正数，奇次幂是负数；零的正数次幂等于 0.

开方：正数的奇次方根是一个正数，正数的偶次方根有两个，这两个方根互为相反数，零的 n 次方根都是零. 负数的奇次方根是一个负数，在实数范围内，负数没有偶次方根.

(3) 运算律：设 a、b、c 为任意实数，则有：

运算律	加法	乘法
交换律	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
分配律	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	

(4) 运算顺序：在同一个式子里，先乘方、开方，然后乘、除，最后加、减. 有括号时，由最里层的括号算起，逐层去掉括号. 有时根据运算律可改变上述顺序.

二、式

1. 代数式及其分类

代数式是由运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)把数或表示数的字母连结而成的式子. 单独的一个数或者一个字母也是代数式. 用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫做代数式的值.

代数式分类如下：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

2. 整式

(1) 整式的有关概念：由数与字母相乘形成的代数式，叫做单项式；几个单项式的和叫做多项式；单项式和多项式统称整式.

(2) 整式的运算：整式能进行加、减、乘的运算. 整式加、减、乘的结果仍是整式. 整式可以进行带余除法的运算. 整式的运算符合交换律、结合律、分配律.

幂的运算法则：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n),$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

常用的乘法公式：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

(3) 多项式的因式分解：就是把一个多项式化为几个整式的积. 常用的方法有：提公因式法；公式法；分组分解法；十字相乘法；求根公式法等.

3. 分式

设 A、B 表示两个整式，如果 B 中含有字母，式子$\dfrac{A}{B}$就叫做分式(注意分母 B 的值不能为零，否则分式没有意义). 分子与分母没有公因式的分式，叫做最简分式.

(1) 分式的基本性质：

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}, \quad \frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M} \qquad (M\text{ 为不等于零的整式}).$$

(2) 分式的符号法则：分式的分子、分母与分式本身的符号，改变其中的任何两个，分式的值不变.

(3) 分式的运算：

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

4. 二次根式

(1) 二次根式的有关概念：正数 a 的正的平方根，叫做 a 的算术平方根. 零的平方根是零.

式子 $\sqrt{a}\,(a\geqslant0)$ 叫做二次根式.

$$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant0);$$

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a\ (a\geqslant0),\\-a(a<0).\end{cases}$$

被开方数的每一个因式的指数都小于根指数 2，被开方数不含分母的二次根式，叫做最简二次根式；几个二次根式化成最简二次根式以后，如果被开方数相同，这几个二次根式就叫做同类二次根式.

(2) 二次根式的运算：

二次根式的加减：先把各根式化为最简根式，再合并同类根式；

二次根式的乘除：按下列性质进行

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant0,b\geqslant0),$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant0,b>0).$$

(3) 分母有理化：如果被开方数是一个分式(或分数)，用一个适当的代数式同乘分子与分母，使分母成为完全平方式，再开方，移到根号外从而化去根号内的分母的过程，叫做分母有理化.

三、方程和方程组

1. 方程

含有未知数的等式叫做方程. 能使方程左右两边相等的未知数的值，叫做方程的解. 求方程的解或说明方程无解的过程，叫做解方程.

(1) 同解原理：

(i) 方程的两边都加上(或都减去)同一个数或同一个整式，所得方程与原方程是同解方程.

(ii) 方程的两边都乘以(或都除以)不等于零的同一个数，所得方程与原方程是同解方程.

(2) 一元一次方程：形如 $ax+b=0(a\neq0)$ 的方程，叫做一元一次方程. 它的解为 $x=-\frac{b}{a}$.

注意 当 $a=0$ 时，$ax+b=0$ 不是一元一次方程. 这时，如果 $b\neq0$，方程无解，如果 $b=0$，则方程有无穷多个解.

(3) 一元二次方程：方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 叫做一元二次方程.

(i) 求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(ii) 判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根.

(iii) 根与系数的关系(韦达定理)

如果 α,β 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根，则有 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$. 反过来，如果有 $\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$，则

$x^2-px+q=0$ 是以 α,β 为根的一元二次方程.

2. 方程组

(1) 一次方程组：由几个一次方程组成并含有两(三)个未知数的方程组，叫做二(三)元一次方程组.

二元一次方程组的解法有：代入消元法；加减消元法等.

三元一次方程组的解法是用代入消元法或加减消元法，通过"消元"使其转化为二元一次方程组来解.

(2) 简单的二元二次方程组：形如 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的方程叫做二元二次方程.

由一个二元二次方程和一个二元一次方程，或由两个二元二次方程组成的方程组，叫做二元二次方程组.

由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的二元二次方程组，可用代入法来解；由两个二元二次方程组成的方程组只限于解几种特殊的类型的方程组.

【复习要求】

一、理解有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、倒数、算术平方根的概念，会进行有关计算.

1. 理解什么叫有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、算术平方根. 知道有理数、实数之间的关系；会进行实数大小的比较；会求一个数的相反数；会求一个数的绝对值. 知道算术平方根一定是非负数.

2. 会熟练地进行实数的加、减、乘、除、乘方的运算. 会进行非负实数的开方的运算.

二、理解有关整式、分式、二次根式的概念，掌握它们的一些性质和运算法则.

1. 理解什么叫单项式、多项式、整式、分式. 对给定的有理式会判断它是整式还是分式.

2. 能熟练地进行整式的四则运算，灵活运用幂的运算法则及乘法公式.

3. 掌握常用的多项式因式分解的方法.

4. 能熟练运用分式的基本性质，对分式进行四则运算.

5. 理解二次根式的定义，在运算时能灵活运用有关的性质.

6. 在对根式进行化简与运算时，会将一个二次根式化成最简根式；会对二次根式进行四则运算；会利用分母有理化进行除法运算.

三、掌握一元一次方程、一元二次方程的解法，能灵活运用一元二次方程根的判别式以及根与系数的关系解决有关问题.

1. 会用方程的同解原理，熟练地解一元一次方程.

2. 会熟练运用一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式并会用因式分解法和配方法求一元二次方程的解. 会根据判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值判断方程实根的个数;会灵活运用根与系数的关系解有关问题.

四、会解有唯一解的二元一次方程组、三元一次方程组;会解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组;会解简单的由两个二元二次方程组成的方程组.

1. 掌握代入消元法和加减消元法,通过“消元”来求二元一次方程组、三元一次方程组的唯一解.

2. 会用代入消元法解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组;会解某几种特殊类型的由两个二元二次方程组成的方程组(用加减消元法可以消去某个未知数的,可以消去二次项的,以及至少有一个方程可以分解成两个一次方程的).

【例题】

例 1 选择题(每小题中只有一个结论是正确的,把正确结论的代号写在题中的括号内).

(1) 两个无理数的和(　　)

(A) 一定是无理数. (B) 可能为有理数. (C) 一定是有理数. (D) 不会为零.

分析:不妨设 a 为无理数,那么 $b=-a$ 也是无理数. 因为 $a+b=a+(-b)=0$,所以 A、D 不正确. 又因为 $a+a=2a$ 仍是无理数,所以 C 也不正确. 因此正确答案为 B.

答:B.

(2) 下列命题错误的是(　　)

(A) 每一个整数都对应着数轴上的一个点.

(B) 每一个无理数都对应着数轴上的一个点.

(C) 数轴上每一个点都对应着一个实数.

(D) 有理数和数轴上的点一一对应.

分析:因为实数与数轴上的点是一一对应的,所以 A、B、C 都是正确命题. 因此正确答案为 D.

答:D.

(3) 如果 $|x|+|y|=0$,那么 x 和 y 的值是(　　)

(A) 互为相反数. (B) 互为倒数. (C) $x=0,y=0$. (D) $x>0,y<0$.

分析:因为 $|x|\geqslant 0$, $|y|\geqslant 0$,所以要使 $|x|+|y|=0$,必有 $|x|=0$ 和 $|y|=0$. 因此 C 正确.

答:C.

(4) $\sqrt{a}-1$ 的绝对值(　　)

(A) 等于 $\sqrt{a}-1$. (B) 等于 $1-\sqrt{a}$. (C) 等于 0.

(D) 当 $a\geqslant 1$ 时,等于 $\sqrt{a}-1$;当 $0\leqslant a<1$ 时,等于 $1-\sqrt{a}$.

分析:因为 $a\geqslant 1$ 时,$\sqrt{a}\geqslant 1$,而 $0\leqslant a<1$ 时,$\sqrt{a}<1$,所以正确答案为 D.

答:D.

(5) 如果$|-a|>-a$,那么(　　)

(A) $a>0$.　　(B) $a<0$.　　(C) $a<-1$.　　(D) $-1<a<0$.

分析:因为$a>0$时,$|-a|>0$,$-a<0$.所以正确答案为A.

答:A.

(6) 化简$|a-3|+a-3$,结果是(　　)

(A) $2a-6$.　　(B) 0.　　(C) $2a-6$或0.　　(D) $6-2a$.

分析:因为$a\geqslant 3$时,$|a-3|+a-3=a-3+a-3=2a-6$;$a<3$时,$|a-3|+a-3=3-a+a-3=0$,所以正确答案为C.

答:C.

(7) 已知$y=ax^5+bx^3+cx-6$,且当$x=2$时,$y=6$.当$x=-2$时,y的值等于(　　)

(A) -18.　　(B) -12.　　(C) 18.　　(D) 无法求出.

分析:因为$a(-x)^5+b(-x)^3+c(-x)=-(ax^5+bx^3+cx)$,所以$y=a(-2)^5+b(-2)^3+c(-2)-6=-(a\cdot 2^5+b\cdot 2^3+c\cdot 2)-6=-(6+6)-6=-18$.

答:A.

(8) 已知$a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0-(2x-1)^5=0$,那么$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$的值等于(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 32.　　(D) 16.

分析:因为$a_5\times 1^5+a_4\times 1^4+a_3\times 1^3+a_2\times 1^2+a_1\times 1+a_0=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$,所以在原式中取$x=1$,可得$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$.因此正确答案为B.

答:B.

例2　填空题.

(1) 如果$-|a|=-a$,那么a ____ 0;如果$-|a|=a$,那么a ____ 0;如果$|a|>a$,那么a ____ 0.

分析:因为$-|a|\leqslant 0$,所以要使$-|a|=-a$,必有$a\geqslant 0$.要使$-|a|=a$,必有$a\leqslant 0$.因为当$a\geqslant 0$时,$|a|=a$,所以要使$|a|>a$,必有$a<0$.

答:$\geqslant$;$\leqslant$;$<$.

(2) 如果x,y为实数,且$|x+1|+(y-1)^2=0$,那么$x=$____,$y=$____.

分析:因为$|x+1|\geqslant 0$,$(y-1)^2\geqslant 0$,所以要使$|x+1|+(y-1)^2=0$,必有$|x+1|=0$,$(y-1)^2=0$,解得$x=-1$,$y=1$.

答:-1,1.

(3) 当$1\leqslant a<5$时,$\sqrt{(a-1)^2}+|5-a|=$____.

分析:因为$1\leqslant a<5$时,$\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|=a-1$,$|5-a|=5-a$,所以$\sqrt{(a-1)^2}+|5-a|=a-1+5-a=4$.

答:4.

例3　选择题.

(1) 已知$\frac{ab+b}{2}=a$,那么用 b 表示 a 是(　　)

(A) $\frac{b-a}{2}$.　　(B) $\frac{b}{2-b}$.　　(C) $b+2$.　　(D) b^2+b.

分析:由 $a=\frac{ab+b}{2}$可得 $2a=ab+b$,解出 a 得 $a=\frac{b}{2-b}$. 因此正确答案为 B.

答:B.

(2) 下列各式的变形,正确的是(　　)

(A) $x^3-y^3=(x-y)^3$.　　(B) $8+a^3=(2+a)(4+2a+a^2)$.

(C) $x^3+8y^3=(x+2y)(x^2-xy+4y^2)$.　(D) $-x^3+y^3=(-x+y)(x^2+xy+y^2)$.

分析:因为 $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, $8+a^3=(2+a)(4-2a+a^2)$, $x^3+8y^3=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$,所以 A、B、C 全不正确. 因此正确答案为 D.

答:D.

(3) $-(a-2b)(a+2b)$是下列哪个多项式的分解结果(　　)

(A) a^2-4b^2.　　(B) $-a^2+4b^2$.　　(C) $-a^2-4b^2$.　　(D) a^2+4b^2.

分析:因为$-(a-2b)(a+2b)=-(a^2-4b^2)=-a^2+4b^2$,所以正确答案为 B.

答:B.

(4) 已知 $a=1+\frac{1}{b}$, $b=1+\frac{1}{a}$,且 $a\neq0$, $b\neq0$,那么 b 等于(　　)

(A) $a-1$.　　(B) $1-a$.　　(C) $1+a$.　　(D) a.

分析:由 $a=1+\frac{1}{b}$, $b=1+\frac{1}{a}$,可得 $ab=b+1$, $ab=a+1$,即 $b+1=a+1$,所以 $a=b$. 因此正确答案为 D.

答:D.

(5) 如果 $x-y=xy(x\neq0, y\neq0)$,那么$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$等于(　　)

(A) $\frac{1}{xy}$.　　(B) $\frac{1}{x+y}$.　　(C) -1.　　(D) $y-x$.

分析:由 $x-y=xy$, $x\neq0$, $y\neq0$ 得$\frac{x-y}{xy}=1$,而$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}=-1$. 因此正确答案为 C.

答:C.

例 4　填空题.

(1) 一个多项式除以 $x-1$ 得 $x+y+1$,那么这个多项式是____.

分析:依题意可知该多项式等于$(x-1)(x+y+1)=x^2+xy-y-1$.

答:$x^2+xy-y-1$.

(2) 当 $x=$____时,$\frac{x}{|x|-3}$没有意义.

分析:当$|x|-3=0$ 时,可知$\frac{x}{|x|-3}$没有意义,解得 $x=\pm3$.

答:±3.

(3) 已知 $x+\frac{1}{x}=2\sqrt{5}$，那么 $x-\frac{1}{x}=$______.

分析：因为 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=(2\sqrt{5})^2-4=16$，所以 $x-\frac{1}{x}=\pm4$.

答：±4.

例5 计算.

(1) $(x^3-2x^2+6x-5)+(2x+4x^2)-(4x^2-7x-6x^3)$；

(2) $(ab-1)^2(a^2b^2+ab+1)^2$；

(3) $\left(1-\frac{x}{x+1}\right)-\frac{x+3}{x^2-1}\div\left(\frac{6x+2}{x^2-2x+1}+1\right)$.

解：(1) 原式 $=x^3-2x^2+6x-5+2x+4x^2-4x^2+7x+6x^3$

$=x^3+6x^3-2x^2+4x^2-4x^2+6x+2x+7x-5$

$=7x^3-2x^2+15x-5$；

(2) 原式 $=[(ab-1)(a^2b^2+ab+1)]^2=(a^3b^3-1)^2$

$=a^6b^6-2a^3b^3+1$；

(3) 原式 $=\frac{x+1-x}{x+1}-\frac{x+3}{x^2-1}\div\frac{6x+2+x^2-2x+1}{x^2-2x+1}$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\div\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x+1}$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\div\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^2}$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\times\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)}$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{(x+1)^2}$

$=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$.

注意 (i) 括号前是"+"号，去(或添)括号，括号内各项不变号；括号前是"−"号，去(或添)括号，括号内各项都变号. (ii) 多项式相乘时，一般的方法是先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得积相加，最后化成最简结果. 但计算过程中如能应用公式，要尽量使用. 在应用公式时，公式中的字母，可以用数或字母，也可以用代数式来代换，但相同的字母代换要相同.

例6 把下列各式分解因式：

(1) $axz-3byz-3ayz+bxz$；

(2) $a^3b-2a^2b^2+ab^3$；

(3) x^2-y^2+2y-1；

(4) x^6-y^6；

(5) $x^2-6x-16$；

(6) $x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8$.

分析：对多项式进行因式分解，常用的方法有：提公因式法；公式法，如平方差公式，完全平

方公式，立方和与立方差公式等；可化为 $x^2+(a+b)x+ab$ 型的二次三项式的因式分解(因为 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$)；十字相乘法；分组分解法等.

比如(1) 式可先提取公因式，再适当分组；(2) 式可先提取 ab，再应用公式；(3) 式分组后，再应用公式；(4) 式可先化成 $(x^3)^2-(y^3)^2$ 或 $(x^2)^3-(y^2)^3$ 再分解；(5) 式中常数项 -16 可以分解成 -8 与 2 的积，且 $-8+2=-6$ 等于一次项的系数，故可用化成 $x^2+(a+b)x+ab$ 型的因式分解方法，也可以用十字相乘法；(6) 式可先适当分组，再应用十字相乘法.

解：(1) 原式 $=z(ax-3by-3ay+bx)=z[(ax+bx)-(3ay+3by)]$

$=z[x(a+b)-3y(a+b)]=z(a+b)(x-3y)$；

(2) 原式 $=ab(a^2-2ab+b^2)=ab(a-b)^2$；

(3) 原式 $=x^2-(y^2-2y+1)=x^2-(y-1)^2=(x+y-1)(x-y+1)$；

(4) 原式 $=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$；

或原式 $=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

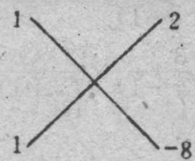
$=(x+y)(x-y)[x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2]$

$=(x+y)(x-y)[(x^2+y^2)^2-x^2y^2]$

$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$；

(5) 原式 $=x^2+(-8+2)x+(-8)\times 2=(x-8)(x+2)$，

或由十字相乘法得



原式 $=(x-8)(x+2)$.

(6) 原式 $=(x^2-4xy+4y^2)-(6x-12y)+8$

$=(x-2y)^2-6(x-2y)+8=(x-2y-2)(x-2y-4)$.

例 7 化简.

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$；

(2) $1-\sqrt{x^2-1}+\dfrac{2\sqrt{x+1}+4\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$；

(3) $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$；

(4) $\left(1-\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right)(m+\sqrt{mn})\ (m>0, n\geqslant 0)$.

解：(1) 原式 $=\dfrac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)}{3-2-1+2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-2+\sqrt{2}}{2}$；

注意 在化简时，有时要多次用到二次根式的分母有理化.

(2) 原式$=1-\sqrt{x^2-1}+\dfrac{(2\sqrt{x+1}+4\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$

$=1-\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{2}[2(x+1)-4(x-1)+2\sqrt{x^2-1}]$

$=1-\sqrt{x^2-1}+(x+1)-2(x-1)+\sqrt{x^2-1}=4-x$;

(3) 原式$=2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=3\sqrt{2}$；

(4) 原式$=\left(1-\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right)m+\left(1-\sqrt{\dfrac{n}{m}}\right)\sqrt{mn}=m-\sqrt{mn}+\sqrt{mn}-n=m-n$.

例 8 选择题.

(1) 下列各组方程中，属同解方程的是(　　)

(A) $|x|=1$ 与 $x=1$.　　(B) $(x-1)(x-2)=0$ 与 $x=2$.

(C) $2-\dfrac{y-1}{3}=1$ 与 $6-y-1=3$.　　(D) $\dfrac{5x-1}{5}=2x+1$ 与 $x=-\dfrac{6}{5}$.

分析：因为$|x|=1$ 表示$x=\pm1$，所以 A 不正确. 因为$(x-1)(x-2)=0$ 的解为$x=1$ 或$x=2$，所以 B 不正确. 因为 $2-\dfrac{y-1}{3}=1$ 与 $6-y+1=3$ 是同解方程，所以 C 也不正确. 因此正确答案为 D.

答：D.

(2) 当 $b=1$ 时，方程$(2x-3)b+(3x-2)a=8x-7$ 有无穷多个解，那么 a 等于(　　)

(A) 2.　　(B) $\dfrac{2}{3}$.　　(C) $\dfrac{1}{2}$.　　(D) $-\dfrac{1}{2}$.

分析：当 $b=1$ 时，原方程可整理为 $3(a-2)x=2(a-2)$，由此可知，当 $a=2$ 时，方程有无穷多个解.

答：A.

(3) 要使关于 y 的方程$|2-|y-3||=a$ 仅有 3 个不同的解，那么 a 的值是(　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

分析：由原方程可得 $y=3\pm(2\pm a)$，将 $a=0,1,2,3$ 代入可知，仅当 $a=2$ 时，y 有 3 个解. 因此正确答案为 C.

答：C.

(4) 方程 $x^2-4x-(p-1)=0$ 与 $x^2+px-3=0$ 仅有一个公共根，那么 p 的实数值等于(　　)

(A) -2.　　(B) -1.　　(C) 1.　　(D) 2.

分析：此题可用试值的办法，确定哪一个是正确答案. 经试值可知 $p=-2$ 时符合题意，所以正确答案为 A 此外本题也可先解联立方程组求得 $x=\dfrac{4-p}{p+4}$，再代入原方程整理得 $p^3+2p^2+16p+32=0$. 求得 $p=-2$，$p=\pm4i$.

答：A.

(5) 下列各组数中，满足方程 $187a-104b=41$ 的是(　　)

(A) $a=211, b=379$. (B) $a=314, b=565$.

(C) $a=288, b=646$. (D) $a=167, b=174$.

分析：本题采用试值法可知 A 是正确答案. 试值时，可先试末位数字，如 B 中，$7\times4-4\times5$，末位数字不等于 1.

答：A.

(6) 如果 $x_1+x_2=1, x_2+x_3=2, x_3+x_1=3$，那么 x_2 的值是(　　)

(A) 1. (B) -1. (C) 0. (D) 3.

分析：由原 3 个方程可得 $x_1+x_2+x_3=3$，由此方程与 $x_3+x_1=3$ 可得 $x_2=0$. 所以正确答案为 C.

答：C.

(7) 已知 $\begin{cases}x=2,\\y=-1\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}ax+by=1,\\bx+ay=4\end{cases}$ 的解. 那么 a、b 的值分别是(　　)

(A) $a=-1, b=2$. (B) $a=5, b=3$. (C) $a=2, b=3$. (D) $a=b=-1$.

分析：先把 $\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}$ 代入 $\begin{cases}ax+by=1,\\bx+ay=4,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2a-b=1,\\-a+2b=4.\end{cases}$ 解这个关于 a、b 的方程组可得 $\begin{cases}a=2,\\b=3.\end{cases}$ 因此正确答案为 C.

答：C.

例 9　填空题.

(1) 如果方程 $9x^2+2mx+16=0$ 有两个相等的实数根，那么 $m=$____.

分析：由 $\Delta=b^2-4ac=4m^2-4\times9\times16=0$，可得 $m=\pm12$.

答：±12.

(2) 如果方程 $5x^2+mx+m-4=0$ 的一个根是 0，那么 $m=$____，另一个根是____.

分析：由根与系数的关系知 $\frac{m-4}{5}=0$，由此可得 $m=4$. 从而另一根为 $x=-\frac{m}{5}=-\frac{4}{5}$. 此外本题中也可用 0 代 x，$0+0+m-4=0$，得 $m=4$，所以原方程为 $5x^2+4x=0$，因此另一根为 $-\frac{4}{5}$.

答：$4, -\frac{4}{5}$.

(3) 如果 $\sqrt{3}+2$ 和 $\sqrt{3}-2$ 是一元二次方程的两个根，那么这个一元二次方程是____.

分析：依题意知方程为 $x^2-[(\sqrt{3}+2)+(\sqrt{3}-2)]x+(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)=0$，整理得 $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$.

答：$x^2-2\sqrt{3}x-1=0$.

例 10　已知方程 $x^2+3x+1=0$ 的两根为 α、β，不解方程，求下列各式的值.

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$；　(2) $\alpha^2+\beta^2$；　(3) $\alpha^3+\beta^3$.

解：由根与系数的关系知

$$\alpha+\beta=-3, \alpha\beta=1.$$

∴ (1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-3}{1}=-3$;

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-2=7$;

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]$

$=(-3)[(-3)^2-3\cdot 1]=-18.$

例 11 (1) 已知 $x^2-2x+q=0$ 两根的差为 8,求 q 的值.

(2) 已知方程 $3x^2+5x-1=0$,不解方程,求作一个一元二次方程,使它的两根分别等于已知方程两根的 2 倍.

解:(1) 设 $x^2-2x+q=0$ 的较小的一根为 α,则另一根为 $\alpha+8$,由韦达定理知:

$$\alpha+(\alpha+8)=2, \quad ①$$

$$\alpha\cdot(\alpha+8)=q. \quad ②$$

由①可得 $\alpha=-3$. 代入②,得 $q=-15$.

(2) 设所求方程为 $y^2+py+q=0$,两根分别为 y_1,y_2;方程 $3x^2+5x-1=0$ 的两根分别为 x_1,x_2. 则

$$x_1+x_2=-\frac{5}{3},x_1\cdot x_2=-\frac{1}{3}.$$

又 $y_1=2x_1,y_2=2x_2$,

∴ $p=-(y_1+y_2)=-(2x_1+2x_2)=-2(x_1+x_2)=\frac{10}{3}$,

$q=y_1\cdot y_2=2x_1\cdot 2x_2=4x_1\cdot x_2=-\frac{4}{3}.$

所以所求方程为 $y^2+\frac{10}{3}y-\frac{4}{3}=0$,即 $3y^2+10y-4=0$.

例 12 已知 $k>l>0$,求证方程 $2x^2-(3k+l)x+k\cdot l=0$ 有两个不相等的实数根,且一根大于 l,另一根小于 l.

证明:∵ $\Delta=b^2-4ac=[-(3k+l)]^2-4\times 2\times kl=9k^2+6kl+l^2-8kl$

$=9k^2-2kl+l^2=(k-l)^2+8k^2$,

∴ $\Delta>0$.

因此原方程有两个不相等的实数根.

设 x_1,x_2 分别为原方程的两个根,由韦达定理得

$$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{3k+l}{2},\\ x_1x_2=\frac{kl}{2}.\end{cases}$$

$$(x_1-l)(x_2-l)=x_1x_2-l(x_1+x_2)+l^2=\frac{kl}{2}-\frac{l(3k+l)}{2}+l^2$$

$$=\frac{kl-3kl-l^2+2l^2}{2}=\frac{l(l-2k)}{2}.$$

∵ $k>l>0$,